WPROWADZENIE DO RACHUNKU CAŁKOWEGO I TEMATY UZUPEŁNIAJĄCE

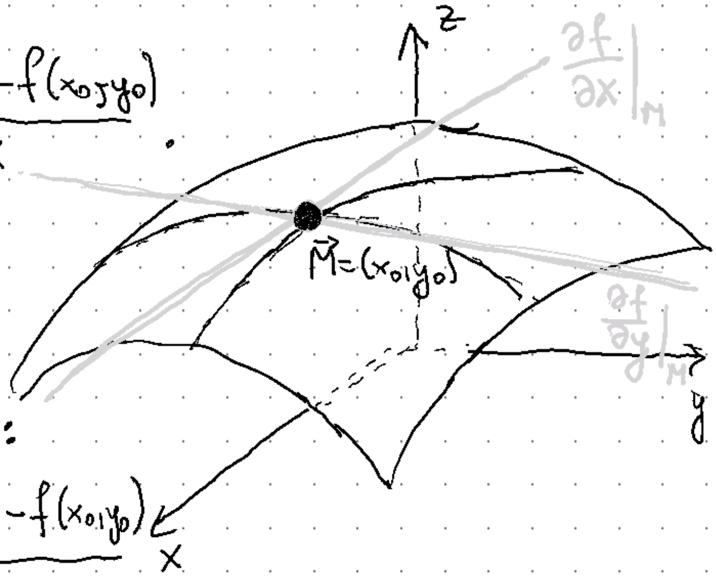
26/10/2019

Na dzisiejszych zajęciach zajmiemy się głównie pojęciami całki nieoznaczonej oraz oznaczonej, ale najpierw uzupełnimy informacje o pochodne funkcji wielu zmiennych.

Pochodne cząstkowe

Rozpatrzmy funkcję dwóch zmiennych: $z=f(x,y)$, wtedy pochodna cząstkowa wzdłuż osi x jest zdefiniowana jako:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$



Analogicznie pochodna cząstkowa wzdłuż osi y jest zdefiniowana jako:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

Mówiąc inaczej pochodna cząstkowa jest zwykłą pochodną jednowymiarową przy założeniu, że druga ze zmiennych jest stała.

Pochodna $\frac{\partial f}{\partial x}$ mówi o szybkości zmian funkcji w kierunku x, a $\frac{\partial f}{\partial y}$ mówi o szybkości zmian funkcji w kierunku y.

■ Prawo propagacji niepewności pomiarowej

Chcę wyznaczyć niepewność pomiaru wielkości $y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, przy czym w tym celu zmierzyłem $x_1, x_2, \ldots, x_n$, którym odpowiadają niepewności pomiaru $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$.
W tym przypadku całkowity błąd pomiaru wielkości y wynosi:

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta x_i\right]^2}$$

Przykład:

Wyznaczamy gęstość kulki przez pomiar jej średnicy oraz masy. Otrzymujemy w wyniku pomiaru, że:

$$d = \left(12{,}2 \pm \frac{0{,}1}{\sqrt{3}}\right)\,\text{mm} = (12{,}200 \pm 0{,}058)\,\text{mm}$$

$$m = \left(7{,}48 \pm \frac{0{,}01}{\sqrt{3}}\right)\,g = (7{,}480 \pm 0{,}0058)\,g$$

$$\rho = \frac{m}{V} = m\Big/\left(\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3\right) = \frac{6m}{\pi d^3}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{6}{\pi d^3} = 1,3594 \ cm^{-3}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial d} = \frac{\partial}{\partial d}\left(\frac{6m}{\pi} d^{-3}\right) = \frac{-18m}{\pi d^4} = -27,2366 \ \frac{g}{cm^4}$$

$$\Delta \rho = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial d}\Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial m}\Delta m\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(-27,2366 \cdot 0,0058)^2 + (1,3594 \cdot 0,0058)^2} = 0,158 \ \frac{g}{cm^3}$$

