19/10/2019

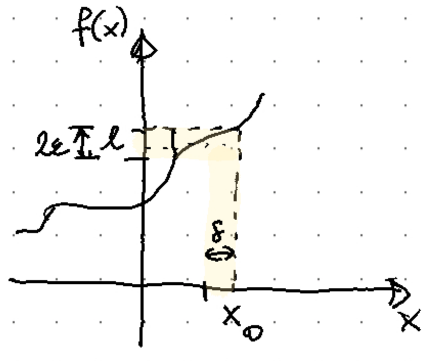
PRAKTYCZNE WPROWADZENIE DO RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO

Jednym z podstawowych narzędzi używanych w fizyce jest rachunek różniczkowy, którego centralnym obiektem jest pochodna funkcji. Od samego początku rozwój tej części matematyki był silnie związany z fizyką. Rachunek różniczkowy w dużej mierze zawdzięczamy I. Newtonowi (1642-1727) oraz G.W. Leibnizowi (1646-1716).

Granica funkcji

Zaczniemy od omówienia pojęcia granicy funkcji, która będzie nam potrzebna do zdefiniowania pochodnej.

■ Granica jednostronna funkcji



rys. 1.

- granica lewostronna

Liczba l jest granicą lewostronną funkcji $f(x)$ w punkcie x_0, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$ dla której

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad x_0 - \delta < x < x_0 .$$

(patrz rys. 1).

Granicę lewostronną oznaczamy symbolem

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

Dla tych z Was, którzy znają skrócony zapis logiczny definicję tą możemy zapisać jako:

dla każdego $\varepsilon > 0$ — dla każdego x

$$\left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l\right) \equiv \left(\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x} \left[(x_0 - \delta < x < x_0) \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon) \right] \right)$$

tożsame — istnieje $\delta > 0$ — implikacja

Powyższa definicja, że podchodząc dowolnie blisko do punktu x_0 znajdujemy się bardzo blisko wartości funkcji wynoszącej l przy takim podchodzeniu (patrz rys. 1).

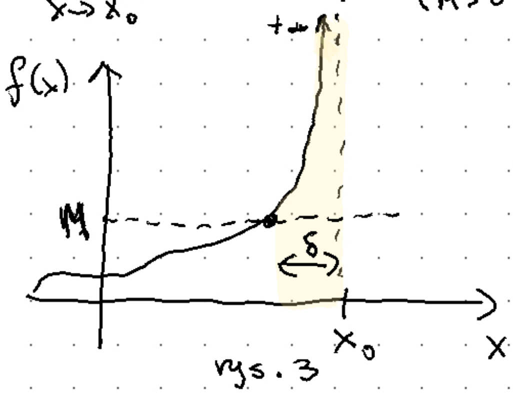
Może się zdarzyć, że w punkcie x_0 przy podchodzeniu od lewej strony ma ona wartości dążące do $\pm\infty$, wtedy

$$\left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty\right) \equiv \left(\bigwedge_{M > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x} \left[(x_0 - \delta < x < x_0) \Rightarrow (f(x) > M) \right] \right)$$

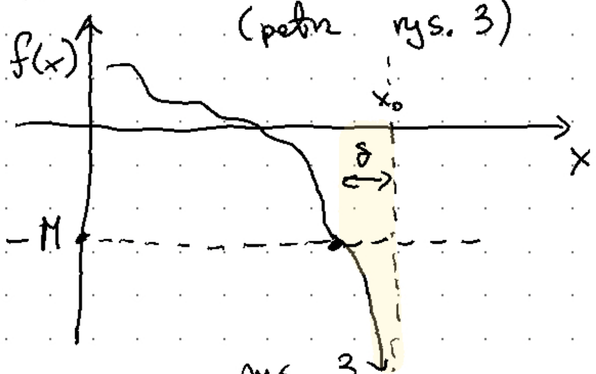
(patrz rys. 2)

$$\left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty\right) \equiv \left(\bigwedge_{M > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x} \left[(x_0 - \delta < x < x_0) \Rightarrow (f(x) < -M) \right] \right)$$

(patrz rys. 3)



rys. 3



rys. 3

– granica prawostronna funkcji

Granica prawostronna jest analogiczna do granicy lewostronnej tylko tym razem do punktu x_0 podchodzimy od prawej strony, czyli

$$\left(\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l\right) \equiv \left(\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x} \left[(x_0 < x < x_0+\delta) \Rightarrow (|f(x)-l| < \varepsilon)\right]\right)$$

$$\left(\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty\right) \equiv \left(\bigwedge_{M>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x} \left[(x_0 < x < x_0+\delta) \Rightarrow (f(x) > M)\right]\right)$$

