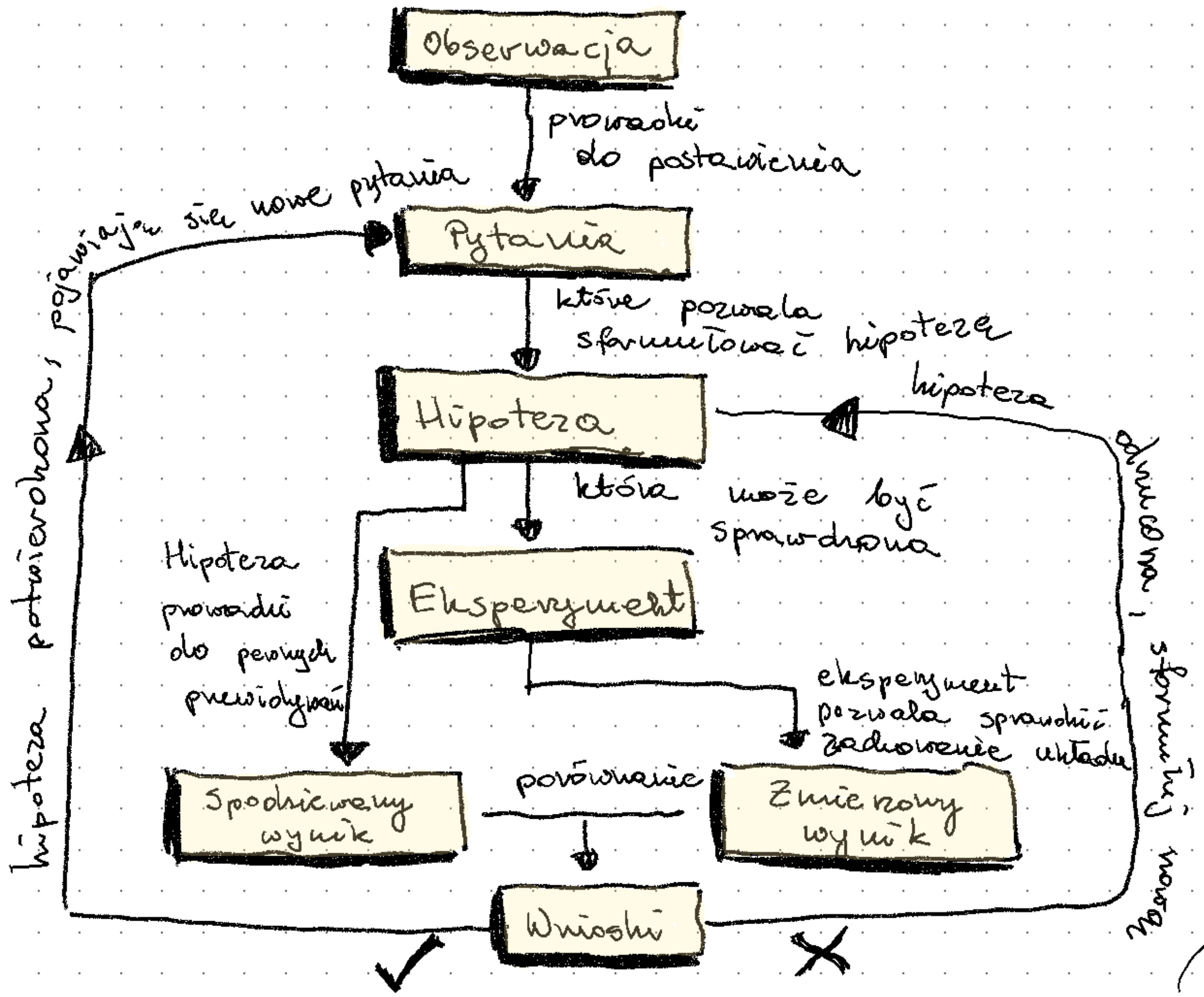
12/10/2019

# WPROWADZENIE DO RACHUNKU NIEPEWNOŚCI POMIAROWEJ

## Metoda naukowa

Karl Popper (1902 - 1994) zastanawiając się jakie kryteria powinno się przyjąć by odróżnić poglądy naukowe od tych nienaukowych doszedł do wniosku, że kryterium tym jest falsyfikowalność. Hipoteza jest naukowa, gdy przy pomocy pewnych narzędzi (np. doświadczenia) można pokazać, że jest ona nieprawdziwa. Intuicja ta posłużyła do opracowania tzw. metody naukowej, której schemat przedstawiony jest poniżej.