$$\rho = \frac{6m}{\pi d^3} = (7,87 \pm 0,16) \frac{g}{cm^3}$$

Błąd względny: $\delta \rho = \frac{\Delta \rho}{\rho} = 0,02 = 2\%$

Można sobie z tym problemem poradzić bez znajomości pochodnych cząstkowych:
ρ jest funkcją m i d : $\rho = f(m,d)$, wtedy niepewność pomiaru ρ związana z niepewnością pomiaru m wynosi:

$$\Delta_m \rho = \frac{1}{2}\left| f(m+\Delta m, d) - f(m-\Delta m, d)\right|$$

Analogicznie dla niepewności związanej z pomiarem d mamy:

$$\Delta_d \rho = \frac{1}{2}\left| f(m, d+\Delta d) - f(m, d-\Delta d)\right|$$

W naszym przypadku:

$$\Delta_m \rho = \frac{1}{2}\left| \frac{6(m+\Delta m)}{\pi d^3} - \frac{6(m-\Delta m)}{\pi d^3}\right| = 0{,}0061 \frac{g}{cm^3}$$

$$\Delta_d \rho = \frac{1}{2}\left| \frac{6m}{\pi(d+\Delta d)^3} - \frac{6m}{\pi(d-\Delta d)^3}\right| = 0{,}1122 \frac{g}{cm^3}$$

wtedy całkowity błąd pomiaru wynosi

$$\Delta\rho = \sqrt{(\Delta_m\rho)^2+(\Delta_d\rho)^2} = 0{,}1124 \frac{g}{cm^3}$$

czyli błąd względny wynosi: $\delta\rho = \frac{\Delta\rho}{\rho} = 1{,}4\%$, czyli jest porównywalny z tym uzyskanym ściśle metodą wykorzystującą pochodne.

Rachunek całkowy

Funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ w przedziale $a<x<b$ nazywamy każdą taką funkcję $F(x)$, której pochodna $F'(x)$ jest równa funkcji $f(x)$ dla każdego x z przedziału $a<x<b$, wtedy całką nieoznaczoną funkcji $f(x)$ nazywamy:

miara całki, mówi po jakiej zmiennej całkujemy

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad \text{gdzie } F'(x) = f(x).$$

C - jest stałą ($C' = 0$).

W ogólności całkowanie funkcji jest procedurą dużo trudniejszą od liczenia pochodnych, a dla części funkcji wręcz nie da się jej policzyć w sposób analityczny tylko trzeba ją przybliżać numerycznie.

Najważniejsze wzory rachunku całkowego:

1°) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1, \quad x > 0$

2°) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0$

3°) $\int e^x dx = e^x + C$

4°) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

5°) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

Szczególnie przydatne relacje przy liczeniu bardziej złożonych całek:

1°) $$\int \left(f(x) + g(x)\right) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

2°) $\int k f(x) \, dx = k \int f(x) \, dx, \quad k \neq 0$

3°) $u = u(x), \quad v = v(x)$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$ } jest to tzw. całkowanie przez części

jeżeli $u = u(x)$, wtedy $du = u'(x) dx$

4°) $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$ $\Big\{$ całkowanie przez podstawienie

jeżeli dla $a \le x \le b$, $g(x) = u$ jest funkcją mającą ciągłą pochodną.

Przykłady:

1°) $$\int \ln|x|\,dx = \int 1\cdot \ln|x|\,dx = \left\{\begin{array}{l} \text{przez części} \\ \int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx \\ v' = 1 \to v = \int 1\,dx = x + \tilde{C} \\ u = \ln|x| \to u' = \frac{1}{x} \end{array}\right\} =$$

$$= (x+\tilde{C})\ln|x| - \int (x+\tilde{C})\frac{1}{x}\,dx = (x+\tilde{C})\ln|x| - \int \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\frac{x}{x}}\,dx - \tilde{C}\int\frac{dx}{x} =$$

$$= x\ln|x| + \tilde{C}\ln|x| - x + C_1 - \tilde{C}\ln|x| + C_2 =$$

$$= x\ln|x| - x + \underbrace{(C_1 + C_2)}_{\overset{\shortparallel}{C}} = x\ln|x| - x + C$$