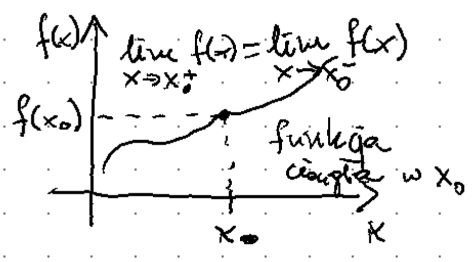
$$\left(\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty\right) \equiv \left(\bigwedge_{M>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x} \left[(x_0 < x < x_0+\delta) \Rightarrow (f(x) < -M)\right]\right)$$

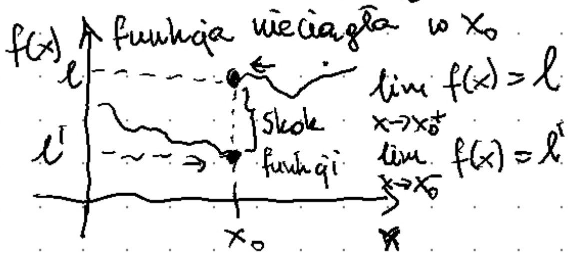
■ Granica funkcji i ciągłość

Mówimy, że l jest granicą funkcji $f(x)$ w punkcie x_0, gdy granica lewostronna i prawostronna są sobie równe i wynoszą l, czyli

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$$

Granicę funkcji oznaczamy jako $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.
Funkcja jest ciągła w punkcie x_0, gdy w tym punkcie istnieje granica $\lim_{x\to x_0} f(x)$.





Pochodna funkcji

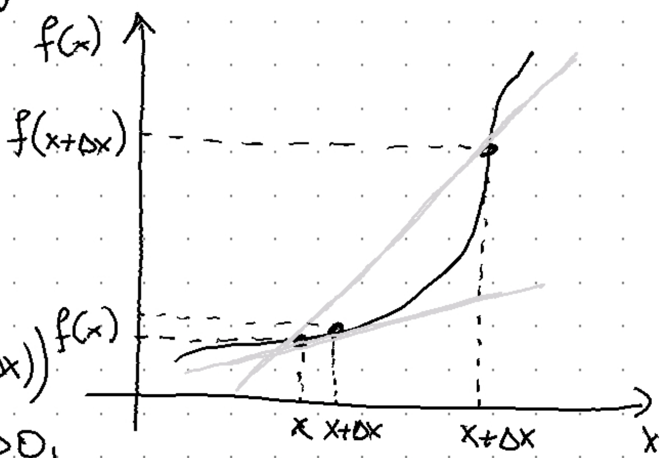
Definicja pochodnej

Pochodną funkcji $f(x)$ definiujemy jako następującą granicę:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}_{\text{iloraz różnicowy}}$$

Wymiennie stosuje się różne oznaczenia pochodnej funkcji: $f'(x)$, $\frac{df}{dx}$.

Interpretacja geometryczna



Iloraz różnicowy $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ jest współczynnikiem kierunkowym prostej przechodzącej przez punkt $(x, f(x))$ oraz $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ [patrz rys. obok]. Gdy $\Delta x \to 0$, wtedy prosta ta dąży do prostej stycznej do wykresu funkcji w punkcie x. Interpretacja ta oznacza, że w maksimum lub minimum funkcji pochodna funkcji jest równa 0, co można wykorzystać w szukaniu tych punktów dla zadanej w problemie funkcji.

Niektóre ważne pochodne

Teraz na dwóch ważnych przykładach pokażemy w jaki sposób korzystając z definicji możemy obliczyć pochodną funkcji.

