ELEMENTY TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

1.02.2020

Moduł Younga

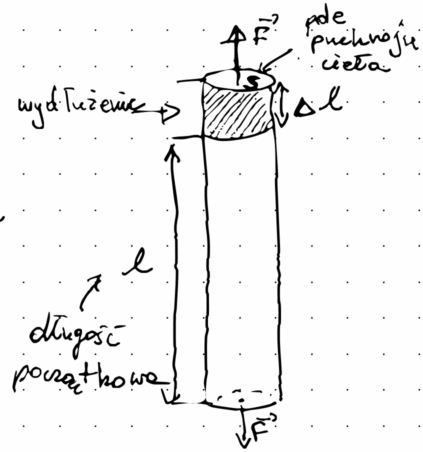
Zwany jest on także inaczej jako moduł odkształcalności liniowej albo współczynnik sprężystości podłużnej i jest definiowany jako:

moduł Younga

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}, \quad \text{gdzie}$$

$\sigma = \frac{F}{S}$ - naprężenie drutu

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ - względne odkształcenie liniowe



Moduł Younga jest powiązany z prawem Hooke'a:

$$F = -\left(\frac{ES}{l}\right)\Delta l = -k\Delta l$$

stała sprężystości

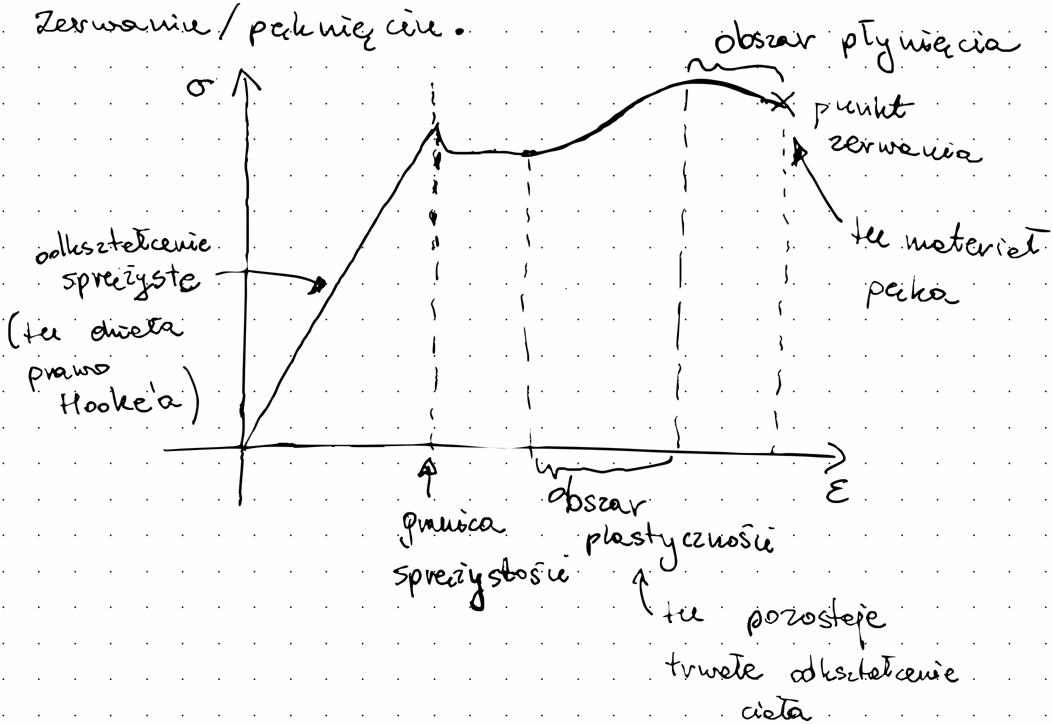
Moduł Younga zależy od temperatury i wraz z jej wzrostem zmniejsza się jego wartość jak:

$$E(T) = \beta\left[\varphi(T)\right]^6,$$

gdzie $\varphi(T) = \varphi_0 - \gamma\frac{(k_B T)^2}{\varphi_0}$, $\left(k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J/K}\right)$

przy czym $\varphi(T)$ jest funkcją pracy wyjścia elektronu z metalu, φ_0 jest pracą wyjścia dla $T=0$, a β i γ są pewnymi stałymi zależnymi od struktury krystalicznej metalu.

Dane ciało wykazuje określoną wytrzymałość na naprężenia. Jeżeli odkształcenia są małe ciało powraca do swej pierwotnej długości po ustaniu naprężenia. W tym zakresie odkształcenie jest proporcjonalne do naprężenia i mówimy, że odkształcenie jest sprężyste. Dla pewnej wartości odkształcenia ciało nie powraca już do swej pierwotnej długości, wtedy mówimy o odkształceniu plastycznym. Dla wartości odkształcenia materiał wykazuje granicę wytrzymałości i ulega zerwaniu / pęknięciu.

