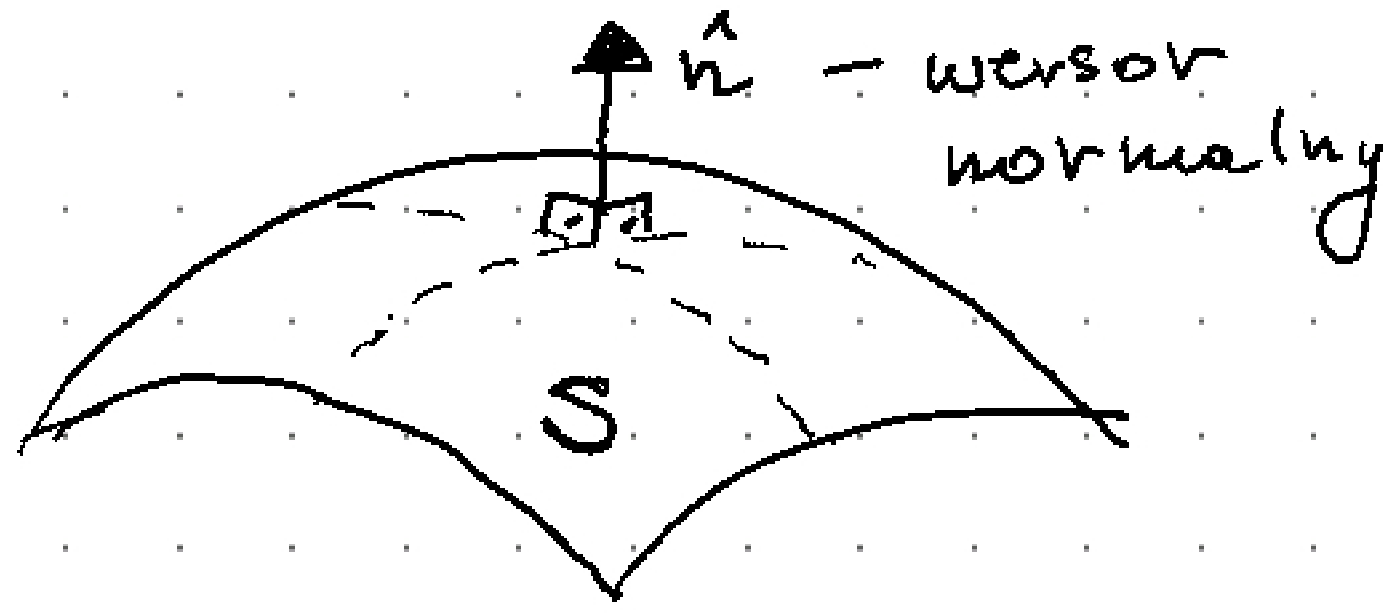
ELEKTROSTATYKA. PRAWO GAUSSA, PRZEWODNIKI I DIELEKTRYKI

3.01.2020

Prawo Gaussa

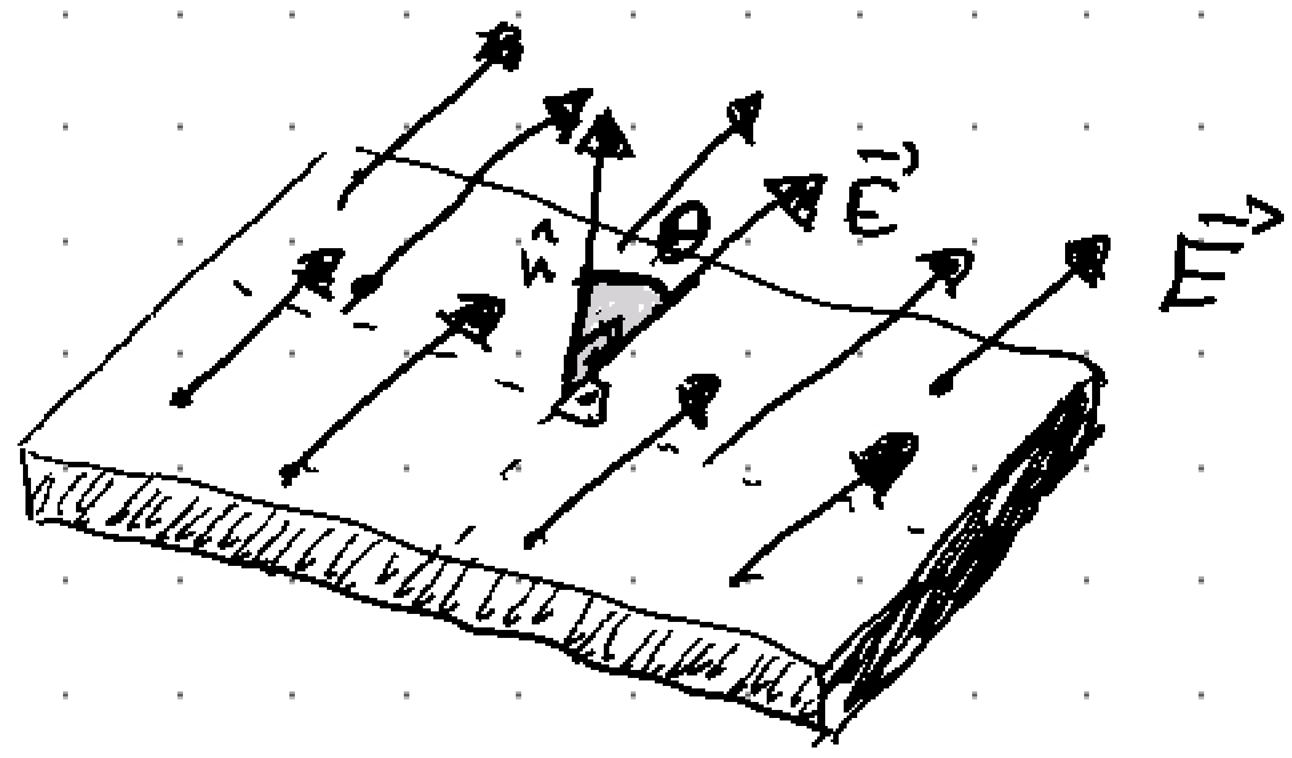
- Strumień pola elektrycznego $\vec{E}$

Definiujemy wektor $\vec{S} = S\hat{n}$, którego wartość jest polem powierzchni, a wersor $\hat{n}$ jest prostopadły do powierzchni i skierowany na zewnątrz tej powierzchni.



Strumień pola elektrycznego $\vec{E}$ przez powierzchnię definiujemy jako

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{S} = ES\cos\theta ,$$



gdy

$$\vec{S} \perp \vec{E} \Rightarrow \Phi_E = 0,$$

$$\vec{S} \parallel \vec{E} \Rightarrow \Phi_E = ES.$$

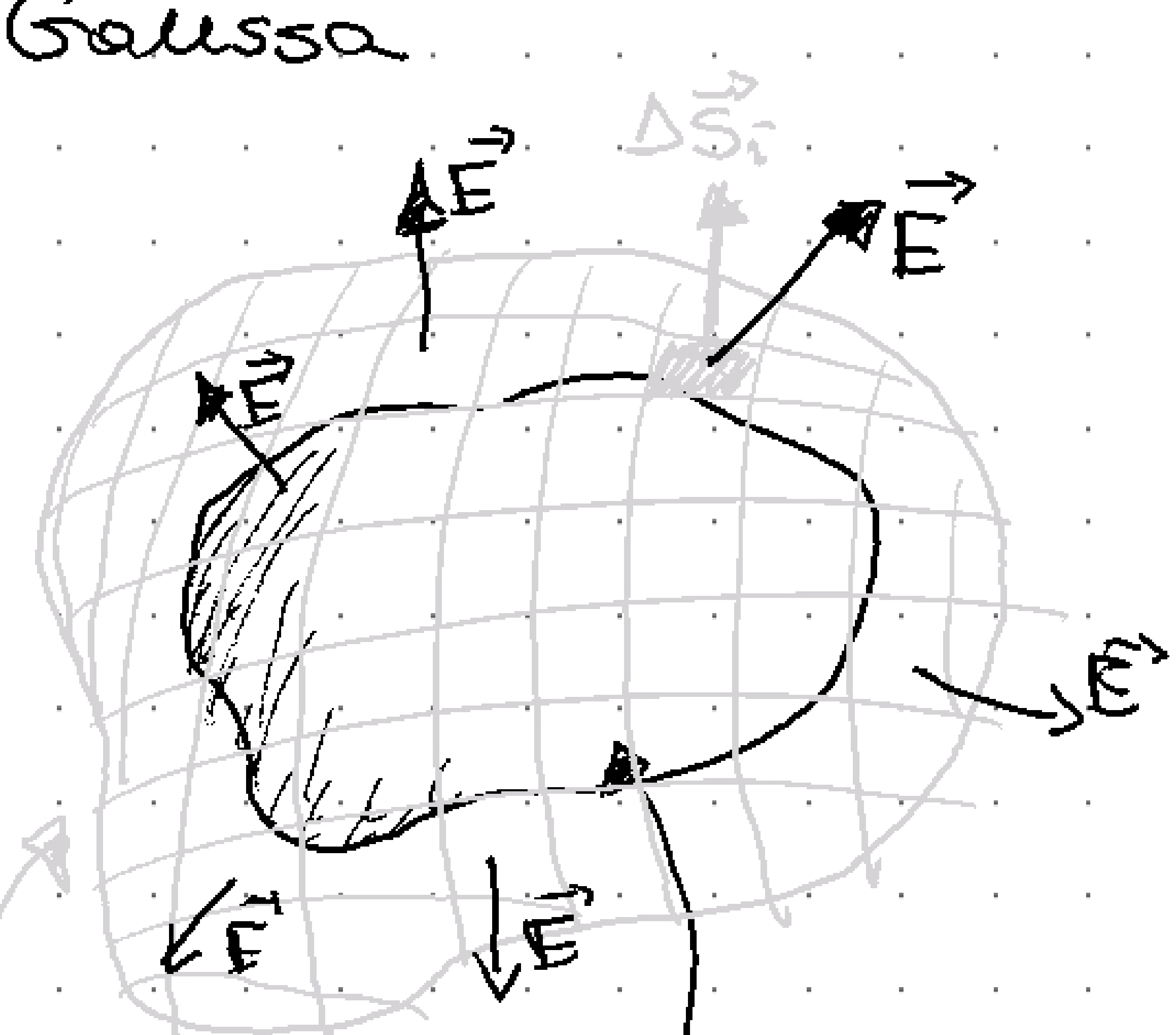
- Sformułowanie prawa Gaussa

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

strumień pola elektrycznego przez zamkniętą powierzchnię – powierzchnię Gaussa

$$\Phi_E = \frac{Q_{wew.}}{\varepsilon_0}$$

ładunek zamknięty wewnątrz powierzchni Gaussa



Jeżeli nasz problem ma wysoką symetrię, wtedy można łatwo wykonać całki występujące w równaniu na Φ_E.

