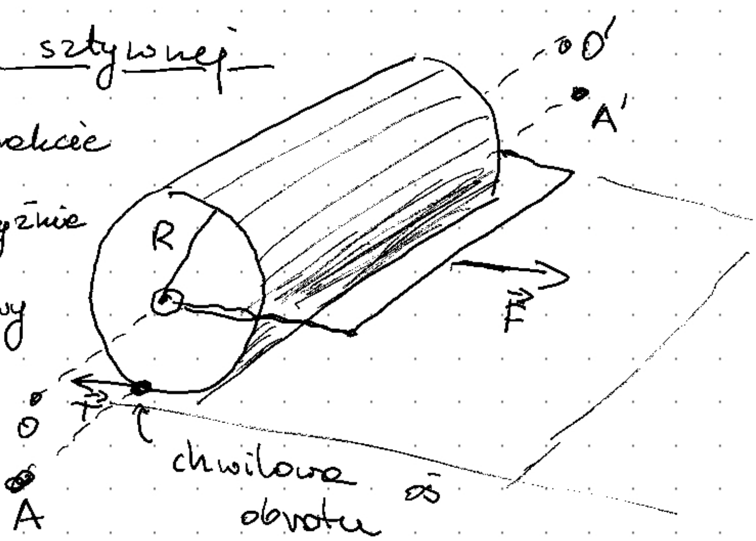
BRYŁA SZTYWNA. TOCZENIE

30.11.2019

Dzisiaj zajmiemy się problemem toczenia się bryły sztywnej i przyjrzymy się kilku zadaniom o tej tematyce z poprzednich olimpiad.

Toczenie się bryły sztywnej

Toczące się ciało w trakcie swego ruchu po płaszczyźnie wykonuje ruch postępowy i obrotowy.



Przyjrzyjmy się przykładowi walca obok:

- równania ruchu

$$F_{wyp} = F - T = ma \quad \text{(ruch postępowy)}$$

$$M_{wyp} = M_T = T \cdot R = I_0 \varepsilon \quad \text{(ruch obrotowy)}$$

moment siły tarcia

moment bezwładności przechodzący przez oś symetrii walca.

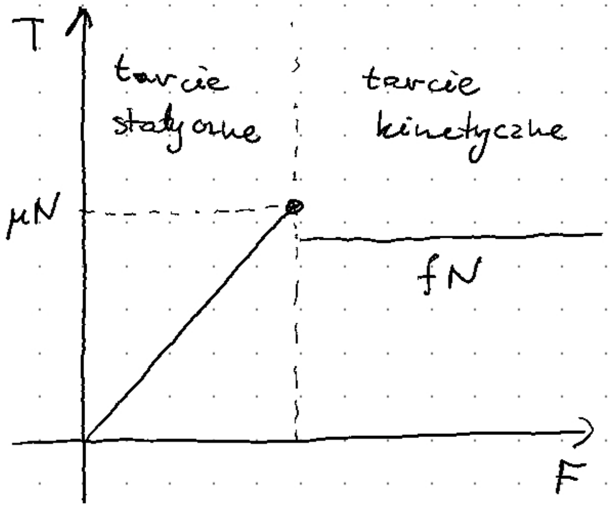
Widzimy, że tarcie między powierzchnią, a walcem jest czynnikiem umożliwiającym ruch obrotowy walca.

Wyróżniamy w związku z tym dwie sytuacje:

Toczenie bez poślizgu

W przypadku toczenia się ciał bez poślizgu punkt styku bryły z podłożem spoczywa. Dzieje się tak, gdy jesteśmy w zakresie odpowiadającym tarciu statycznemu, tzn.