1°) $f(x) = x^n$

Dygresja: Dwumian Newtona

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \ldots + \binom{n}{n} y^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Symbol Newtona

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{dla} \quad 0 \leq k \leq n$$

Współczynniki dwumianowe pojawiają się jako elementy trójkąta Pascala.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Trójkąt Pascala

$$\frac{d(x^n)}{dx} = (x^n)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overset{1=}{\cancel{\binom{n}{0} x^n}} + \binom{n}{1} x^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \binom{n}{3} x^{n-3} (\Delta x)^3 + \ldots + \binom{n}{n} (\Delta x)^n \cancel{- x^n}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta x + \ldots \right] = \binom{n}{1} x^{n-1} = n x^{n-1}$$

gdy $\Delta x \to 0$, wtedy znikają wyrazy wyższego rzędu w Δx

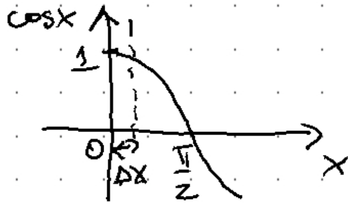
2°) $f(x) = \cos x$

$$\frac{d\cos x}{dx} = (\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos(x)}{\Delta x} =$$

$$= \left\{ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \right\} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\cancel{\cos x \overset{\approx 1}{\cos\Delta x}} - \sin x \sin\Delta x - \cancel{\cos x} \right] =$$

$$= \left\{ \cos\Delta x \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 1 \right\} =$$



$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[-\sin x \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} \right] = \left\{ \lim_{\Delta x \to} \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} = 1 \right\} = -\sin x$$

Dowód, że $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ dodam na stronie dla osób zainteresowanych.

Zwykle w praktyce korzysta się z już wyprowadzonych wzorów na pochodne. Poniżej załączam te najważniejsze dla nas:

1°) $(\text{const})' = 0$

2°) $(x^n)' = n x^{n-1}$

3°) $(\sin x)' = \cos x$

4°) $(\cos x)' = -\sin x$

5°) $(e^x)' = e^x$

6°) $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

7°) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$

$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(x) \leq \pi/2$

8°) $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$

$0 \leq \arccos(x) \leq \pi$

Inne przydatne wzory

1°) Pochodna sumy funkcji

$$(u(x)+v(x))' = u'(x) + v'(x)$$

2°) Pochodna iloczynu funkcji

$$(u(x)\,v(x))' = u'(x)\,v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

3°) Pochodna ilorazu funkcji

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\,v(x) - v'(x)\,u(x)}{v^2(x)}, \quad v(x) \neq 0$$

4°) Pochodna funkcji złożonej

$$\big(u(v(x))\big)' = \frac{d\,u(v(x))}{dx} = \left(\frac{du}{dv}\right)\cdot\left(\frac{dv}{dx}\right)$$

<u>Przykład:</u>

funkcja złożona!

$$\begin{Bmatrix} u(y) = e^y \\ y(x) = x^3 \end{Bmatrix}$$

$$f(x) = 3x^2\cos x + e^{x^3}$$

stosujemy 1°)

$$f'(x) = (3x^2\cos x + e^{x^3})' = (3x^2\cos x)' + (e^{x^3})' =$$

$$= \underbrace{(3x^2)'\cos x + 3x^2(\cos x)'}_{\text{stosujemy } 2^\circ)} + \underbrace{\frac{du(y)}{dy}\cdot\frac{dy(x)}{dx}}_{\text{stosujemy } 4^\circ)} =$$

$$= 6x\cos x - 3x^2\sin x + \underbrace{\left(\frac{de^y}{dy}\right)}_{= e^y = e^{x^3}}\cdot\underbrace{\left(\frac{dx^3}{dx}\right)}_{= 3x^2} =$$

$$= 6x\cos x - 3x^2\sin x + e^{x^3}\cdot 3x^2$$

Zastosowania pochodnej funkcji

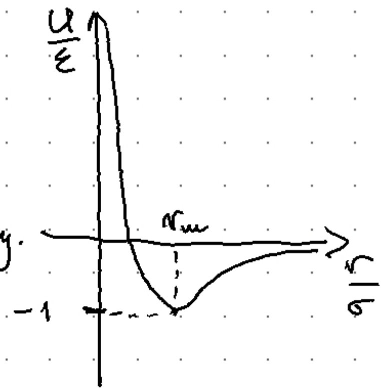
Pochodna funkcji mówi o tym jak bardzo zmienia się wyjściowa funkcja w danym punkcie z tego powodu można dla niej znaleźć bardzo szerokie zastosowania. Poniżej przyjrzymy się kilku z nich (więcej pojawi się na kolejnych zajęciach).

W fizyce wiele wielkości opisuje zmiany czegoś np. prędkość, natężenie prądu, itd. Wielkości te są definiowane właśnie jako pochodne.

- szukanie minimów i maksimów

Gazy szlachetne takie jak argon oddziałują ze sobą tylko przy pomocy tzw. sił van der Waalsa, które modelowane są za pomocą potencjału Lennard-Jonsa:

$$U(r) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right]$$



Zmniejszając temperaturę atomy argonu tworzą kryształ molekularny. Jaka jest średnia odległość między tymi atomami?