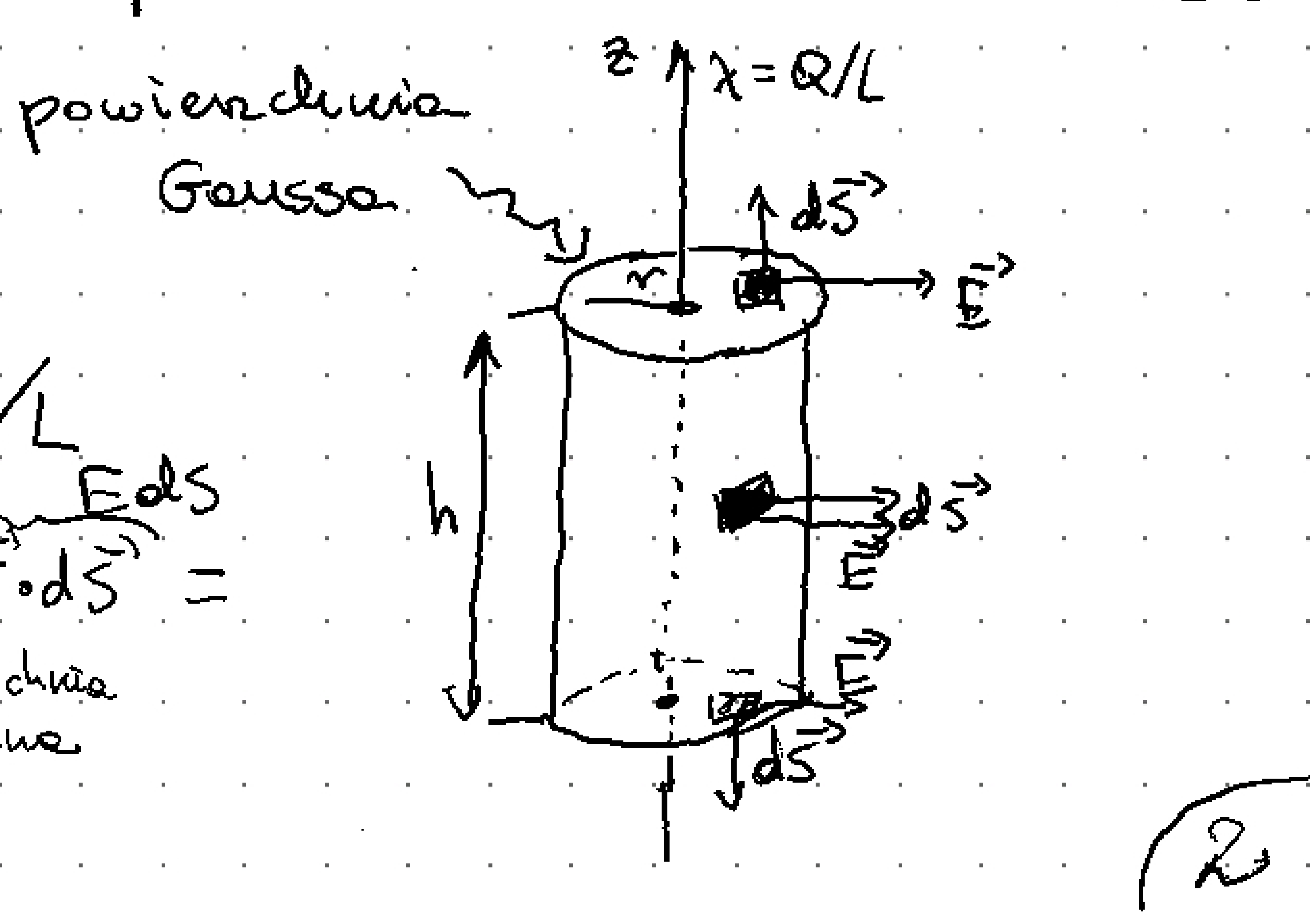
Symetria	Układ	Powierzchnia Gaussa, którą wygodnie wybrać
Sferyczna	• Kula wykonana z izolatora • Powłoka sferyczna wykonana z przewodnika • Ładunek punktowy	Koncentryczna sfera
Osiowa	• walec wykonany z izolatora, • powłoka walcowa wykonana z przewodnika • nieskończona linia	współosiowy cylinder
Płaska	• nieskończona płyta • płyta o pewnej grubości wykonana z izolatora	Pudełko o denkach równoległych do płyty.

Przykłady:

1°) Nieskończony drut

Liniowa gęstość ładunku: $\lambda = Q/L$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \underbrace{\int_{\text{denko górne}} \vec{E}\cdot d\vec{S}}_{=0} + \underbrace{\int_{\text{denko dolne}} \vec{E}\cdot d\vec{S}}_{=0} + \int_{\text{powierzchnia boczna}} \overbrace{\vec{E}\cdot d\vec{S}}^{E\,dS} =$$

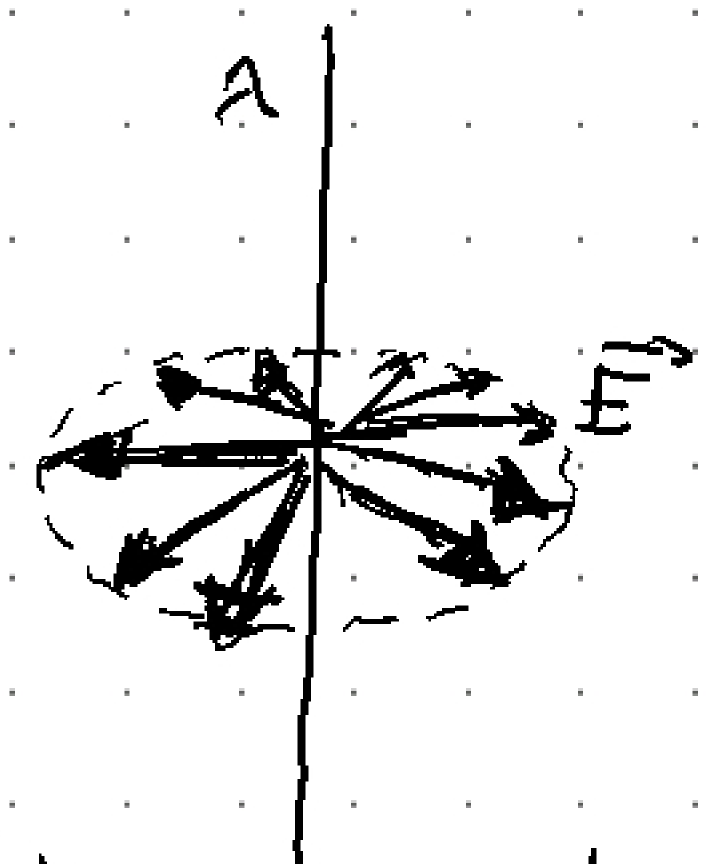


$$= E\int dS = E(2\pi h r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\underbrace{(\lambda \cdot h)}_{Q_{wew.}} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} =$$

powierzchnia boczna

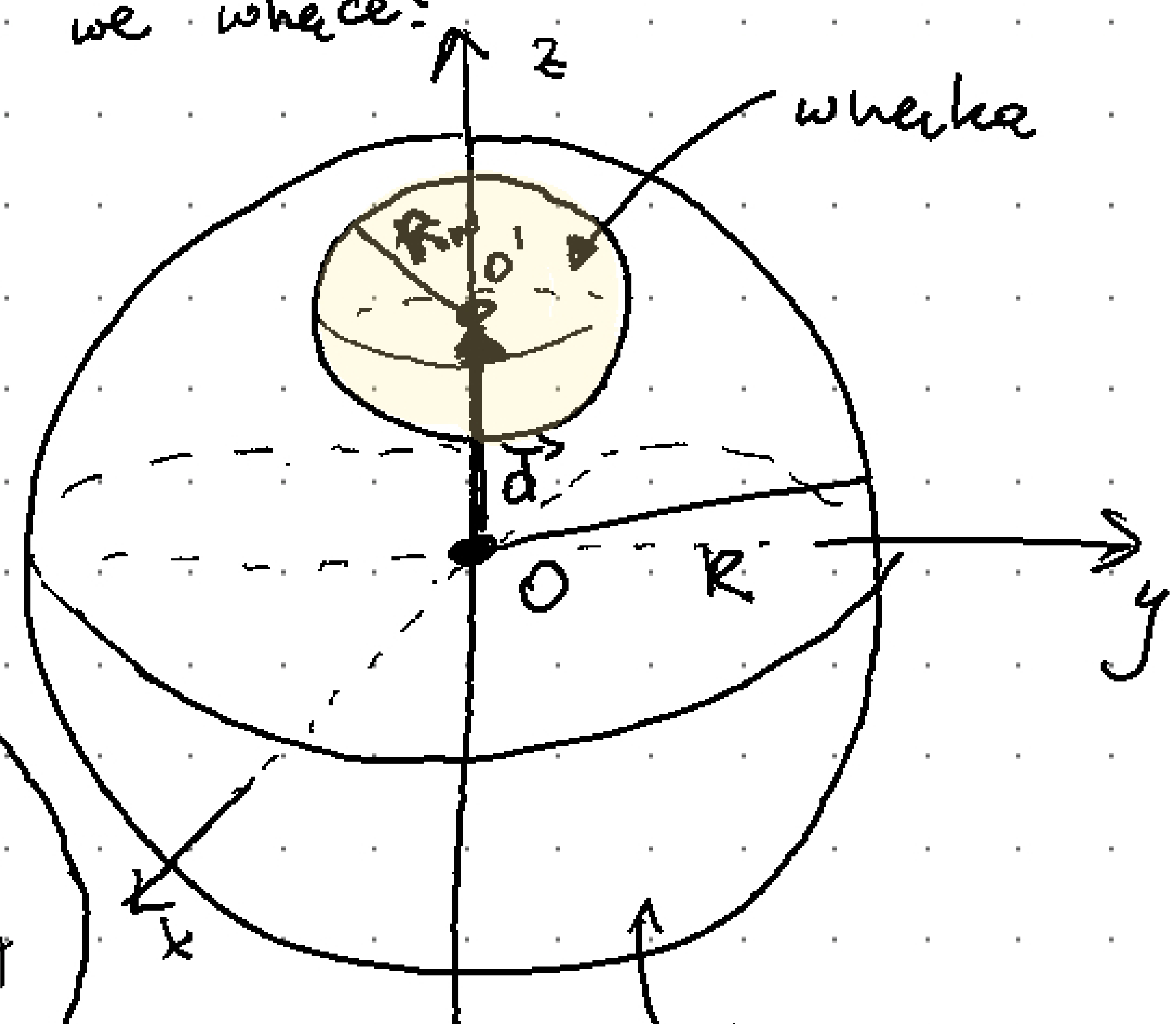
$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L r}$$

problem jest osiowosymetryczny, więc E zależy tylko od odległości w płaszczyźnie xy od drutu. Dla tak wybranego konturu $E = const$ na jego powierzchni