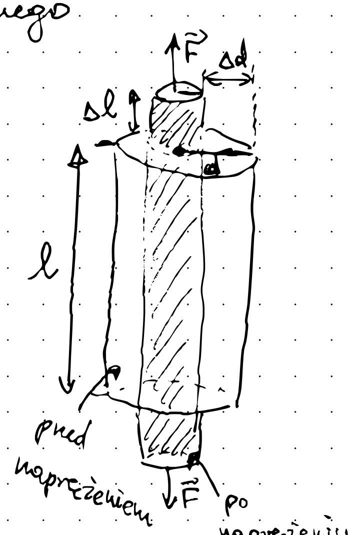


Typowe wartości modułu Younga:

- guma $E = 0{,}01 - 0{,}1$ GPa
- Nylon $E = 2-4$ GPa
- drewno $E = 11$ GPa (wzdłuż włókien)
- Miedź $E = 110 - 135$ GPa
- Stal $E = 190 - 210$ GPa
- diament $E = 1050 - 1200$ GPa

Współczynnik Poissona

Współczynnik Poissona jest zdefiniowany jako stosunek odkształcenia poprzecznego do odkształcenia podłużnego.



$$\nu = - \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}},$$

gdzie

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{\Delta d}{d} \text{ - odkształcenie poprzeczne}$$

$$\varepsilon_{\parallel} = \frac{\Delta l}{l} \text{ - odkształcenie podłużne}$$

Współczynnik ten może przyjmować wartości $\nu \in [-1, \frac{1}{2}]$

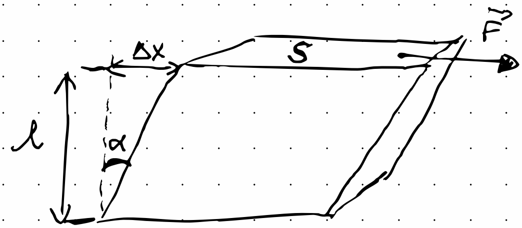
Typowe wartości współczynnika Poissona:

- guma $\nu \approx 0{,}5$
- miedź $\nu = 0{,}33$
- stal $\nu = 0{,}27 - 0{,}30$
- korek $\nu \approx 0{,}0$

Moduł Kirchoffa

Zwany także modułem odkształcalności postaciowej, moduł sprężystości poprzecznej lub modułem sztywności. Jest on zdefiniowany jako:

$$G = \frac{\tau}{\gamma},$$



gdzie

$\tau = \frac{F}{S}$ - naprężenie ścinające

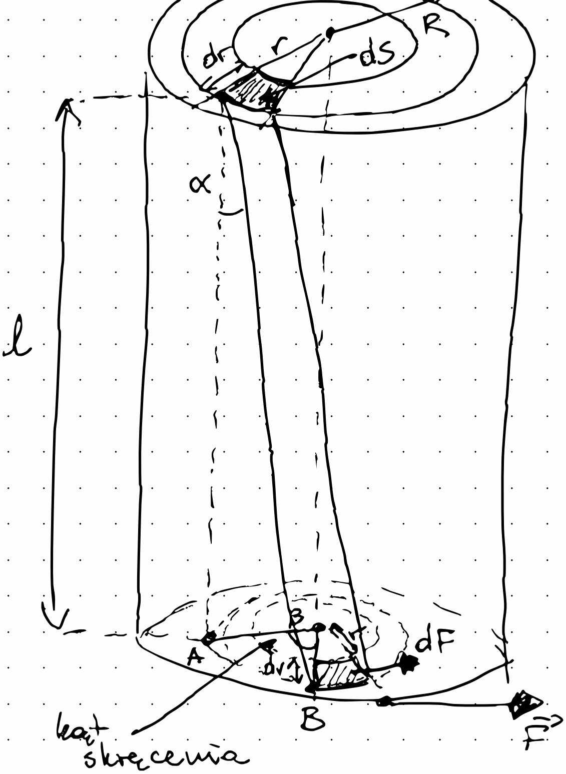
$\gamma = \frac{\Delta x}{l} = \operatorname{tg} \alpha$ - odkształcenie postaciowe

Typowe wartości:

- diament $G = 478$ GPa
- stal $G = 79$ GPa
- miedź $G = 45$ GPa
- guma $G \cong 0$ GPa

Moduł Kirchoffa jest związany z momentem kierującym dla wahadła torsyjnego: (rysunek druta na kolejnej stronie)

Skręcenie druta na którym wisi ciężarek jest przykładem odkształcenia ścinającego, które jest wykorzystane w definicji modułu Kirchoffa.