Korzystamy z pochodnej funkcji $U(r)$:

$$U'(r) = \left(4\varepsilon\left(\left(\frac{\sigma}{r}\right)^6 - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12}\right)\right)' =$$

$$= 4\varepsilon\left[\sigma^6\left(r^{-6}\right)' - \sigma^{12}\left(r^{-12}\right)'\right] =$$

$$= 4\varepsilon\left[\sigma^6(-6)\,r^{-7} - \sigma^{12}(-12)\,r^{-13}\right] =$$

$$= \frac{24\varepsilon}{\sigma}\left[2\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{13} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^7\right]$$

Funkcja ma minimum lub maksimum (ekstremum), gdy jej pochodna jest równa 0, czyli

$$\frac{24\varepsilon}{\sigma}\left[2\left(\frac{\sigma}{r_m}\right)^{13} - \left(\frac{\sigma}{r_m}\right)^7\right] = 0 \Rightarrow \left(\frac{\sigma}{r_m}\right)^7 = 2\left(\frac{\sigma}{r_m}\right)^{13}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{r_m}{\sigma}\right)^6 = 2 \Rightarrow r_m = 2^{1/6}\sigma$$

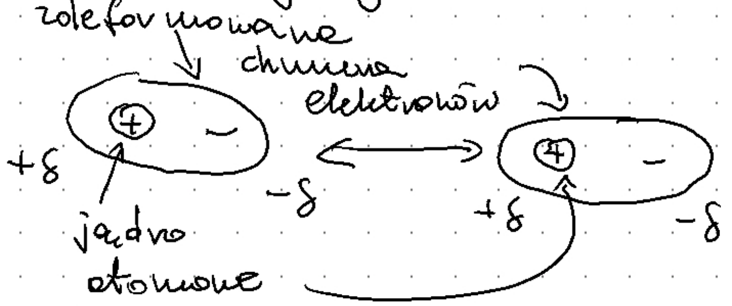
Dla argonu $\varepsilon = 1{,}7355 \cdot 10^{-21}$ J

$\sigma = 0{,}3345$ nm,

czyli $r_m = 0{,}3755$ nm $\leftarrow$ równowagowa odległość między atomami argonu w krysztale molekularnym

Komentarz:

Człon $-\left(\frac{\sigma}{r}\right)^6$ w potencjale Lennarda-Jonesa opisuje przyciąganie dwóch indukowanych dipoli elektrycznych.



Jest to tzw. przyciąganie van der Waalsa

Człon $\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12}$ w tym potencjale opisuje bardzo silne odpychanie elektronów między atomami, gdy ich chmury zaczynają się nachodzić (zasada nieoznaczoności Heisenberga). Oba te efekty kwantowe.

- obliczanie wielkości opisujących zmiany

Zależność przemieszczenia pewnego ciała od czasu wynosi:

$$x(t) = l\left(\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 - 2\left(\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

Znajdź prędkość chwilową dla $t=0$ i $t=\tau$.

Prędkość chwilowa dana jest równaniem:

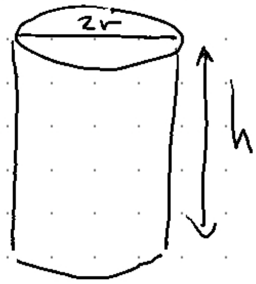
$$v = \frac{dx}{dt} = \left(l\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 - 2l\left(\frac{t}{\tau}\right)\right)' =$$

$$= 2l\frac{t}{\tau^2} - 2l\frac{1}{\tau} = 2\frac{l}{\tau}\left[\frac{t}{\tau} - 1\right]$$

$$v(t=0) = -2\frac{l}{\tau}, \quad v(t=\tau) = 0.$$

- obliczanie błędów pomiarowych

Pomiary blaszanego pudełka o kształcie cylindrycznym wykazały, że wysokość pudełka h i średnica dna $2r$ mają po 30 mm. Pomiary te były wykonane z dokładnością 0,5 %. Obliczyć błąd względny objętości pudełka.