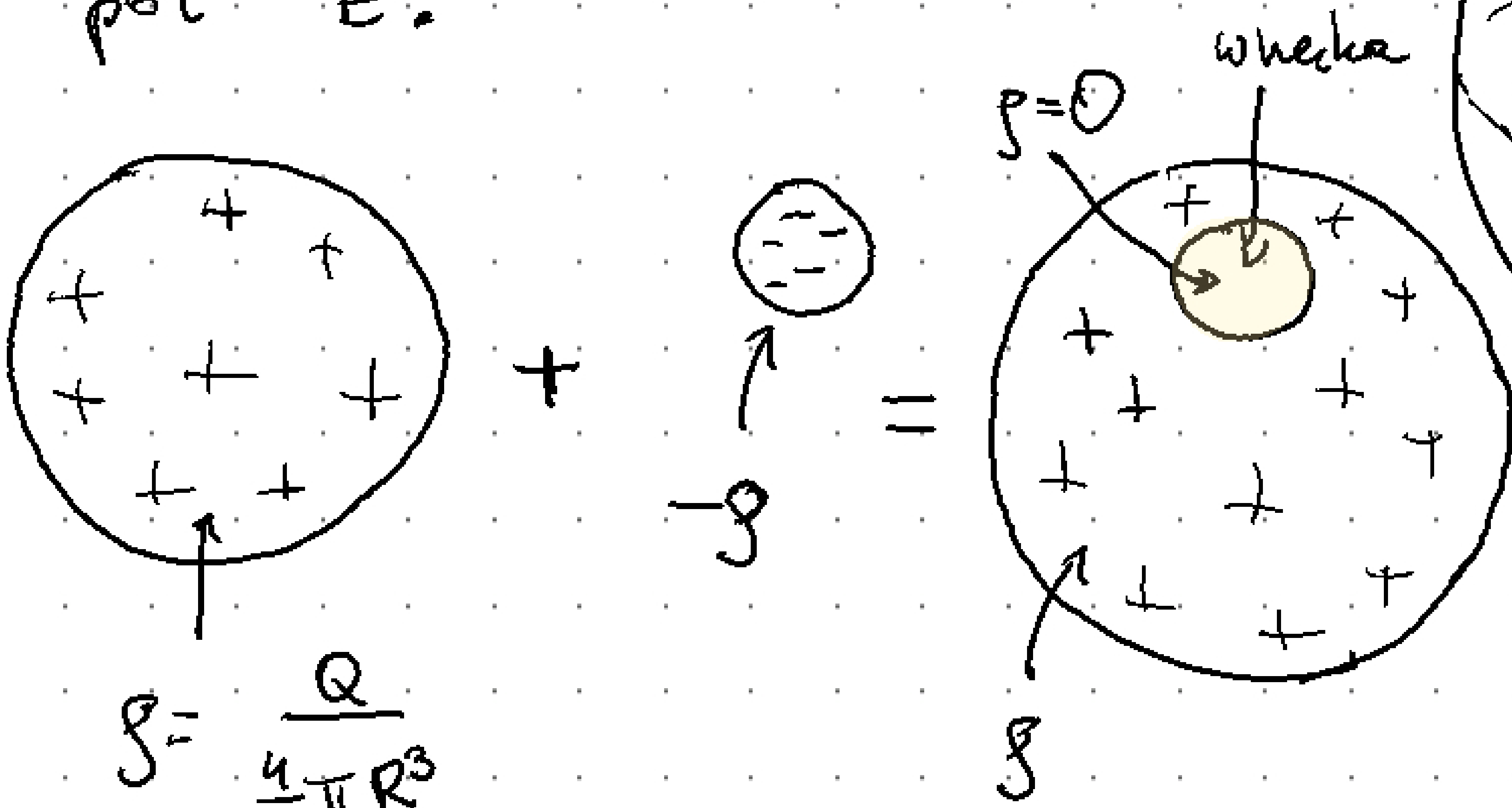
2°) Naładowana kula wykonana z izolatora z wnęką wewnątrz. Jakie jest pole we wnęce?

W zadaniu tym zastosujemy zasadę superpozycji dla pól $\vec{E}$:

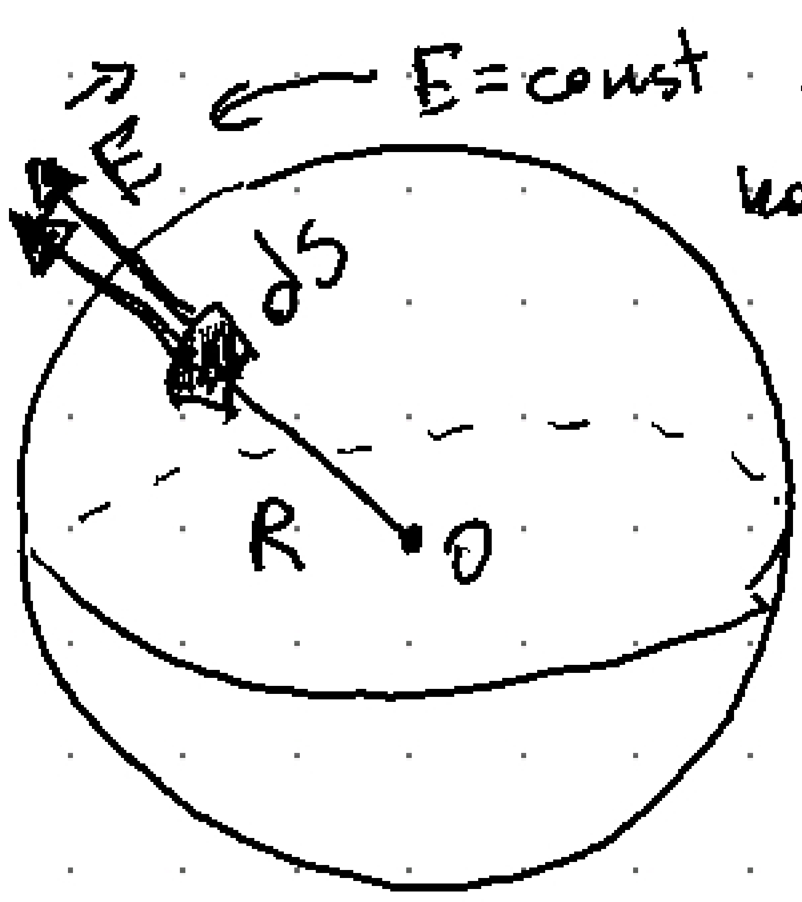


jednorodnie ładunkiem o gęstości objętościowej

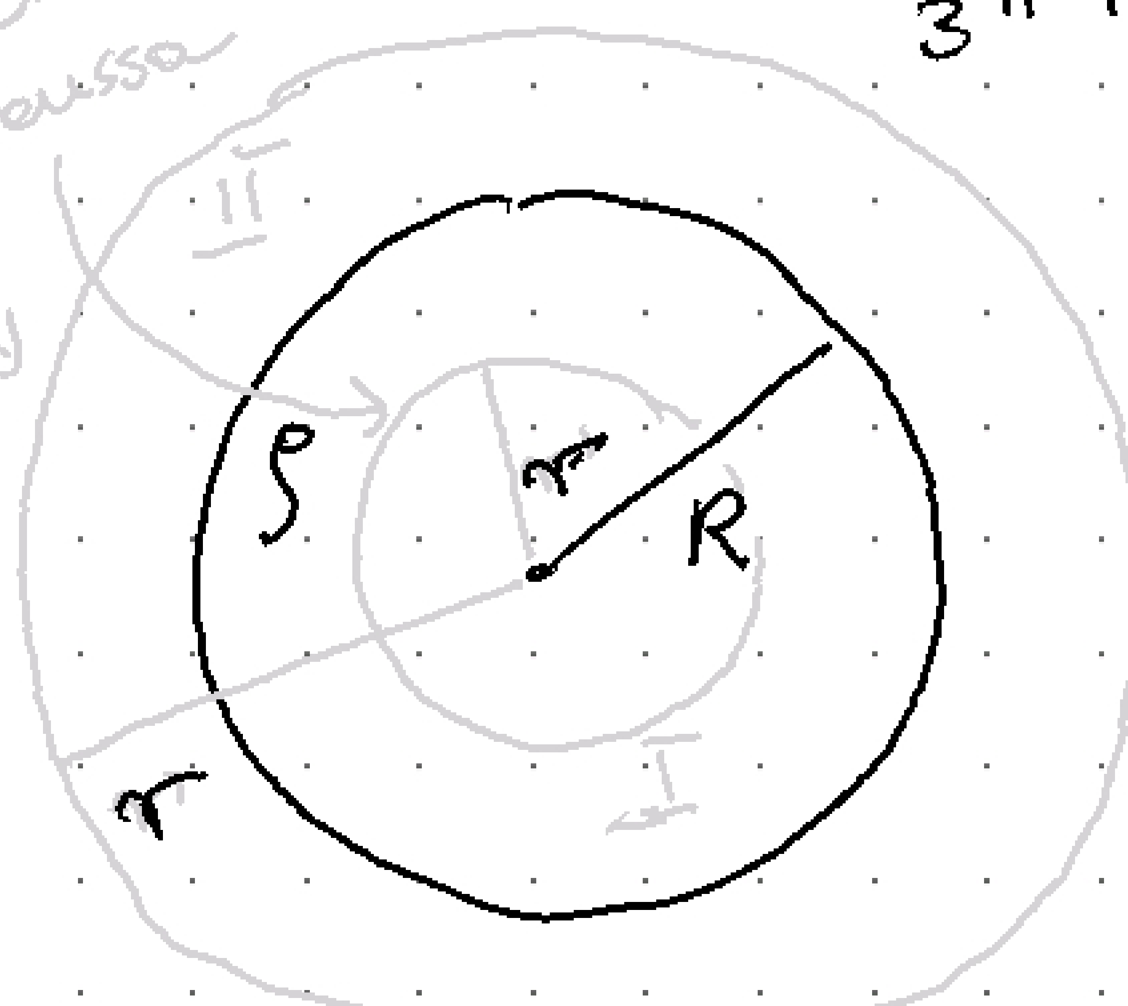
$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$