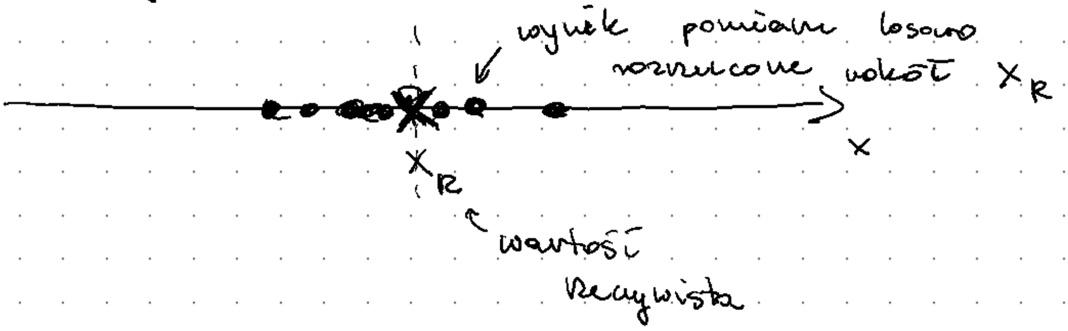
W praktyce procedura ta jest bardziej złożona i dużą rolę odgrywa w niej przypadek i osobiste zaangażowanie badacza. Coraz częściej zamiast eksperymentu przewidywania falsyfikuje się poprzez porównanie ich z wynikami uzyskanymi za pomocą innej metody (np. symulacji komputerowej).

## Rachunek niepewności pomiarowej

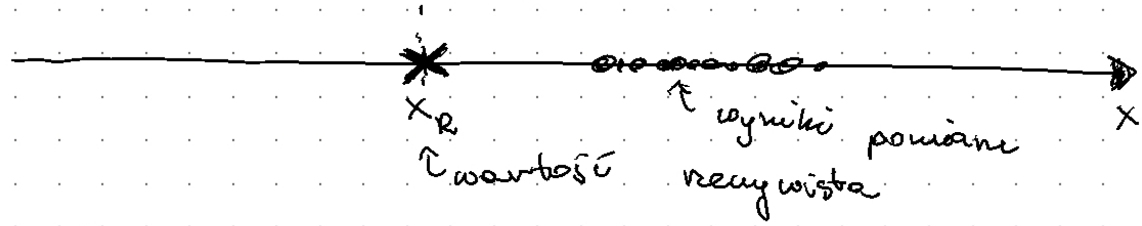
Aby wiedzieć czy uzyskany wynik eksperymentu jest wiarygodny musimy wiedzieć jak szacować popełniany błąd. Wartość pomiaru bez oszacowanej niepewności jest tyle warta co jej brak!

### ■ Rodzaje niepewności pomiarowej

- BŁĄD PRZYPADKOWY spowodowany jest losowym odchyleniem wyniku pomiaru od wartości rzeczywistej.

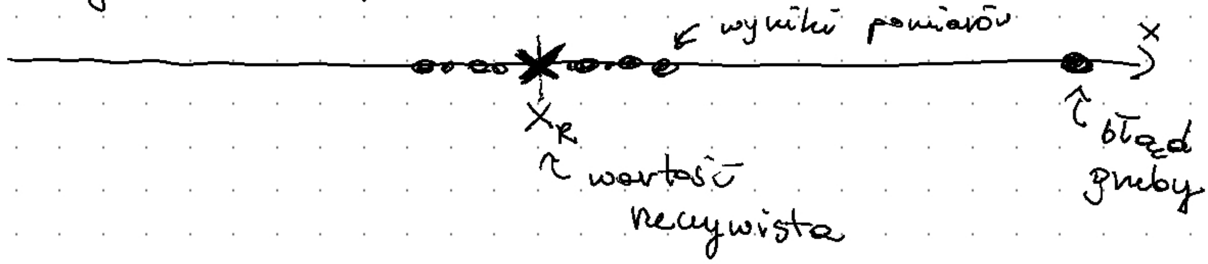



- BŁĄD SYSTEMATYCZNY występuje, gdy przy powtarzaniu pomiaru występuje ta sama różnica między wynikami pomiarów, a wartością rzeczywistą $x_R$.