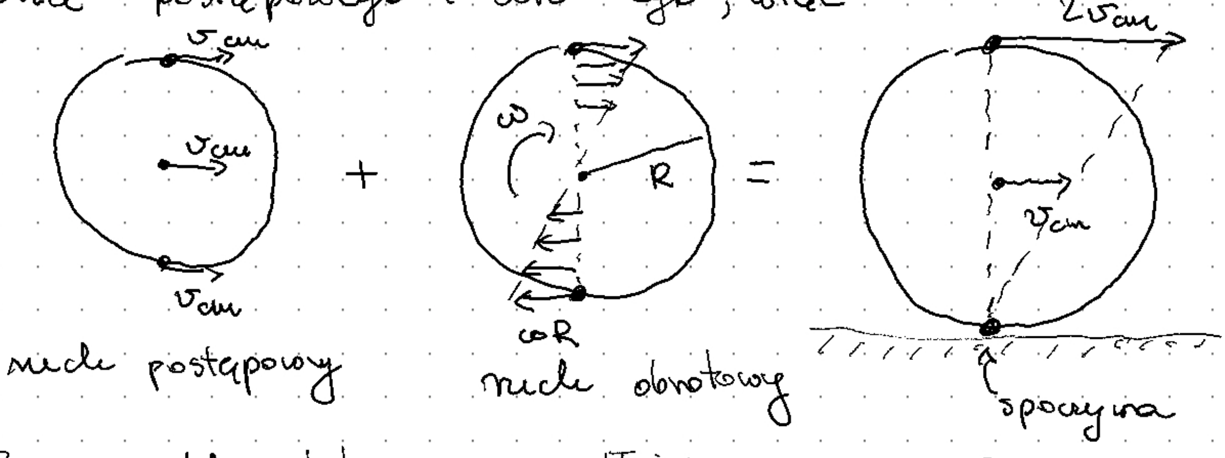
$$T < \mu N = T_{max,\,stat.}$$



N – siła nacisku
μ – wsp. tarcia statycznego
f – wsp. tarcia kinetycznego
Zwykle zakłada się, że

$$f \approx \mu .$$

Pamiętamy, że ruch bryły sztywnej jest złożeniem ruchu postępowego i obrotowego, więc



By punkt styku z podłożem spoczywał:

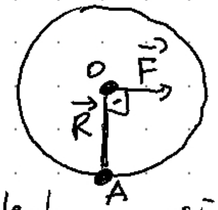
$$v_{CM} = \omega R \,, \quad \text{czyli} \quad a = \varepsilon \cdot R$$

Te dwa warunki pozwalają uzupełnić układ równań z poprzedniej strony:

$$a = \varepsilon \cdot R \,, \quad T < \mu N$$

Warto jest tu dodać, że w tym przypadku wygodnie jest posługiwać się chwilową osią obrotu A (patrz rys. ze strony 1), wtedy

$$M_F = FR = I_A \varepsilon ,$$



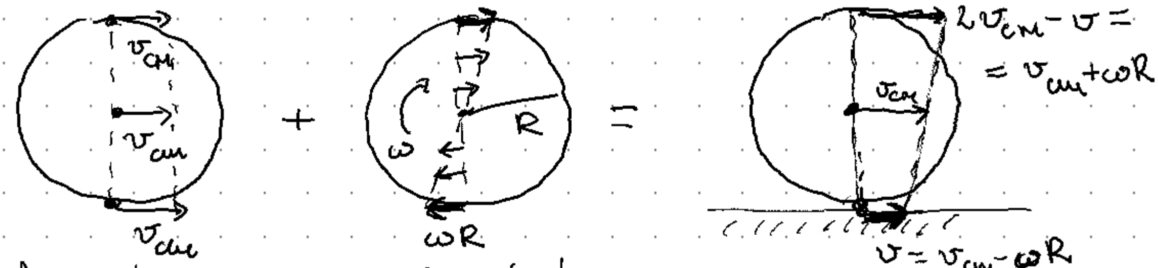
gdzie $I_A = I_0 + MR^2$ jest momentem bezwładności bryły względem osi A.

Toczenie się z poślizgiem

Gdy siła F działająca na bryłę jest odpowiednio duża, wtedy punkt styku bryły z podłożem zaczyna poruszać się względem niego, czyli ślizgać się. W tym przypadku tarcie jest tarciem kinetycznym

$$T = fN \quad (\text{zwykle: } f = \mu)$$

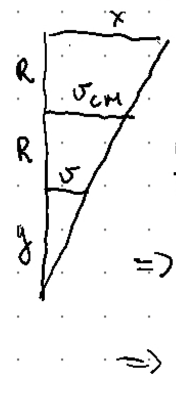
Z powodu poślizgu ruch obrotowy i postępowy przestają być ze sobą związane $a \neq \varepsilon R$:



ruch postępowy ruch obrotowy

Zatem w przypadku ruchu z poślizgiem musimy układ równań z str. 1 uzupełnić relacjami:

$$a \neq \varepsilon \cdot R , \qquad T = fN$$



Tw. Talesa

$$\frac{v}{y} = \frac{v_{cm}}{R+y} = \frac{x}{2R+y}$$

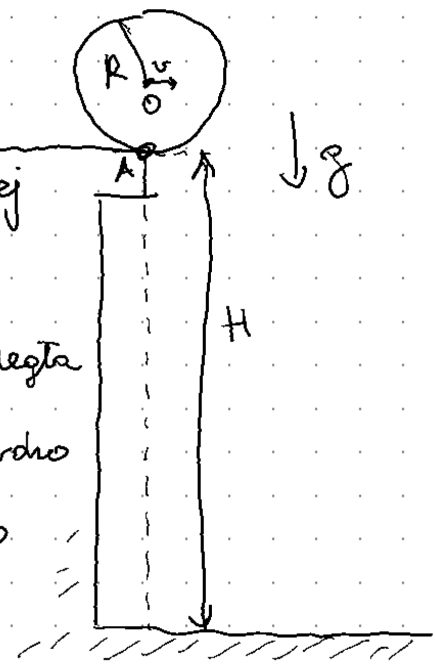
$$\Rightarrow y = \frac{Rv}{v_{cm} - v}$$

$$\Rightarrow x = 2v_{cm} - v$$

Zadania

$\boxed{1 \mid 61OF\text{-}II.T2}$ zadanie z II etapu 61 OF, część teoretyczna, zadanie 2

Jednorodna rura o cienkiej ściance, promieniu R i masie m leży na krawędzi stołu, znajdującej się na wysokości H (gdzie $H \geq R$) nad podłogą. Oś rury jest stale równoległa do krawędzi stołu. Rurze nadano bardzo małą prędkość, w wyniku czego zaczęła się przechylać i spadła ze stołu.

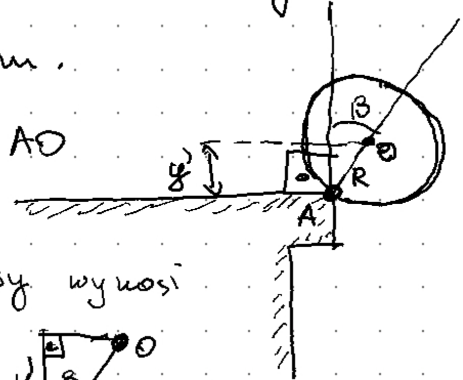


W jakiej odległości od pionowego rzutu krawędzi uderzy w podłogę?

Rozwiązanie

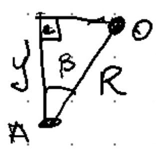
Rura obraca się względem punktu A i w pewnym momencie się odrywa. Następnie mamy do czynienia z rzutem ukośnym.

W momencie odrywania prosta AO tworzy z pionem kąt β.



Zmiana wysokości środka masy wynosi w tym przypadku

$$\Delta y_{CM} = R - y' = R(1 - \cos\beta), \text{ bo}$$



$y' = R\cos\beta$

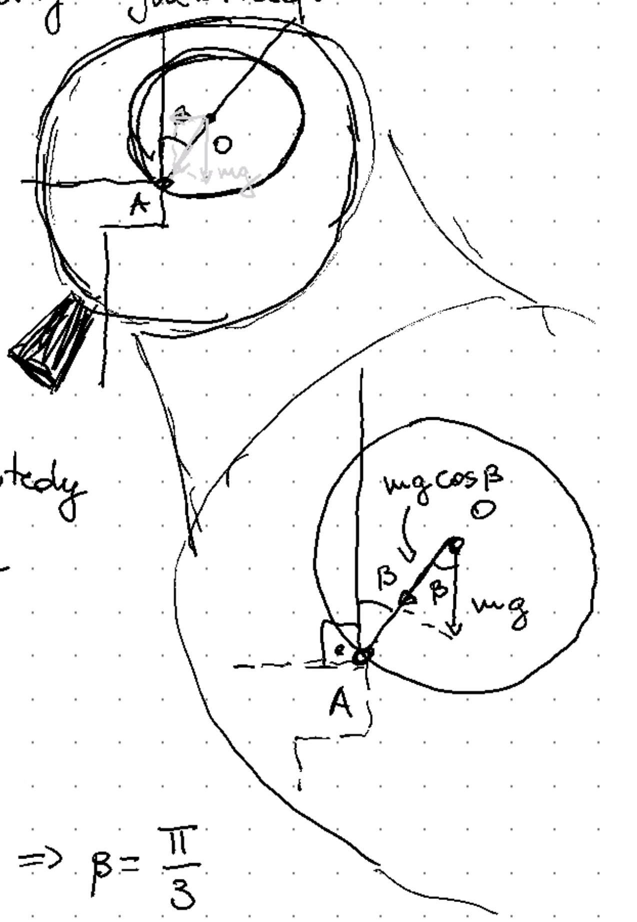
Zmiana energii potencjalnej jest związana z nadaniem rurze prędkości kątowej w względem punktu A, czyli z zasady zachowania energii:

$$mgR(1-\cos\beta) = \frac{1}{2} I_A \omega^2 \quad , (*)$$

gdzie $I_A = I_0 + mR^2 = 2mR^2$ (korzystamy z chwilowej osi obrotu)