2°) $$\int \sin x\cos x\,dx = \left\{\begin{array}{l} \text{całkowanie przez podstawienie,} \\ \text{ponieważ } (\sin x)' = \cos x \\ t = \sin x,\ dt = t'\,dx = \cos x\,dx \end{array}\right\} =$$

$$= \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$$

3°) $$\int e^x\cos\left(\tfrac{2}{3}x\right)dx = \left\{\begin{array}{l} \text{przez części:} \\ v' = e^x \longrightarrow v = \int e^x\,dx = e^x + \tilde{C} \\ u = \cos\left(\frac{2}{3}x\right) \to u' = -\sin\left(\frac{2}{3}x\right)\frac{2}{3} \end{array}\right\} =$$

$$= (e^x + \tilde{C})\cos\left(\tfrac{2}{3}x\right) + \int (e^x + \tilde{C})\sin\left(\tfrac{2}{3}x\right)\tfrac{2}{3}\,dx =$$

$$= e^x\cos\left(\tfrac{2}{3}x\right) + \tilde{C}\cos\left(\tfrac{2}{3}x\right) + \int e^x\sin\left(\tfrac{2}{3}x\right)\tfrac{2}{3}\,dx + \tfrac{2}{3}\tilde{C}\int\sin\left(\tfrac{2}{3}x\right)dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l|l} 1^\circ)\ \int \sin\left(\frac{2}{3}x\right)dx = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3}x = t \\ dx = \frac{3}{2}dt \end{array} \right\} & 2^\circ)\ \text{przez części:} \\ = \frac{3}{2}\int \sin(t)\,dt = -\frac{3}{2}\cos\left(\frac{2}{3}x\right) & v' = e^x \to v = \int e^x dx = e^x + \bar{C} \\ & u = \sin\left(\frac{2}{3}x\right) \to u' = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{2}{3}x\right) \end{array} \right\} =$$

$$= e^x \cos\left(\frac{2}{3}x\right) + \cancel{\tilde{C}\cos\left(\frac{2}{3}x\right)} + \cancel{\frac{2}{3}\tilde{C}\left(-\frac{3}{2}\cos\left(\frac{2}{3}x\right)\right)} + \left[\left(e^x + \bar{C}\right)\sin\left(\frac{2}{3}x\right) + \right.$$

$$\left. - \int \left(e^x + \bar{C}\right)\frac{2}{3}\cos\left(\frac{2}{3}x\right)dx\right]\frac{2}{3} =$$

$$= e^x \cos\left(\frac{2}{3}x\right) + \left[e^x \sin\left(\frac{2}{3}x\right) + \bar{C}\sin\left(\frac{2}{3}x\right) - \frac{2}{3}\int e^x \cos\left(\frac{2}{3}x\right)dx + \right.$$

$$\left. - \frac{2}{3}\bar{C}\int \cos\left(\frac{2}{3}x\right)dx\right]\frac{2}{3} = \left\{ \begin{array}{l} \int \cos\left(\frac{2}{3}x\right)dx = \frac{3}{2}\int \cos t\,dt = \\ = \frac{3}{2}\sin\left(\frac{2}{3}x\right) \end{array} \right\} =$$

$$= e^x \cos\left(\frac{2}{3}x\right) + \frac{2}{3}e^x \sin\left(\frac{2}{3}x\right) - \frac{4}{9}\int e^x \cos\left(\frac{2}{3}x\right)dx,$$