Liczymy pole elektryczne pochodzące od kuli:

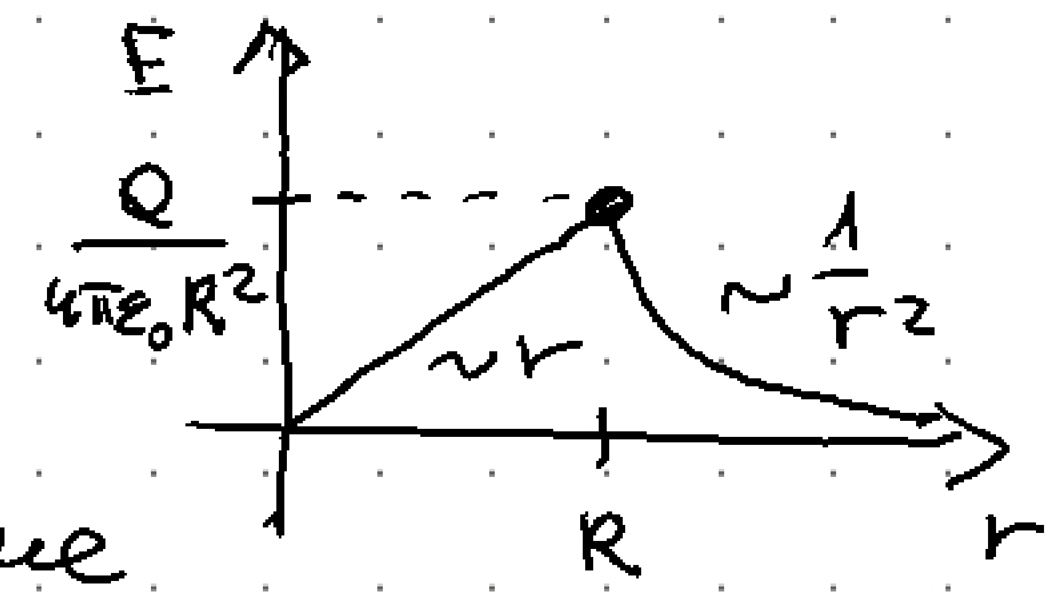


$E = const$ na koncentrycznych powłokach sferycznych



$$\oint_{\text{kula}} \vec{E}\cdot d\vec{S} \underset{\vec{E}\parallel d\vec{S}}{=} E \oint_{\text{kula}} dS = 4\pi r^2 E = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_0}\underbrace{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}_{Q_{wew.}}, & r<R \quad (\mathrm{I}) \\ \frac{1}{\varepsilon_0}\underbrace{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3}_{Q_{wew.}}, & r\geq R \quad (\mathrm{II}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad E = \begin{cases} \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r, & r<R \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r\geq R \end{cases}$$



Pole elektryczne jest skierowane radialnie, czyli

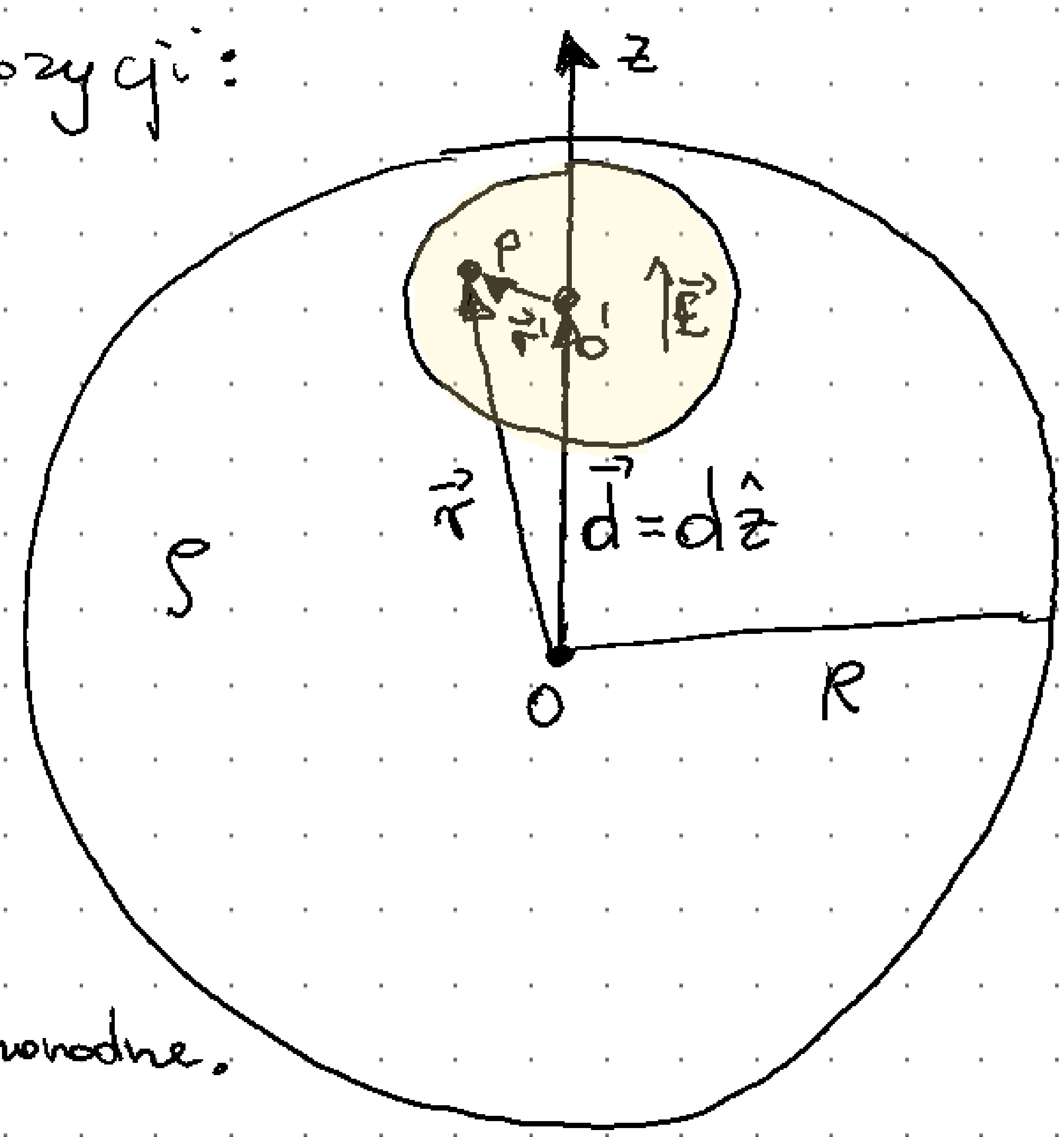
$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}, \quad r<R. \qquad (\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})$$

Stosujemy zasadę superpozycji:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}\,' =$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r} - \vec{d}) =$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{d} = \frac{\rho d}{3\varepsilon_0}\hat{z}$$



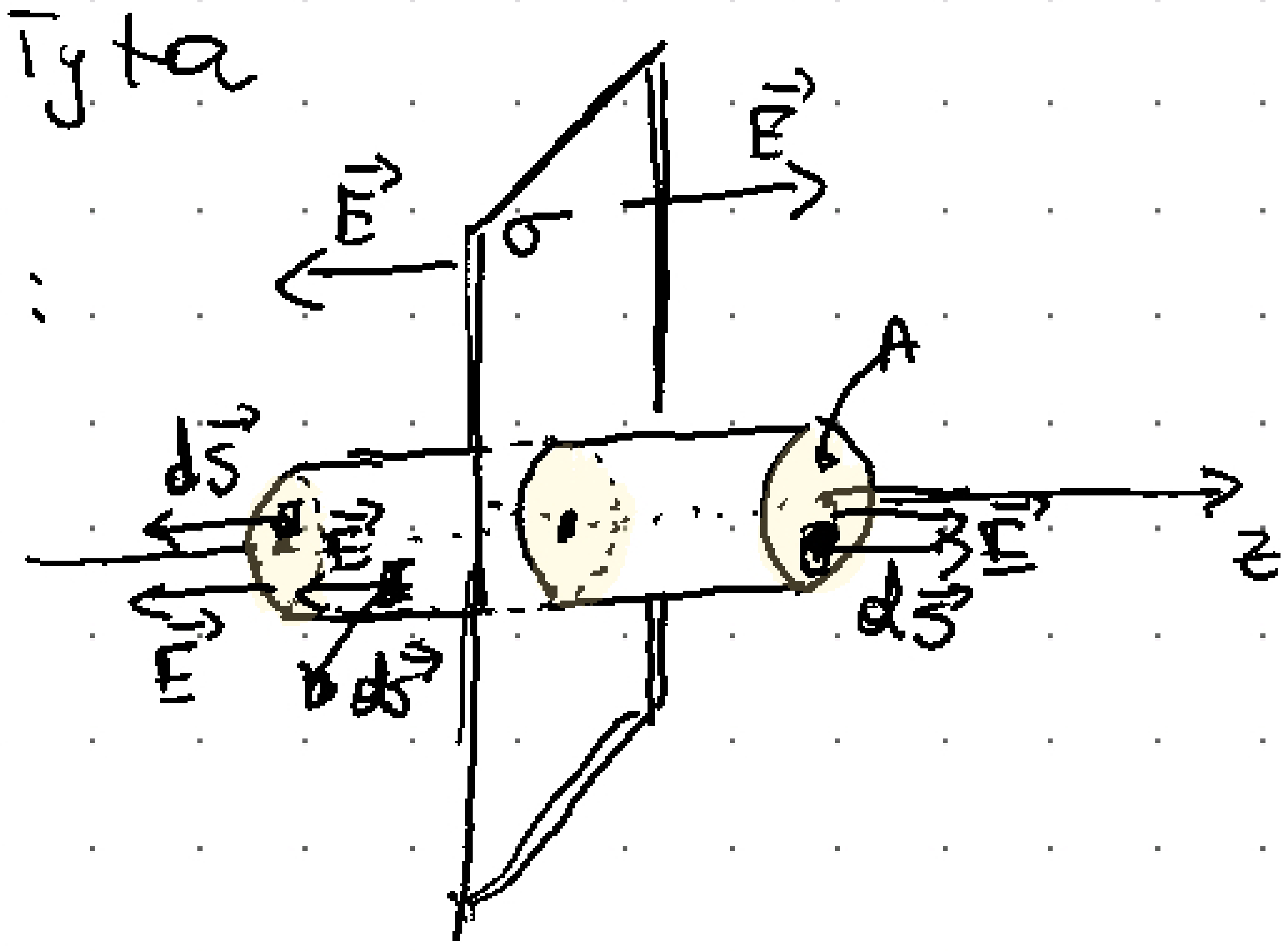
Pole wewnątrz wnęki jest jednorodne.