$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\text{dł. łuku } AB}{l} =$$

$$= \frac{r\beta}{l}$$

dla małych kątów α:

$$\alpha \simeq \frac{r\beta}{l}$$

Z definicji modułu Kirchoffa:

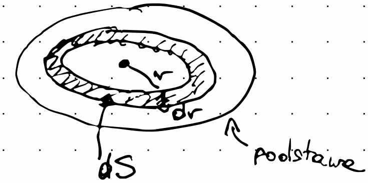
$$dF = G\alpha\, dS,$$

czyli moment siły działający na element dS u dołu wynosi:

$$dM = dF\, r = G\alpha r\, dS$$

Chcemy wysumować teraz wkłady pochodzące od całego walca, ponieważ układ jest izotropowy to dostaniemy, że wysumowując po kątach

$$dS = 2\pi r\, dr,$$



czyli

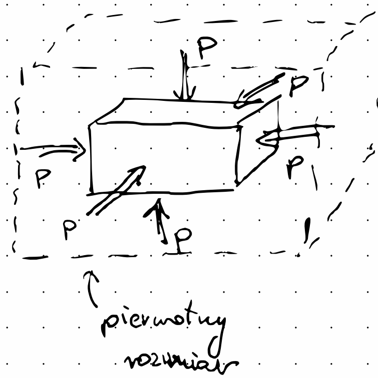
$$M = \int_0^R G\alpha r\, dr = 2\pi \int_0^R \frac{G\beta r^3}{l}\, dr =$$

$$= 2\pi \frac{G\beta R^4}{4l} = \underbrace{\frac{\pi G R^4}{2l}}_{\text{moment kierujący}}\beta$$

■ Współczynnik sprężystości objętościowej

Nazywany jest także modułem Helmholtza lub modułem odkształcalności objętościowej

Wielkość ta opisuje odporność ciała na zmianę objętości pod wpływem jednorodnego ciśnienia wywieranego na każdą ze ścianek.



Moduł Helmholtza definiujemy jako:

$$K_T = -V\left(\frac{dp}{dV}\right)_T$$ – izotermiczny współczynnik sprężystości objętościowej

T – przy stałej temperaturze

$$K_{ad.} = -V\left(\frac{dp}{dV}\right)_{ad}$$ – adiabatyczny wsp. sprężystości objętościowej

ad – dla sprężania adiabatycznego (bez wymiany ciepła)

Przykładowe wartości:

- woda $2{,}2 \cdot 10^9$ Pa
- powietrze $K_T = 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa, $K_{ad} = 1{,}42 \cdot 10^5$ Pa
- stal $K = 1{,}6 \cdot 10^{11}$ Pa
- diament $K = 4{,}42 \cdot 10^{11}$ Pa

Dla gazów możemy moduł Helmholtza znaleźć, korzystając z równania Clapeyrona:

$$pV = nRT$$

- izotermiczny moduł Helmholtza

$T = \text{const}$, czyli

$$pV = \text{const} \Rightarrow p = \frac{nRT}{V}$$

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_T = \frac{d}{dV}\left(\frac{nRT}{V}\right) = nRT\frac{d}{dV}\left(V^{-1}\right) = -nRT\frac{1}{V^2},$$

czyli

$$K_T = -V\left(\frac{dp}{dV}\right)_T = +VnRT\frac{1}{V^2} = \frac{nRT}{V} = p,$$

czyli $K_T = p$ dla przemiany izotermicznej

- adiabatyczny moduł Helmholtza

równanie adiabaty $pV^{\varkappa} = \text{const} \Rightarrow p = \frac{\text{const}}{V^{\varkappa}}$

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_{ad.} = \text{const}\,\frac{d}{dV}\left(V^{-\varkappa}\right) = -\varkappa\,\text{const}\,V^{-\varkappa-1},$$

czyli

$$K_S = -V\left(\frac{dp}{dT}\right)_{ad.} = \varkappa\,\text{const}\,V^{-\varkappa} = \varkappa p,$$

gdzie $\varkappa = \frac{c_p}{c_V}$.

Fala dźwiękowa jest falą sprężystą, która powoduje adiabatyczne sprężanie gazu w powietrzu, a jej prędkość wynosi

$$v_{dź.} = \sqrt{K_{ad.}/\rho}\,,$$ gdzie ρ - gęstość gazu.

Odwrotność modułu Helmholtza nazywamy współczynnikiem ściśliwości:

$$\beta = \frac{1}{K}.$$

Zależności pomiędzy różnymi modułami

Okazuje się, że omówione współczynniki nie są niezależne i do całkowitego opisu materiału jednorodnego wystarczy podanie tylko dwóch z nich np. modułu Younga E i wsp. Poissona ν, wtedy:

- moduł Kirchoffa: $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$
- moduł Helmholtza: $K = \dfrac{E}{3(1-2\nu)}$