czyli

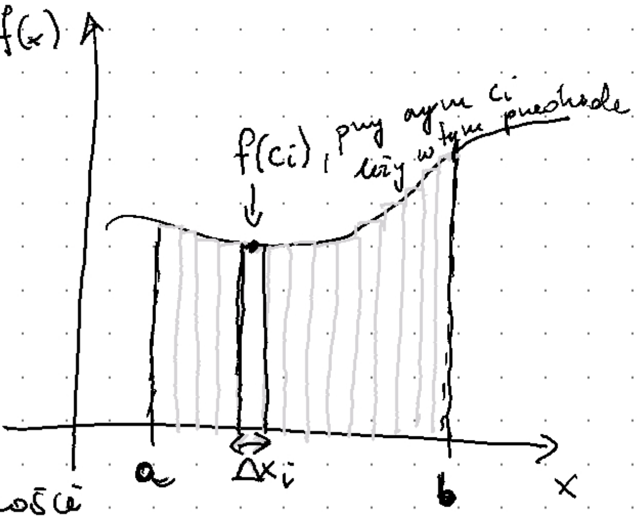
$$\underbrace{\int e^x \cos\left(\frac{2}{3}x\right)dx}_{I} = e^x \cos\left(\frac{2}{3}x\right) + \frac{2}{3}e^x \sin\left(\frac{2}{3}x\right) - \frac{4}{9}\underbrace{\int e^x \cos\left(\frac{2}{3}x\right)dx}_{I}$$

$$I = e^x \cos\left(\frac{2}{3}x\right) + \frac{2}{3}e^x \sin\left(\frac{2}{3}x\right) - \frac{4}{9}I$$

$$\frac{13}{9}I = e^x \cos\left(\frac{2}{3}x\right) + \frac{2}{3}e^x \sin\left(\frac{2}{3}x\right)$$

$$\Rightarrow I = \frac{9}{13}\left[e^x \cos\left(\frac{2}{3}x\right) + \frac{2}{3}e^x \sin\left(\frac{2}{3}x\right)\right] + C$$

Całka oznaczona



W celu obliczenia pola pod wykresem funkcji stosujemy tzw. całkę oznaczoną. Dzielimy przedział $[a,b]$ na n odcinków o szerokości $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$, gdy $n \to \infty$, wtedy $\Delta x_i \to 0$.

Pole prostokąta o podstawie Δx_i i wysokości równej wartości funkcji $f(c_i)$ w środku danego przedziału c_i wynosi $f(c_i)\Delta x_i$.

Przybliżona wartość pola powierzchni pod krzywą wynosi:

$$P \simeq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

W granicy $\Delta x_i \to 0$ wartość pola staje się ścisła. Zatem całka oznaczona funkcji $f(x)$ na przedziale $[a,b]$ jest dana za pomocą granicy:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Związek między całką oznaczoną i nieoznaczoną jest dany równaniem:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Całka oznaczona posiada własności:

1°) $a \le b \le c$, wtedy $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

2°) $\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3°) $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

4°) Własność Darboux:

Gdy $f(x)$ - f. ciągła na przedziale $[a,b]$, wtedy

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a),$$

gdzie c jest pewnym punktem leżącym wewnątrz przedziału $[a,b]$.

5°) Całkowanie przez części

$$\int_a^b u v'\,dx = \underbrace{u v\Big|_a^b}_{\substack{\parallel \\ u(b)v(b)-u(a)v(a)}} - \int_a^b u' v\,dx$$

6°) Całkowanie przez podstawienie

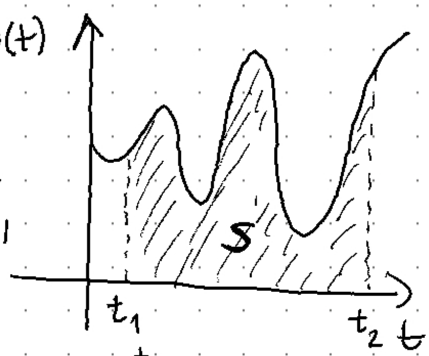
$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du\,,$$

jeżeli $g'(x)$ jest ciągła na przedziale $[a,b]$, $g(x)$ jest funkcją rosnącą na przedziale $[a,b]$, a $f(u)$ jest ciągła na przedziale $[g(a),g(b)]$.