3°) Jednorodnie naładowana płyta

Powierzchniowa gęstość ładunku:

$$\sigma = Q/S$$

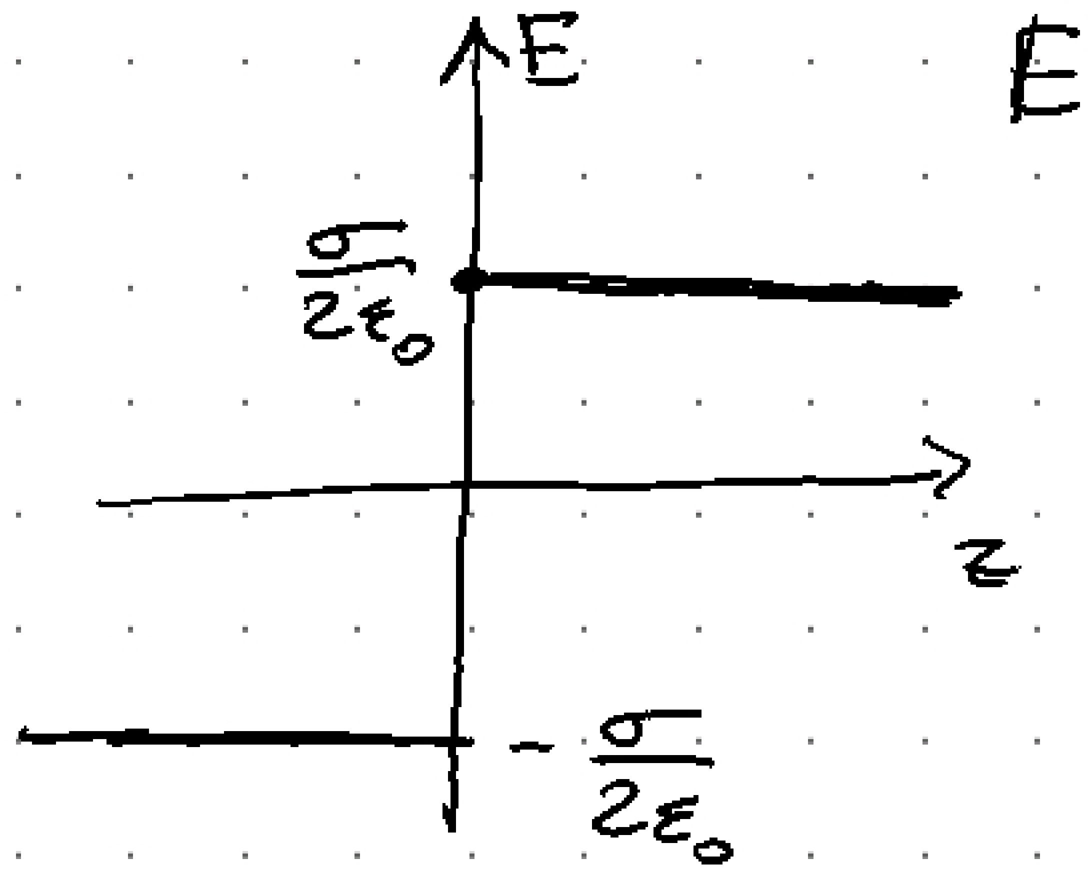
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{\text{denka}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \underbrace{\int_{\text{pow. boczna}} \vec{E}\cdot d\vec{S}}_{0} =$$



$$= 2\int_{\text{denko}} E\, dS = 2E\int dS = 2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

z symetrii wynika, że na denku $\vec{E}$ jest stałe

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}$$



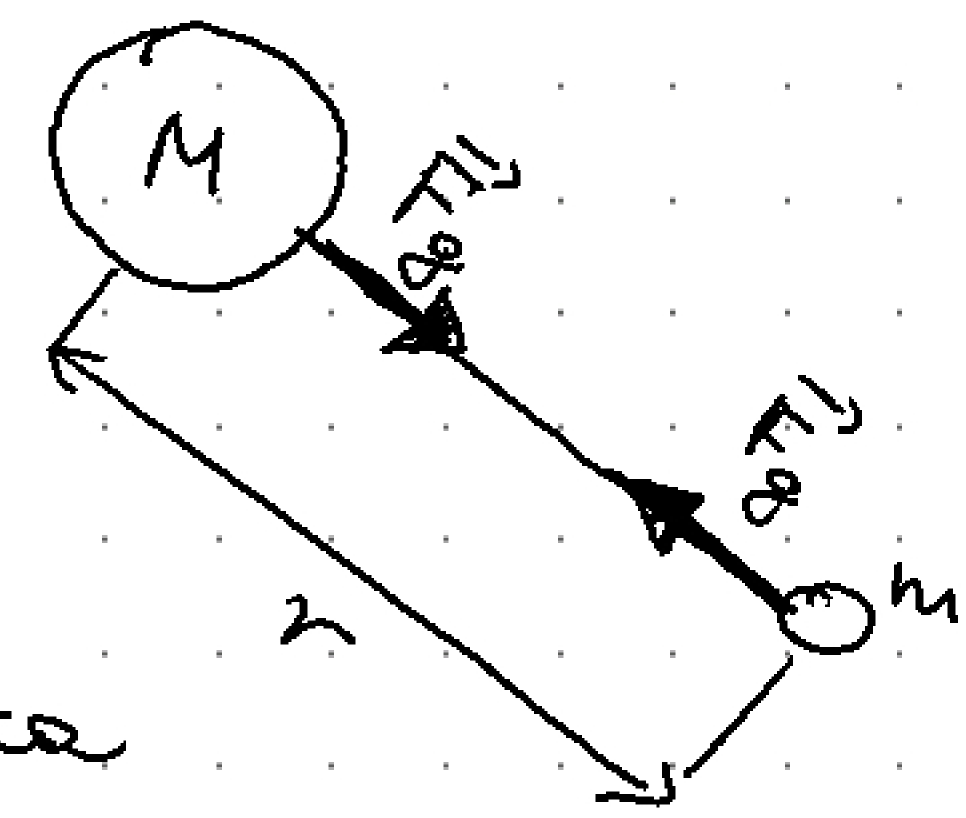
Wartość pola $\vec{E}$ doznaje skoku na płycie.

Prawo Gaussa dla grawitacji

Prawo powszechnego ciążenia:

$$\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

grawitacja jest zawsze przyciągająca



$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}_g}{m}$$

m ← masa próbna

natężenie pola grawitacyjnego

Prawo Gaussa dla grawitacji:

$$\Phi_G = \oint_S \vec{\gamma}\cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{wew.}$$

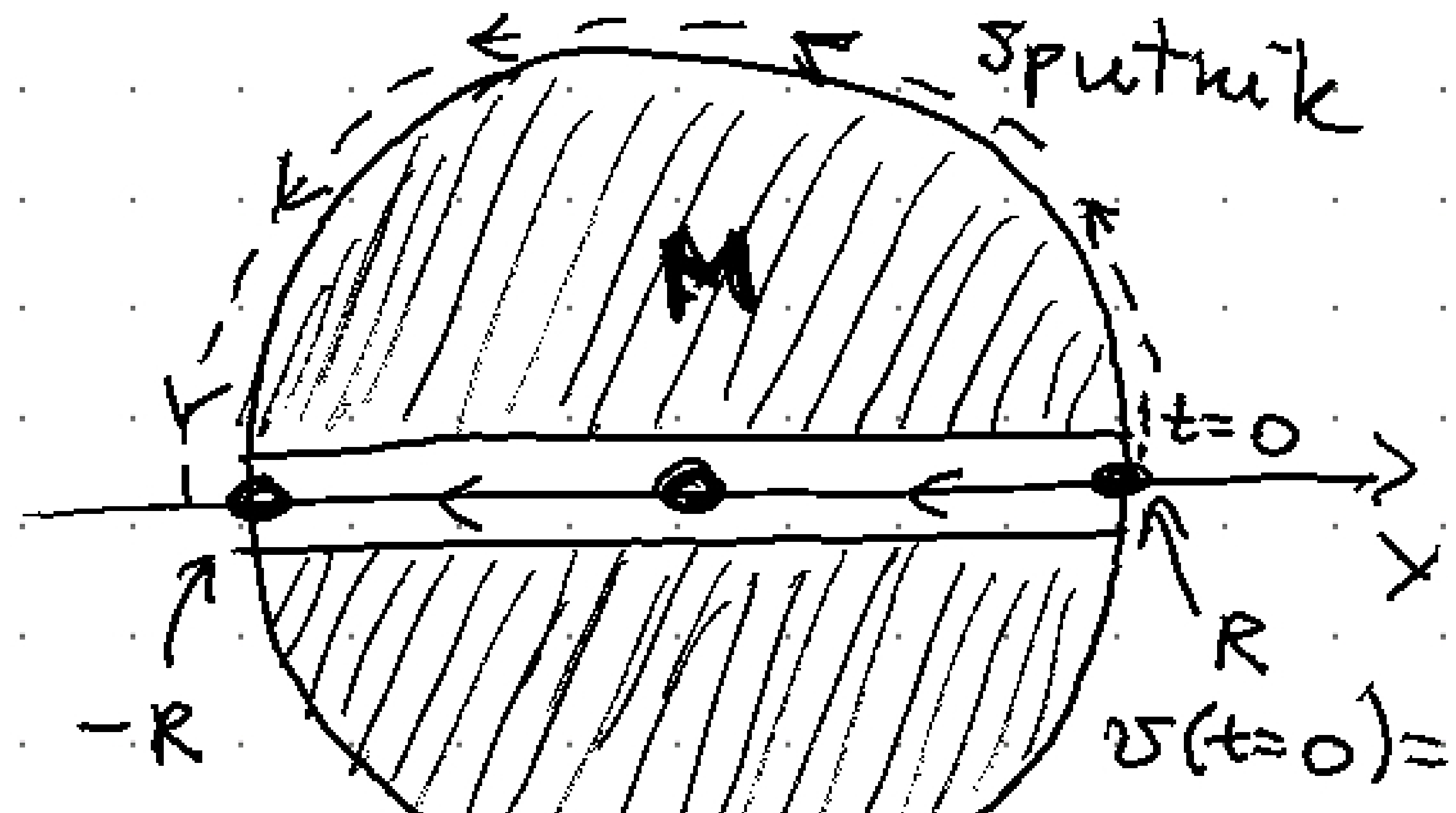
strumień pola grawitacyjnego przez powierzchnię zamkniętą

masa ograniczona powierzchnią Gaussa

Przykład:

Opisać ruch ciała w tunelu przechodzącym przez środek Ziemi i porównać go z ruchem sputnika krążącego nad powierzchnią Ziemi ($h \ll R$) po orbicie kołowej. Założyć, że Ziemia jest jednorodna.