$\uparrow$ tw. Steinera

W chwili oderwania rury całe przyspieszenie dośrodkowe pochodzi od siły grawitacji



$$\frac{\cancel{m}v^2}{R} = \cancel{m}g\cos\beta ,$$

ponieważ $v = \omega R$, więc

$$\omega^2 R = g\cos\beta$$

$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{1}{g}\omega^2 R$$

wstawiamy to do (*), wtedy

$$mgR\left(1-\frac{1}{g}\omega^2 R\right) = mR^2\omega^2$$

$$mgR = 2mR^2\omega^2$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{2R} ,$$

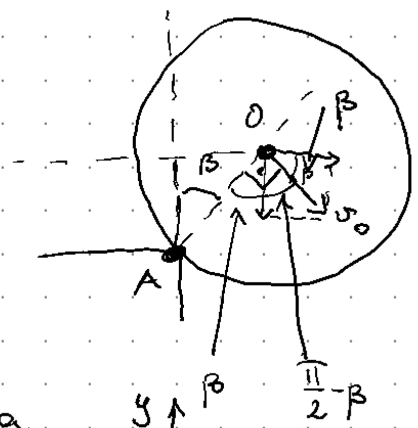
czyli $\cos\beta = \frac{1}{g}\omega^2 R = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{3}$

Oznacza to, że rura odrywa się, gdy jej środek masy obniży się o połowę:

$$\Delta y_{cm} = R(1-\cos\beta) = \frac{1}{2}R$$

Mając prędkość kątową ω możemy wyznaczyć prędkość początkową ruchu w rzucie ukośnym:

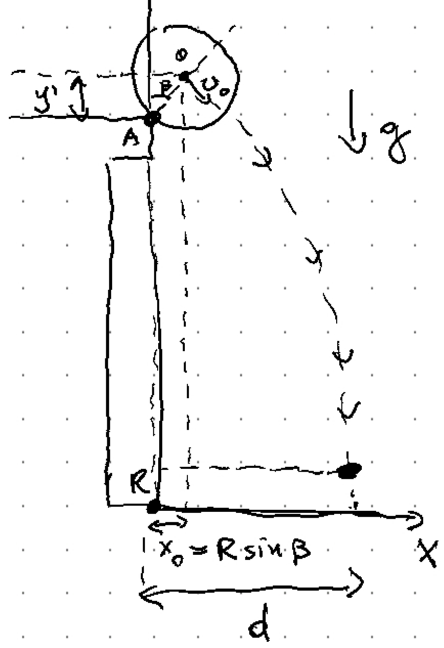
$$v_0 = \omega R = R\sqrt{\frac{g}{2R}} = \sqrt{\frac{gR}{2}}$$



$$v_{0x} = v_0 \cos\beta$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\beta$$

Mamy, więc do rozwiązania układ równań:



$$R = y_0 - v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2,$$

gdzie $y_0 = H + y' = H + R\cos\beta$

(**) $d = x_0 + v_{0x}t$, gdzie $x_0 = R\sin\beta$

Rozwiązujemy równanie:

$$t_l^2 + At_l + B = 0, \quad \text{gdzie}$$

$$A = \frac{2v_{0y}}{g}, \quad B = 2\frac{(R-y_0)}{g}$$

$$t_l = \frac{-A \pm \sqrt{A^2-4B}}{2} = \frac{-A + \sqrt{A^2-4B}}{2}$$

tylko rozwiązanie z „+" jest fizyczne

$$t_l = -\frac{v_{0y}}{g} + \sqrt{\frac{1}{4}\left[\frac{4v_{0y}^2}{g^2} - \cancel{4}\cdot 2\,\frac{R(1-\cos\beta)-H}{g}\right]} =$$

$$= \left\{ h = H + R(\cos\beta - 1) \right\} = \frac{\sqrt{v_{0y}^2 + 2hg} - v_{0y}}{g}$$