Całki oznaczone często pojawiają się w fizyce i na kolejnych zajęciach będziemy się z nimi spotykali. Zacznijmy od podania dwóch prostych przykładów:

1°) Droga przebyta przez ciało w przedziale czasu

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$



Niech $v(t) = [20 - 5t \cdot \cos(5t)]\,\frac{m}{s}$, $t_1 = 1s$, $t_2 = 10s$. Znajdź s?

$$s = \int_{t_1}^{t_2} (20 - 5t\,\cos(5t))\,dt = 20t\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} 5t\cos(5t)\,dt =$$

$$= \left\{\begin{matrix} \text{podstawienie:} \\ u = 5t\,,\ du = 5dt \\ u_2 = 5t_2\,,\ u_1 = 5t_1 \end{matrix}\right\} = 20(t_2 - t_1) - \int_{u_1}^{u_2} u\cos u\,\frac{1}{5}\,du =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{przez części} \\ \int f dg = fg - \int g df \\ g' = \cos u \longrightarrow g = \int \cos u \, du = \sin u + \tilde{C} \\ f = u \longrightarrow f' = 1 \end{array} \right\} =$$

$$= 20(t_2 - t_1) - \frac{1}{5}\left[\left(\sin u + \tilde{C}\right) u \Big|_{u_1}^{u_2} - \int_{u_1}^{u_2} (\sin u + \tilde{C}) du \right] =$$

$$= 20(t_2 - t_1) - \frac{1}{5}\left[u \sin u \Big|_{u_1}^{u_2} + \cancel{\tilde{C} u}\Big|_{u_1}^{u_2} - \cancel{\tilde{C} u}\Big|_{u_1}^{u_2} + \cos u \Big|_{u_1}^{u_2} \right] =$$

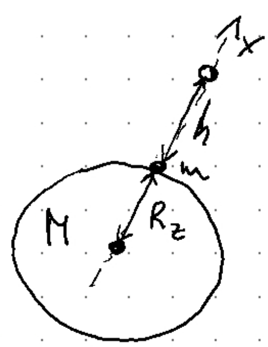
$$= 20(t_2 - t_1) - \frac{1}{5}\left[5t_2 \sin 5t_2 + \cos 5t_2 - 5t_1 \sin 5t_1 - \cos 5t_1 \right] =$$

$$= 181{,}53 \text{ m}$$

2°) Praca wykonana przy przesuwaniu ciała wzdłuż prostej

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) \, dx$$

Obliczmy jaką pracę należy wykonać, aby ciało o masie m podnieść z powierzchni Ziemi na wysokość h.



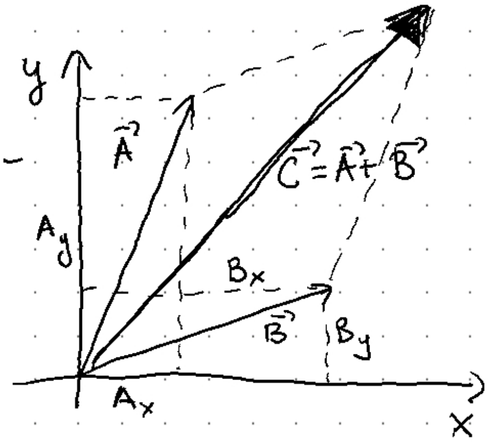
$$F(x) = \frac{GmM}{(R_z + x)^2}$$

$$W = \int_0^h \frac{GmM}{(R_z + x)^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{podstawienie:} \\ y = R_z + x \\ dy = dx \end{array} \right\} =$$

$$W = \int_{R_z}^{R_z+h} \frac{GMm}{y^2}\,dy = -\frac{GmM}{y}\Big|_{R_z}^{R_z+h} = GmM\left(\frac{1}{R_z} - \frac{1}{R_z+h}\right)$$