Stosujemy prawo Gaussa:

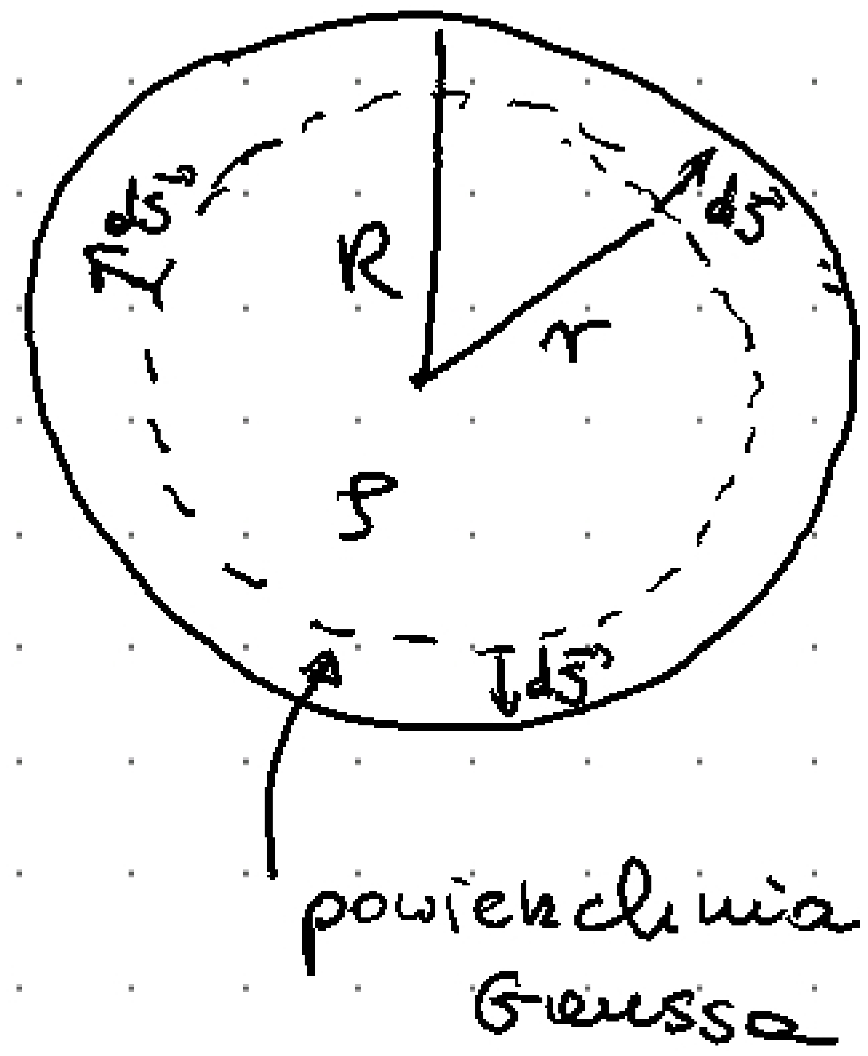


$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$
↑ gęstość

$$\oint_S \vec{\gamma}\cdot d\vec{S} = \gamma \oint_{\text{sfera}} dS = \gamma\, 4\pi r^2 =$$

↑ $\vec{\gamma} \parallel d\vec{S}$, $\gamma = \text{const}$ dla danego r

$$= -4\pi G M_{wew} = -4\pi G \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$



$$\Rightarrow \quad \gamma = -\frac{4\pi}{3} G \rho r$$

W naszym przypadku r leży wzdłuż $\vec{x}$:

$$\vec{\gamma} = -\frac{4\pi}{3} G \rho \vec{x} = -\frac{GM}{R^3}\vec{x}$$

$$\rho = \left(\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right)$$

Siła wypadkowa: $\vec{F}_{wyp} = -\frac{GMm}{R^3}\vec{x}$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{GM}{R^3}x = 0$$ równanie oscylatora harmonicznego

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$, co więcej

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \delta)$$
↑ ruch drgający

Warunki początkowe:

$$x(0) = R = A\cos\delta$$

$$v(t=0) = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 \cdot 0 + \delta) = -A\omega_0 \sin\delta = 0$$

$$\Rightarrow \delta = 0$$

czyli $A = R$, więc $x(t) = R\cos\left(\sqrt{\frac{GM}{R^3}}\,t\right)$

Zakładając brak innych sił okres ruchu wynosi:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Czas lotu z $x = R$ do $x = -R$ wynosi

$$t_c = \frac{1}{2}T = \pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Ruch sputnika po orbicie kołowej o promieniu R możemy opisać równaniem:

$$F_{dośr} = \frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = const$$

Czas lotu od $x = R$ do $x = -R$ wynosi

$$t_s = \frac{\pi R}{v} = \pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} = t_c$$

Rzut ruchu po okręgu na wybraną oś jest ruchem harmonicznym stąd mamy $t_c = t_s$.

■ Własności przewodników

1°) Ładunki wewnątrz przewodników mogą poruszać się w swobodny sposób.

2°) Pole elektryczne $\vec{E} = 0$ wewnątrz przewodnika.

- Pod wpływem zewnętrznego pola $\vec{E}_{zew.}$ elektrony tak długo przegrupowują się aż wytworzony rozkład ładunków znosi wewnątrz zewnętrzne pole elektryczne.

3°) Nadmiarowe ładunki gromadzą się na powierzchni przewodnika.

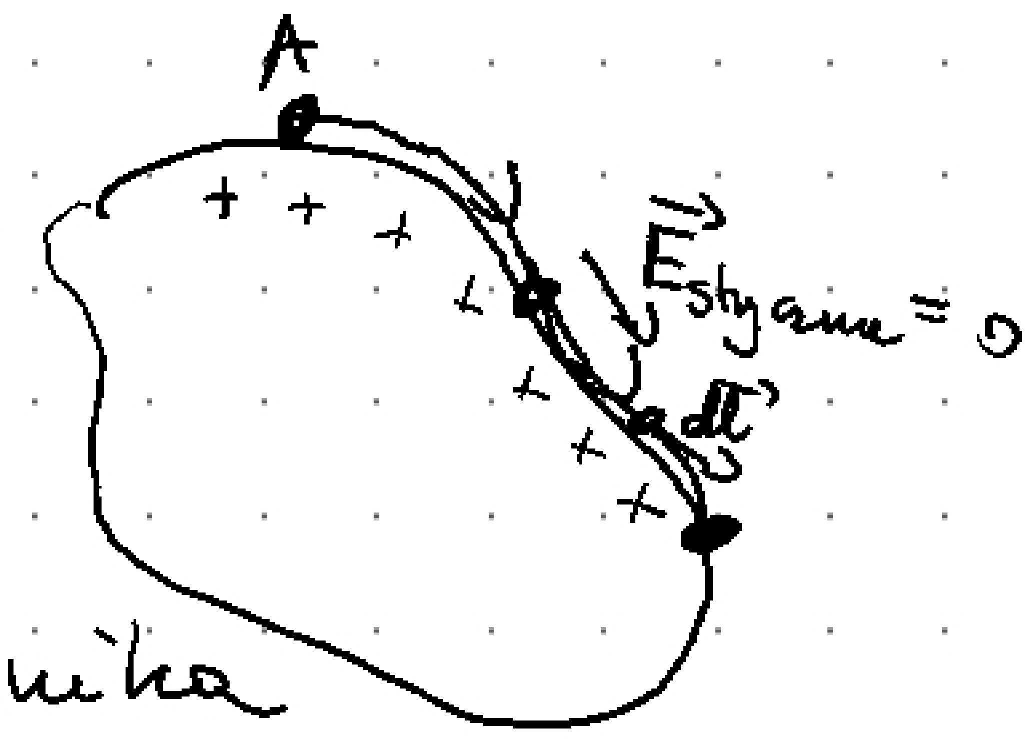
- Wynika to z prawa Gaussa, ponieważ $\vec{E}=0$ wewnątrz, więc także ładunek jest wewnątrz równy zero.

4°) Składowa styczna pola elektrycznego $\vec{E}_{styczna}$ do powierzchni przewodnika jest równa zeru na jego powierzchni.

$$\vec{E}_{styczne}\Big|_{\text{na powierzchni przewodnika}} = 0$$

Napięcie jest dane relacją: $U = \left| \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} \right|$

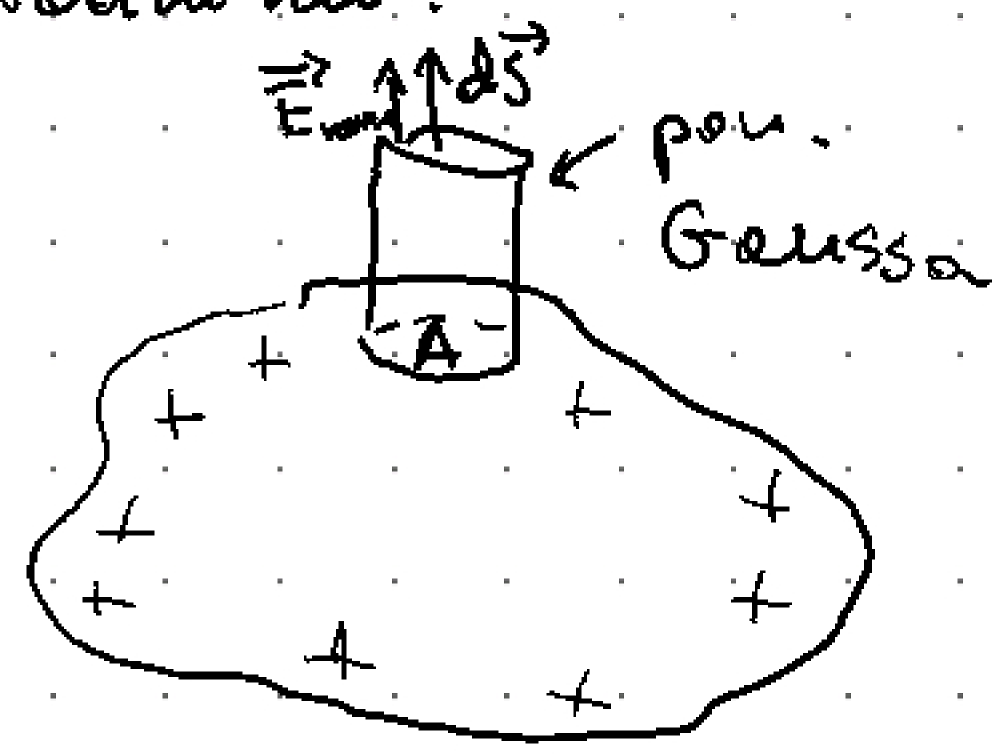
$$U = \left| \int_A^B \underbrace{\vec{E}_{styczne}}_{=0}\cdot d\vec{l} \right| = 0 \Rightarrow \varphi(A) = \varphi(B)$$



Implikuje to, że powierzchnia przewodnika jest powierzchnią ekwipotencjalną.