wstawiając do (**) mamy:

$$d = x_0 + v_{0x}\,\frac{\sqrt{v_{0y}^2 + 2hg}}{g} =$$

$$= R\sin\beta + v_0\cos\beta\,\frac{\sqrt{v_0^2\sin^2\beta + 2g\left[H + R(\cos\beta - 1)\right]} - v_0\sin\beta}{g} =$$

$$= \left\{ \beta = \frac{\pi}{3}\ ,\ \sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\beta = \frac{1}{2} \right\} = R\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{v_0}{2}\cdot\frac{\sqrt{3v_0^2/4 + 2g(H - R/2)} - v_0\sqrt{3}/2}{2g} =$$

$$= \left\{ v_0 = \sqrt{\frac{gR}{2}} \right\} = \frac{gR}{2}\left[\frac{\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{4}{R}\left(H - \frac{R}{2}\right)} - \sqrt{3}/2}{2g}\right] + \frac{R\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{H}{R} - \frac{5}{16}} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]R$$

2 | 210F-I.T3

Na wierzchołku równi o wysokości h znajduje się kulka. Początkowe prędkości kulki (liniowa i kątowa) są równe zeru. Współczynnik tarcia posuwistego (statycznego i kinetycznego) wynosi $f = \frac{2}{7}$. Współczynnik tarcia potoczystego kulki o równię równy jest zero. W pewnej chwili puszczamy kulkę. Jaka końcowa prędkość kulki v (tj. prędkość środka kulki w chwili, gdy mija ona najniższy punkt równi) zależy od kąta nachylenia równi? Zrób szkic wykresu funkcji $v(\alpha)$.

Rozwiązanie:

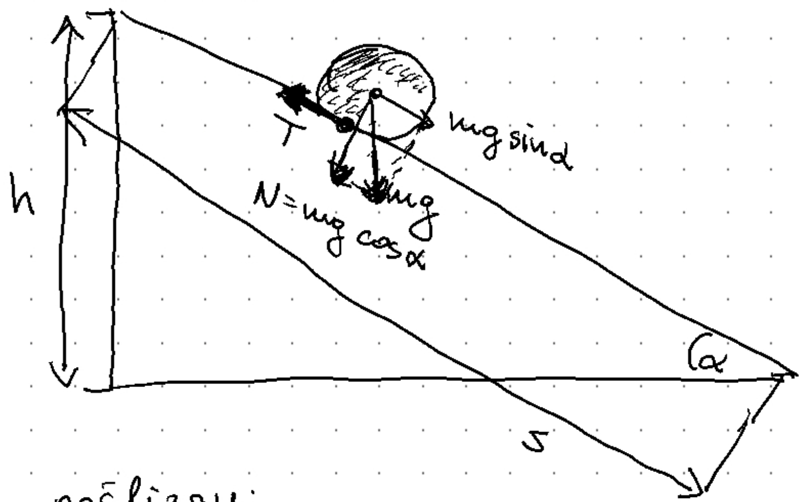
Dla pewnego krytycznego kąta α_{kr} kulka przestanie puszczona toczyć się bez poślizgu tylko zacznie się zsuwać.

Długość równi:

$s = h / \sin\alpha$

$F_{\parallel} = mg \sin\alpha$

$F_{\perp} = N = mg \cos\alpha$



1) Toczenie bez poślizgu:

- II zasada dynamiki dla ruchu postępowego

$$F_{wyp} = F_{\parallel} - T = mg\sin\alpha - T = ma$$

- II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

$$M_{wyp} = M_T = TR = I\varepsilon, \text{ gdzie } I = \frac{2}{5}mR^2$$ dla kuli

- Warunek braku poślizgu:

$$v = \omega R \Rightarrow a = \varepsilon R$$

$$T \leq fN = fmg\cos\alpha$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\varepsilon = \frac{a}{R} \quad , \quad \frac{I}{R^2} a = T \quad , \text{ stąd}$$

$$ma = mg\sin\alpha - \frac{I}{R^2} a$$

$$\Rightarrow \quad a\left(1+\frac{I}{mR^2}\right) = g\sin\alpha \Rightarrow a = \frac{g\sin\alpha}{1+\frac{I}{mR^2}}$$

wstawiając to do wyrażenia na T mamy:

$$T = \frac{I}{R^2} \frac{g\sin\alpha}{1+\frac{I}{mR^2}}$$

Korzystając z nierówności dla tarcia możemy wyznaczyć wartość kąta krytycznego:

$$T \leq f mg\cos\alpha$$

$$\frac{I}{R^2} \frac{\cancel{g}\sin\alpha}{1+\frac{I}{mR^2}} \leq f m\cancel{g}\cos\alpha$$

$$\frac{1}{\left(\frac{mR^2}{I}+1\right)} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \leq f \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha \leq f\left(1+\frac{mR^2}{I}\right)$$

czyli kąt krytyczny dostajemy dla

$$\operatorname{tg}\alpha_{kr} = f\left(1+\frac{mR^2}{I}\right) =$$

$$= \frac{2}{7}\left(1+\frac{5}{2}\right) = 1 \Rightarrow \alpha_{kr} = 45^\circ$$

Korzystając z „równania bez czasu" mamy:

$$v^2 = 2sa = 2\frac{h}{\cancel{\sin\alpha}} \frac{g\cancel{\sin\alpha}}{1+\frac{I}{mR^2}} =$$

$$= \frac{2gh}{1+\frac{2}{5}} = \frac{10}{7}gh = \text{const.} \quad \text{dla } \alpha \leq \alpha_{kr}$$

2) Toczenie z poślizgiem

Tym razem

$$(*) \quad v - \omega R > 0 \leftarrow \text{kula ześlizguje się z równi}$$

$$T = fmg\cos\alpha,$$

czyli $a = \underbrace{g\sin\alpha}_{=\frac{F_{\parallel}}{m}} - \underbrace{fg\cos\alpha}_{=\frac{T}{m}}$

Z równania (*) mamy też: $a - \varepsilon R > 0$

$$\varepsilon = \frac{Rfmg\cos\alpha}{I}, \text{ czyli}$$

$$g\sin\alpha - fg\cos\alpha - \frac{fmgR^2\cos\alpha}{I} > 0$$

$$\operatorname{tg}\alpha - f\left(1+\frac{mR^2}{I}\right) > 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha > f\left(1+\frac{mR^2}{I}\right)$$

co odtwarza warunek, który dostaliśmy wcześniej. W tym przypadku

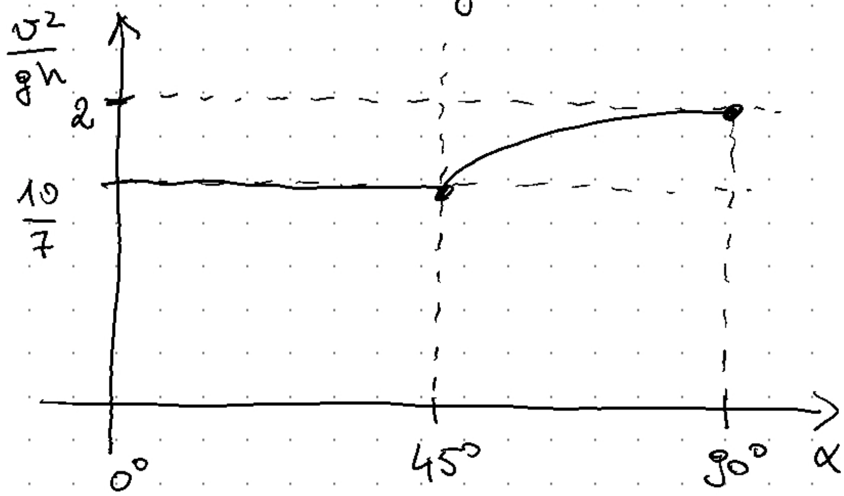
$$v^2 = 2sa = \frac{2hg}{\sin\alpha}(\sin\alpha - f\cos\alpha) = 2hg(1 - f\operatorname{ctg}\alpha)$$

dla $\alpha > \alpha_{kr}$

$$\lim_{\alpha \to \alpha_{kr} = 45^\circ} 2gh\left(1 - \frac{2}{7}\operatorname{ctg}\alpha\right) = \frac{10}{7}gh$$

$$\lim_{\alpha \to 90^\circ} 2gh\left(1 - \frac{2}{7}\operatorname{ctg}\alpha\right) = 2hg$$

Zatem wykres $\frac{v^2}{hg}(\alpha)$ ma postać:



W granicy $\alpha \to 90^\circ$ znika nacisk, bo $N = mg\cos\alpha \to 0$, czyli mamy spadek swobodny w polu grawitacyjnym.