Błąd ten może być spowodowany kalibracją instrumentu, krzywym stołem doświadczalnym, występowaniem zewnętrznych pól, które nie były wzięte pod uwagę, itd.

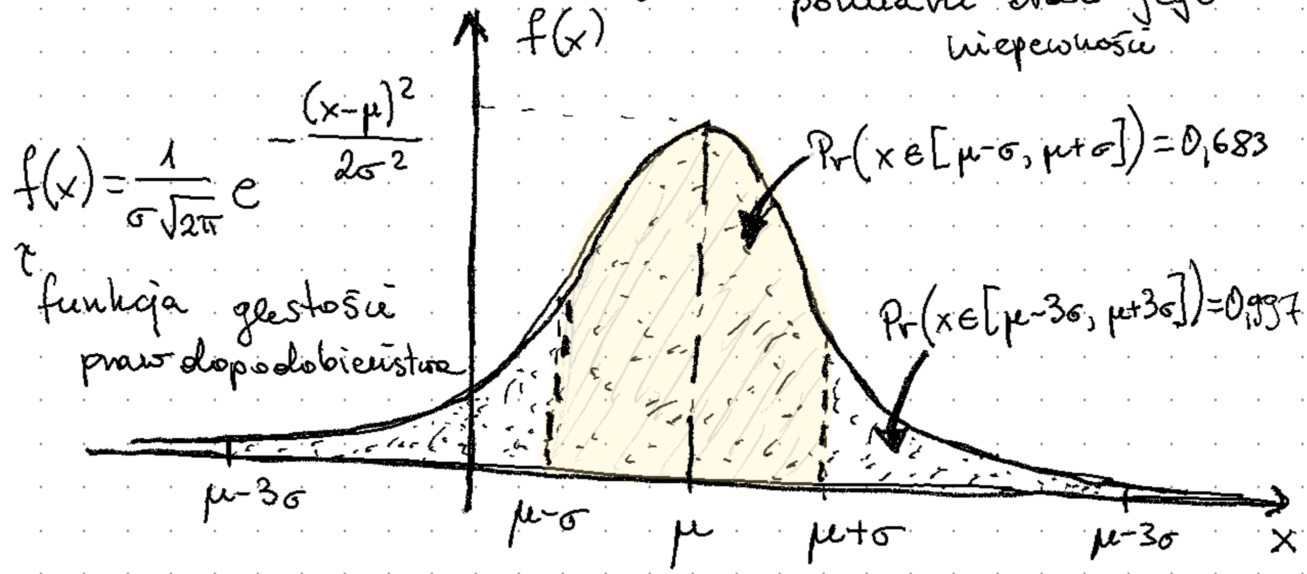
- BŁĄD GRUBY występuje, gdy różnica między wynikiem pomiaru i wartością rzeczywistą jest bardzo duża.




Najczęściej ten rodzaj błędu występuje w wyniku pomyłki eksperymentatora przy złym odczycie lub zapisie wyniku.

Oczywiście zwykle nie znamy wartości rzeczywistej mierzonej wielkości i musimy wykorzystać jakiś sposób na jej estymację. Zakładając, że jedynym rodzajem błędu z jakim się mierzymy jest błąd przypadkowy możemy zamodelować rozkład wyników pomiaru przy pomocy rozkładu normalnego Gaussa.