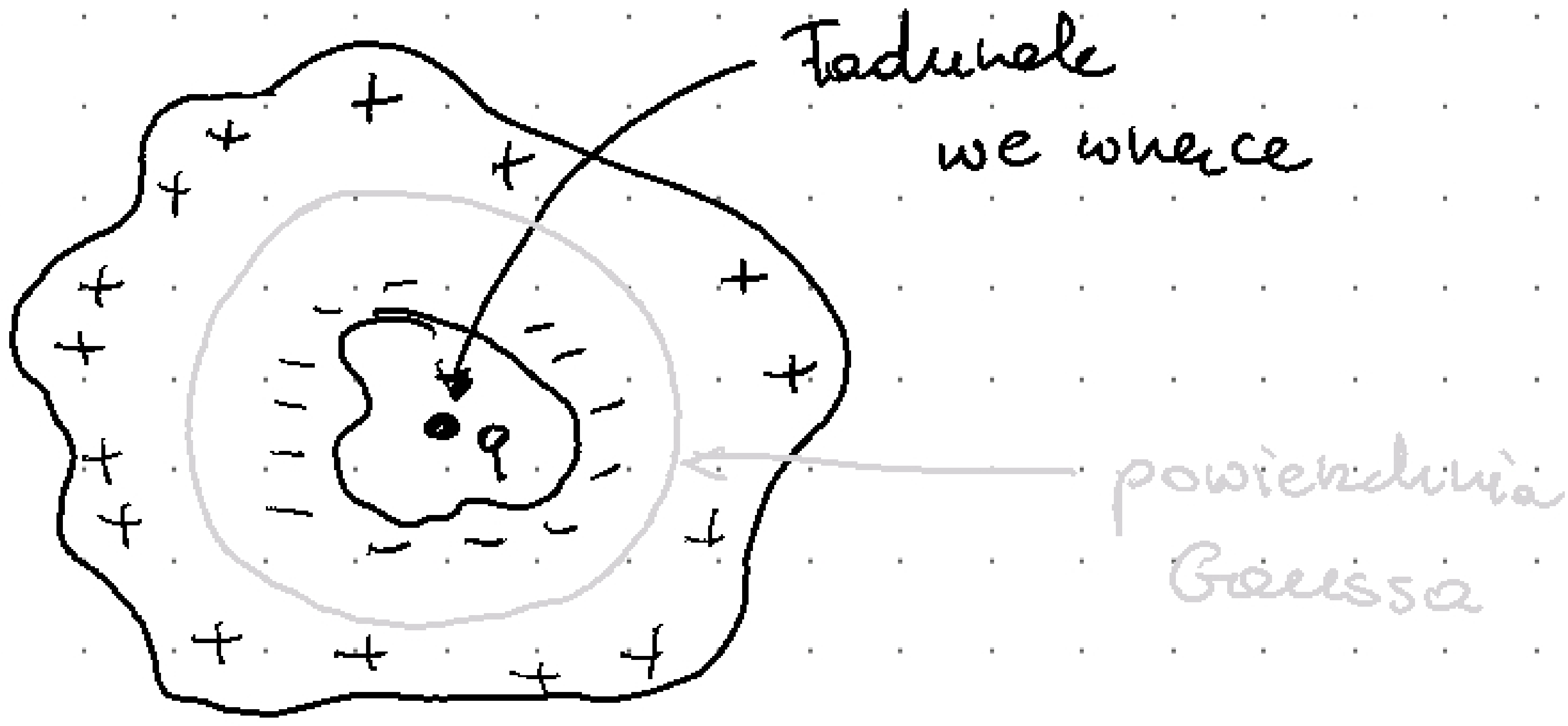
5°) Składowa normalna pola elektrycznego $\vec{E}_{normalna}$ przy powierzchni przewodnika jest związana z ładunkiem powierzchniowym na przewodniku:

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E_{normalna} A + 0\cdot A = $$
$$= \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$
$$\Rightarrow E_{normalna} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



Przykłady:

1°) ładunek punktowy we wnęce wewnątrz przewodnika

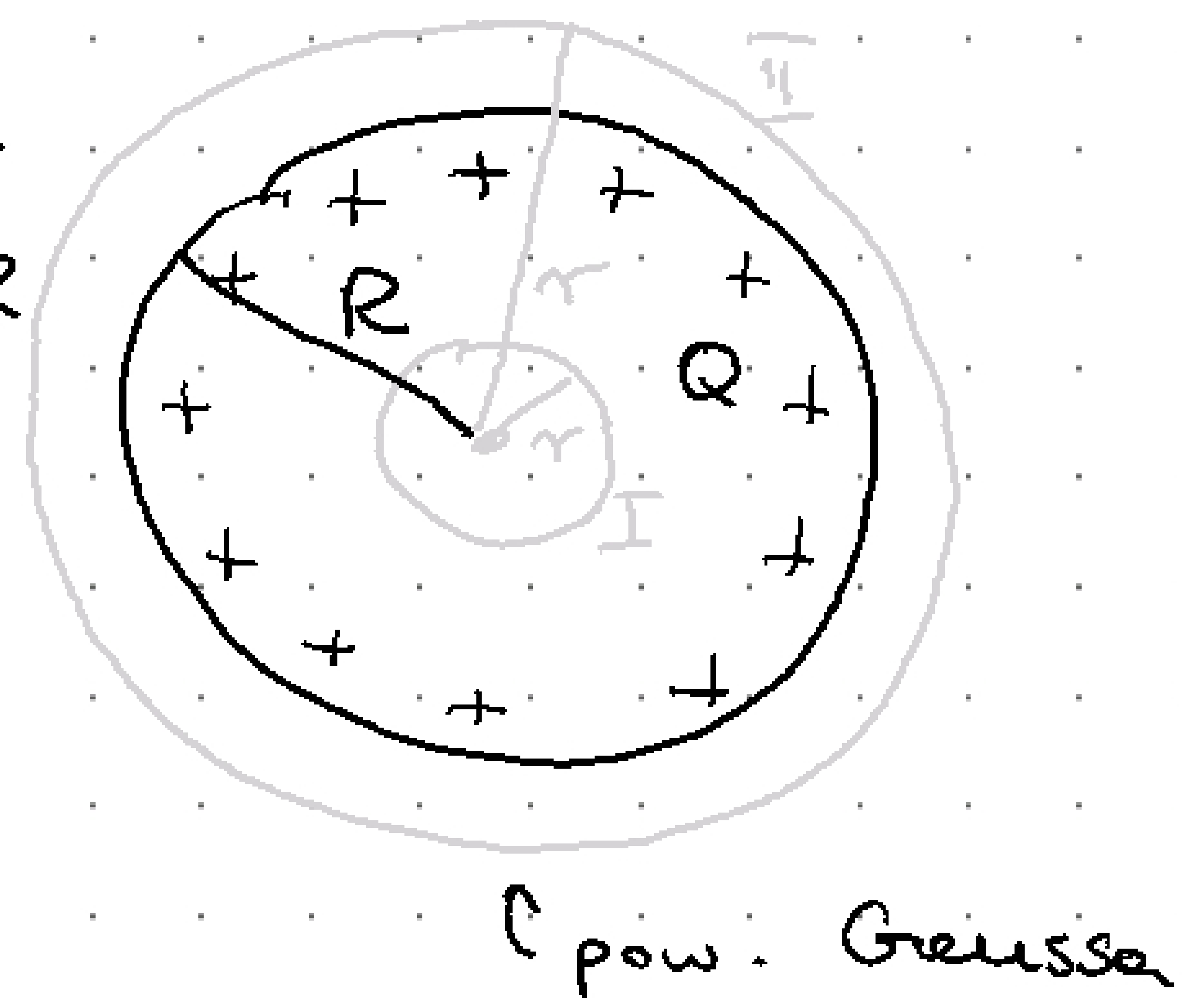


Wokół wnęki gromadzi się ładunek w taki sposób by zniwelować wpływ ładunku we wnęce.

Taki proces nazywa się ekranowaniem. Wokół wnęki gromadzi się ładunek $-q$.

2°) Potencjał wewnątrz przewodnika sferycznego

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E = \begin{cases} 0, & r<R \\ Q/\varepsilon_0, & r\geq R \end{cases}$$



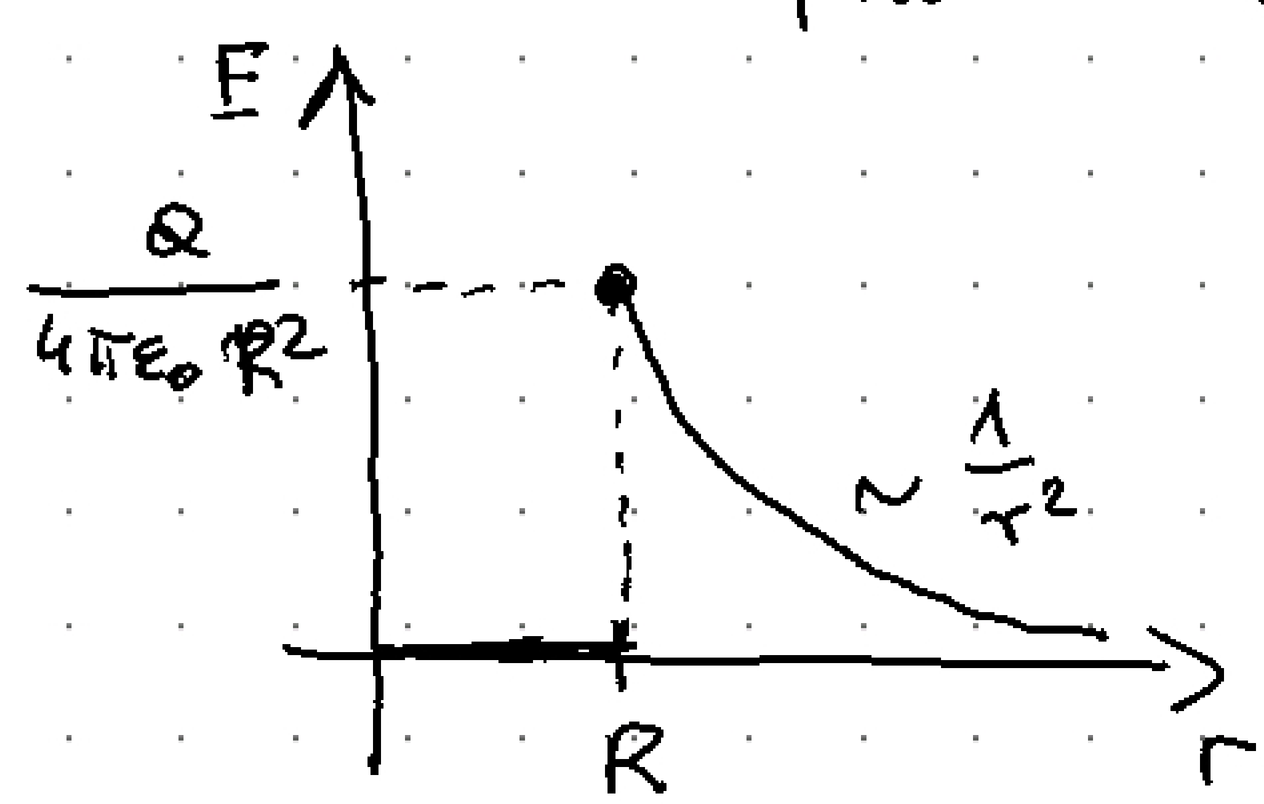
$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}, & r\geq R \\ 0, & r<R \end{cases}$$