Objętość pudełka $V=\pi r^2 h$, ale $h=2r$, czyli $V=2\pi r^3$. Błędowi Δr odpowiada błąd ΔV, który obliczamy korzystając z przybliżonego wzoru:

$$\frac{\Delta V}{\Delta r} = \frac{dV}{dr} = 6\pi r^2 \Rightarrow \Delta V = 6\pi r^2 \Delta r$$

Więc błąd względny wynosi:

$$\delta V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{6\pi r^2 \Delta r}{V} = \frac{6\pi r^2}{2\pi r^3}\Delta r = 3\,\frac{\Delta r}{r} = 3\delta r,$$

czyli $\delta V = 3 \cdot 0{,}5\,\% = 1{,}5\,\%$.

Pochodne wyższego rzędu i wzór Taylora

Pochodna funkcji także jest funkcją, więc możemy policzyć jej pochodną. W ten sposób możemy policzyć funkcje wyższego rzędu. Np. $f''(x)$ – pochodna II rzędu

$f^{(n)}(x)$ – pochodna n-tego rzędu

Przykład:

Policz pochodną III rzędu dla $f(x) = tg\,x$.

$$f(x) = tg(x)$$

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = (tg(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = f''(x) = \big(\underbrace{\cos^{-2}(x)}_{\substack{u(v) = v^{-2} \\ v(x) = \cos x}}\big)' = \frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} = -2v^{-3}\,\frac{d\cos x}{dx} =$$

$$= -2\cos^{-3}x\,(-\sin x) = 2\,\frac{tg\,x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d^3 f}{dx^3} = f^{(3)}(x) = \left(\frac{2tg(x)}{\cos^2 x}\right)' = 2\,\frac{(tg(x))'\cos^2 x - tg(x)(\cos^2 x)'}{\cos^4 x} =$$

$$= \left\{ (\cos^2 x)' = \left\{ \begin{array}{l} u(v) = v^2 \\ v(x) = \cos x \end{array} \right\} = \frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} = 2\cos x(-\sin x) \right\} =$$

$$= 2\,\frac{\cos^{-2}x\,\cos^2 x - \overset{\frac{\sin x}{\cos x}}{\overset{\shortparallel}{tg(x)}}\,(-2\cos x\sin x)}{\cos^4 x} =$$

$$= 2\,\frac{1 + 2\sin^2 x}{\cos^4 x} = 2\cos^{-2}(x)\left[\cos^{-2}(x) + 2\,tg^2(x)\right]$$

Wzór Taylora

Jednym z bardzo użytecznych zastosowań pochodnych wyższego rzędu jest możliwość przybliżania za ich pomocą bardziej skomplikowanych funkcji. W tym celu

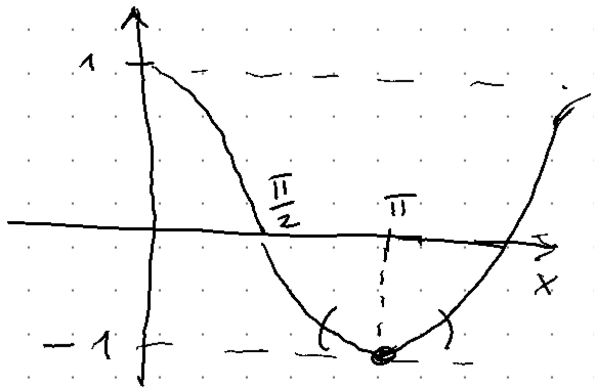
Stosuje się wzór Taylora:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f^{(1)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f^{(3)}(x_0) + \dots$$

Dowolną ciągłą funkcję można przybliżyć przy pomocy wielomianu.

<u>Przykład:</u>

Przybliżyć funkcję $\cos(x)$ w pobliżu punktu $x_0 = \pi$.



$$f(\pi) = \cos(x_0 = \pi) = -1$$

$$f'(\pi) = \left(\cos(x)\right)'\Big|_{x=\pi} = -\sin(x)\Big|_{\pi} = -\sin(\pi) = 0$$

$$f^{(2)}(\pi) = \left(-\sin(x)\right)'\Big|_{x=\pi} = -\cos(x)\Big|_{\pi} = -\cos(\pi) = 1,$$

Czyli

$$\underset{\substack{\text{w pobliżu} \\ x_0 = \pi}}{\cos(x) \simeq} -1 + \frac{x-\pi}{1!} \cdot 0 + \frac{(x-\pi)^2}{2!} 1 + \dots = \frac{1}{2}(x-\pi)^2 - 1 + \dots$$

W pobliżu $x_0 = \pi$, $\cos(x)$ wygląda w przybliżeniu jak funkcja kwadratowa.

W wielu przypadkach będziemy stosować tą metodę do przybliżania równań w szczególności dla problemu drgań ciał.