## Rozkład normalny i estymacja wartości pomiaru oraz jego niepewności




Dla rozkładu normalnego, prawdopodobieństwo tego, że wartości pomiaru $x$ znajduje się w przedziale:

przedział ufności — poziom ufności

- od $\mu-\sigma$ do $\mu+\sigma$ jest równe 68,26%
- od $\mu-2\sigma$ do $\mu+2\sigma$ jest równe 95,46%
- od $\mu-3\sigma$ do $\mu+3\sigma$ jest równe 99,74%

W tym przypadku $\mu$ odpowiada rzeczywistej wartości mierzonej wielkości. Okazuje się, że najlepszym estymatorem wartości oczekiwanej $\mu$ dla populacji, którą przyjmujemy jako wartość rzeczywistą mierzonej wartości, jest wartość średnia z wykonanych pomiarów:

estymator

$$\bar{x} = E(\mu) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad (*)$$

liczba pomiarów

Błędem danego pomiaru nazywamy różnicę między wartością zmierzoną $x_{pom}$ a wartością rzeczywistą $x_R$:

$$\Delta x_{pom} = x_{pom} - x_R$$

Tak zdefiniowany błąd nazywamy błędem bezwzględnym. Wygodnie jest wprowadzić także błąd pomiaru względny dany równaniem:

$$\delta x_{pom} = \frac{\Delta x_{pom}}{x_R} = \frac{x_{pom} - x_R}{x_R}$$

Błąd względny jest wielkością bezwymiarową! Podobnie jak w przypadku wartości rzeczywistej tak w przypadku błędu pomiaru nie znamy go i musimy go w jakiś sposób estymować. W tym celu wykorzystuje się parametr rozkładu normalnego zwany odchyleniem standardowym $\sigma$.

Najlepszym estymatorem odchylenia standardowego $\sigma$ dla pojedynczego pomiaru jest odchylenie standardowe całej próby:

$$S(x_i) = \underset{\text{estymator}}{E(\sigma)} = \sqrt{\frac{1}{\underset{\text{liczba pomiarów}}{n-1}} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \qquad (**)$$

Natomiast najlepszym estymatorem odchylenia standardowego dla wartości średniej jest:

$$S(\bar{x}) = \frac{S(x_i)}{\sqrt{n}} \qquad (***)$$

Powyższy fakt oznacza, że odchylenie standardowe z $n$ pomiarów jest $\sqrt{n}$ razy mniejsze od tego dla pojedynczego pomiaru.

Wykonując serię pomiarów zwiększamy dokładność uzyskanego wyniku!

Zwykle gdy prowadzimy pomiar w którym mamy do czynienia tylko z błędem przypadkowym po wykonaniu $n$ pomiarów, których wartości wynoszą $x_1, x_2, \ldots, x_n$, wartość pomiaru i jego niepewność jest dana równaniem:

$$X = \bar{X} \pm \Delta X = \underbrace{\bar{X}}_{\text{wartość mierzonej wielkości}} \pm \underbrace{k \cdot S(\bar{x})}_{\text{niepewność pomiaru } (k=1,2,3,4,\ldots)}$$

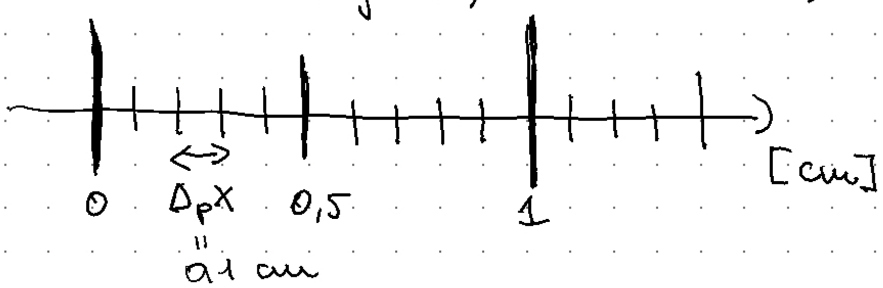
k jest odpowiednim poziomem ufności

Pamiętaj, że wynik zawsze podajemy z odpowiednią jednostką. Wynik bez jednostki jest bez sensu!

## Typy niepewności

- TYP A. Niepewność w tym przypadku wyznaczamy w oparciu o serię wyników pomiaru. W tym przypadku:
  - wynik pomiaru to wartość średnia z serii pomiarów (*)
  - niepewność standardową pomiaru wyznaczamy obliczając odchylenie standardowe wartości średniej tak jak zostało to opisane wcześniej (***)
- TYP B. Nie występuje rozrzut wyników, tj. wszystkie wyniki są takie same. W tym przypadku główną przyczyną błędu jest niepewność przyrządu pomiarowego.