UZUPEŁNIAJĄCE INFORMACJE O WEKTORACH

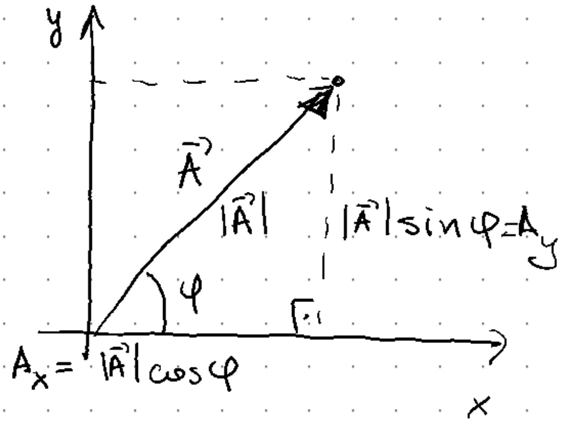
Wektory w przestrzeni trójwymiarowej są charakteryzowane przez podanie ich długości, kierunku i zwrotu.



Wektory możemy zapisać za pomocą współrzędnych

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z),$$

gdzie A_x jest długością rzutu wektora na oś X.

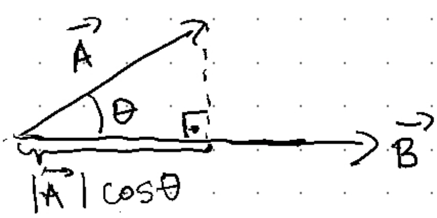


- Suma dwóch wektorów jest dana przez:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x,\ A_y + B_y,\ A_z + B_z)$$

- Iloczyn skalarny dwóch wektorów jest dany równaniem

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \sum_{i=x,y,z} A_i B_i = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cos\angle(\vec{A},\vec{B})$$

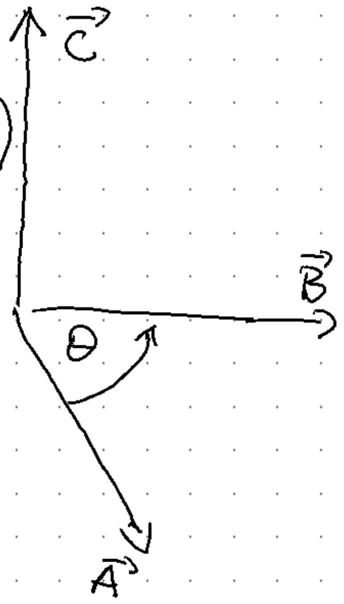


Iloczyn skalarny pozwala na zapisanie długości wektora za pomocą współrzędnych:

$$|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

- Iloczyn wektorowy

dany jest równaniem



$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - B_y A_x)$$

$$|\vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \sin\Theta$$

Iloczyn wektorowy jest równy zero, gdy wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$ są równoległe.

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$ jest równy zero, gdy te wektory są prostopadłe.

Wersor to jednostkowy wektor wskazujący dany kierunek. Przez jednostkowy rozumiemy, że jego długość jest równa 1, np. wersor wskazujący kierunek X ma postać:

$$\hat{x} = [1, 0, 0]$$

- Dygresja dla tych z Was znających macierze:

– iloczyn wektorowy można zapisać przy pomocy wyznacznika macierzy 3×3.

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{x}\left(A_y B_z - B_y A_z\right) + \hat{y}\left(A_z B_x - A_x B_z\right) +$$

$$- \hat{z}\left(A_x B_y - A_y B_x\right) = \left\{ \begin{array}{l} \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \text{ są} \\ \text{wersorami wzdłuż} \\ \text{osi współrzędnych} \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(A_x B_z - B_y A_z\right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(A_z B_x - A_x B_z\right) +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left(A_x B_y - A_y B_x\right) = \begin{bmatrix} A_x B_z - B_y A_z \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix}$$