Przyrząd pomiarowy powinien gwarantować taką dokładność, aby wynik pomiaru $x_i$ różnił się od wartości rzeczywistej nie więcej niż o działkę elementarną - $\Delta_p x$, czyli odstęp sąsiadujących kresek podziałki (linijka, termometr)



Dokładność przyrządów określona przez producenta np.

- dla mierników elektromagnetycznych

$$\Delta_p x = \frac{C \cdot zakres}{100}, \text{ gdzie } C \text{ to klasa urządzenia.}$$

- dla mierników cyfrowych

$$\Delta_p x = \frac{C_1 \cdot x + C_2 \cdot zakres}{100},$$

gdzie $C_1$ i $C_2$ to stałe podane przez producenta.

W tym przypadku niepewność pomiaru dana jest wzorem: $\Delta x = \frac{\Delta_p x}{\sqrt{3}}$

Gdy występują oba typy błędów całkowita niepewność pomiaru wynosi:

$$\Delta x_{całk.} = \sqrt{(\Delta x_A)^2 + (\Delta x_B)^2}$$

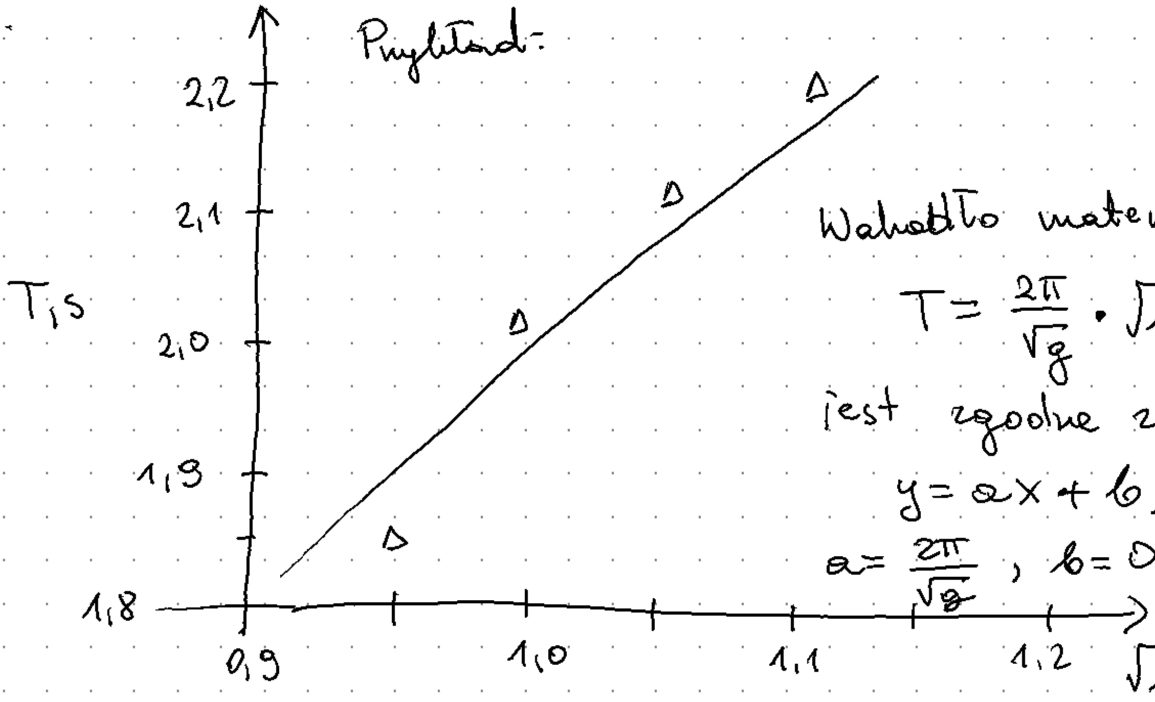
Bardziej precyzyjnie niepewności typu B omówimy przy okazji pomiarów elektrycznych. W przyszłości poszerzymy kurs niepewności pomiarowej o tzw. prawo przenoszenia niepewności, ale dopiero gdy będzie to niezbędne i poznamy trochę koniecznej do tego matematyki.

## Kilka uwag o wykresach

Przy rysowaniu wykresów stosujemy zasady:

1) Wykres powinien być możliwie duży
2) Wykres z grubsza powinien być kwadratowy
3) Podziałki dla osi należy dobrać tak, aby punkty z wynikami pomiarów zajmowały całą powierzchnię wykresu. Podziałki nie muszą zaczynać się od zera.
4) Osie powinny być opisane symbolem wielkości i symbolem używanej jednostki
5) Podziałki opisujemy zaznaczając okrągłe wartości stosowanej wielkości fizycznej, a nie punkty otrzymane w pomiarach.
6) Punkty zaznaczamy możliwie dużymi symbolami. Unikamy stosowania kropek jako symboli.
7) Wykresy sporządzamy ołówkiem na papierze milimetrowym.
8) Staramy się tak przekształcić odpowiednie równania, aby wykres był linią prostą.

Przykład:



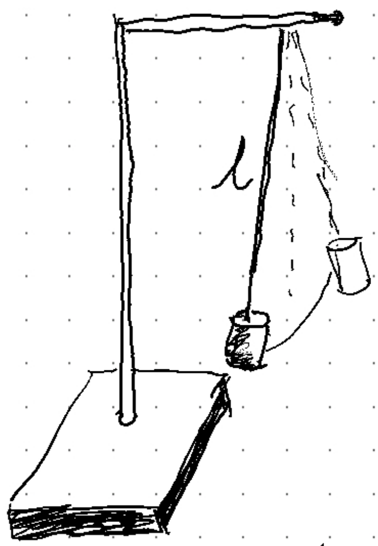

Wahadło matematyczne

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{l}$$

jest zgodne z równaniem $y = ax + b$, gdy $a = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$, $b = 0$

## Doświadczenie

Wyznaczanie przyspieszenia grawitacyjnego g przy wykorzystaniu wahadła matematycznego




- zakładamy, że długość wahadła znamy dokładnie $l = 47\ cm = 0{,}47\ cm$ (po zajęciach zmierzyłem długość inną miarką)
- mierzymy 10-krotność okresu wahadła T i wstawiamy to do równania:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

(Pomiary zamieszczone poniżej wykonałem jeszcze raz samodzielnie po kole)

Wyniki pomiarów

| l.p. | $10T$, s | $T$, s | $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$, $\frac{m}{s^2}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 13,8 | 1,38 | 9,74 |
| 2 | 13,6 | 1,36 | 10,03 |
| 3 | 13,6 | 1,36 | 10,03 |
| 4 | 13,7 | 1,37 | 9,89 |
| 5 | 13,8 | 1,38 | 9,74 |
| 6 | 13,7 | 1,37 | 9,89 |
| 7 | 13,9 | 1,39 | 9,60 |

Wartość średnia z pomiarów:

$$\bar{g} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i = \frac{1}{7}\left(2\cdot 9{,}74 + 2\cdot 10{,}03 + 2\cdot 9{,}89 + 9{,}6\right)\frac{m}{s^2} =$$

$$= 9{,}85\ \frac{m}{s^2}$$

Odchylenie standardowe średniej

$$S(\bar{g}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(g_i - \bar{g})^2} =$$

$$= \left\{\frac{1}{7\cdot 6}\left[2\cdot(9{,}74-9{,}85)^2 + 2\cdot(10{,}03-9{,}85)^2 + 2\cdot(9{,}89-9{,}85)^2 + (9{,}6-9{,}85)^2\right]\right\}^{1/2}\frac{m}{s^2} = 0{,}06\ \frac{m}{s^2}$$

Na podstawie obliczonych wartości wynik pomiaru $g$ przyjmujemy jako

$$g = \left(9{,}85 \pm 2 \cdot 0{,}06\right) \frac{m}{s^2} =$$
$$= \left(9{,}85 \pm 0{,}12\right) \frac{m}{s^2}$$

W tym przypadku poziom ufności został wybrany tak, aby 95,5% wyników pomiaru znajdowało się w podanym przedziale wyników.