Potencjał dla $r \geq R$:

$$\varphi(r) - \varphi(\infty) = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{r} =$$

$$= -\int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\,dr' =$$

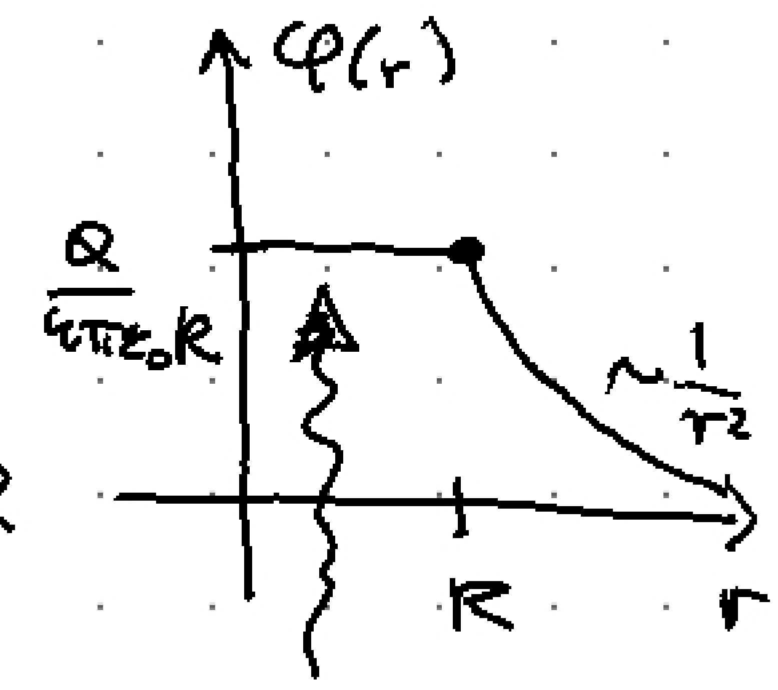
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{dla } r\geq R$$



Potencjał dla $r<R$:

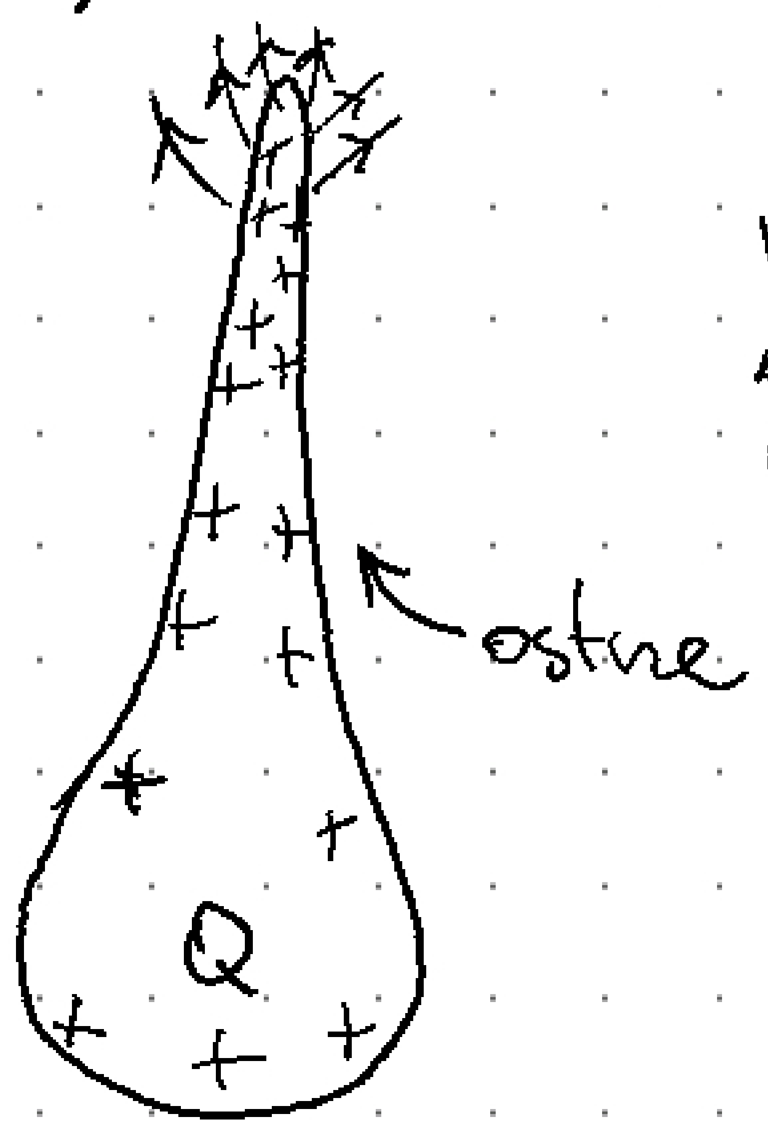
$$\varphi(r)-\varphi(\infty) = -\int_{\infty}^{R} E(r \geq R)\,dr - \int_{R}^{r} \underbrace{E(r<R)}_{0}\,dr =$$

$$= -\int_{\infty}^{R} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad \text{dla } r<R$$

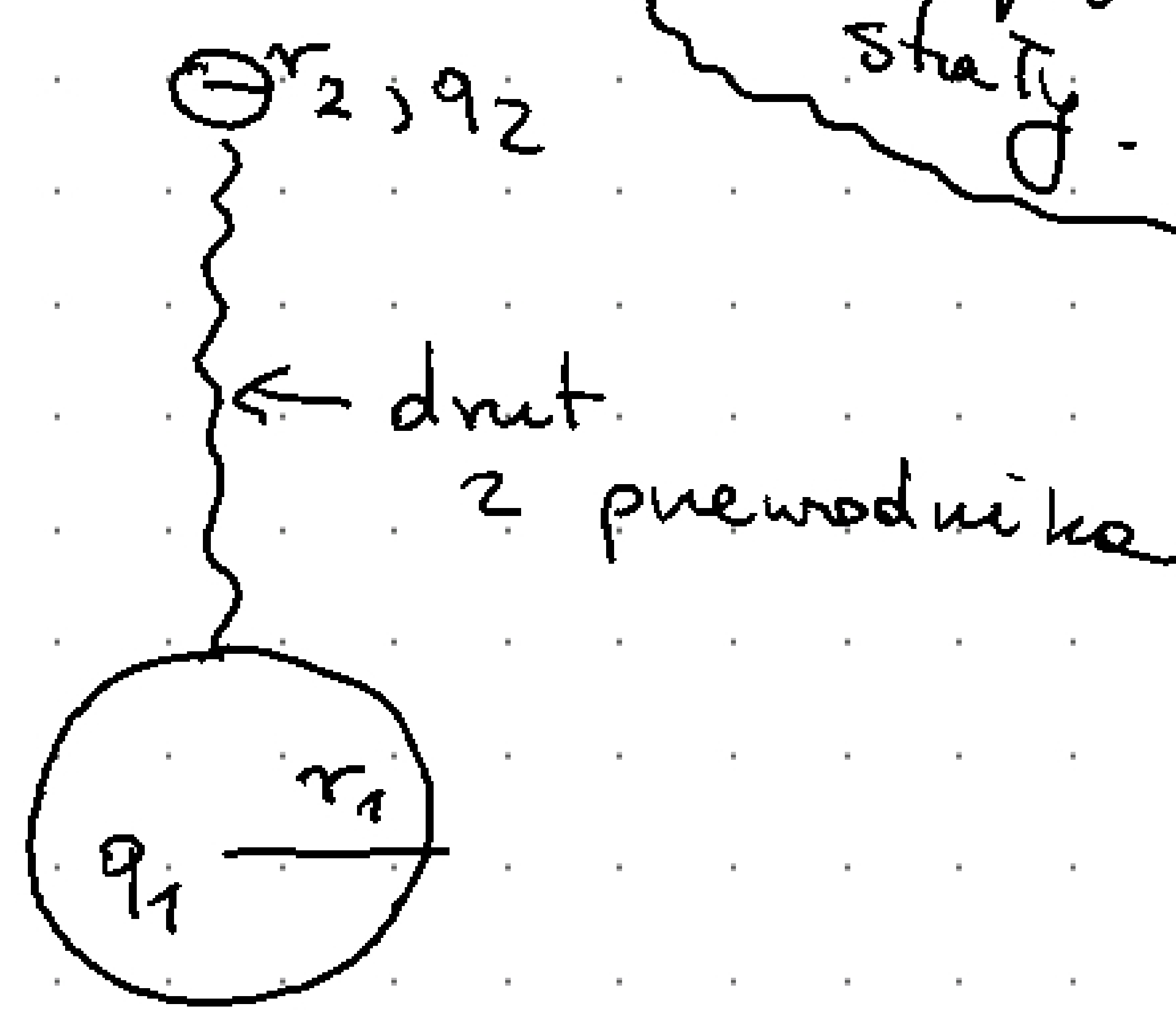


wewnątrz przewodnika potencjał jest stały.

3°) Rozkład ładunku na ostrzu



modelujemy ostrze dwoma kulami $\Longrightarrow$



Potencjał wewnątrz przewodnika jest stały, czyli

$$\varphi = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \Rightarrow \frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2}$$

Oznacza to, że ładunki gromadzą się na ostrzu, tj. im mniejszy promień krzywizny tym większy ładunek tam się gromadzi.

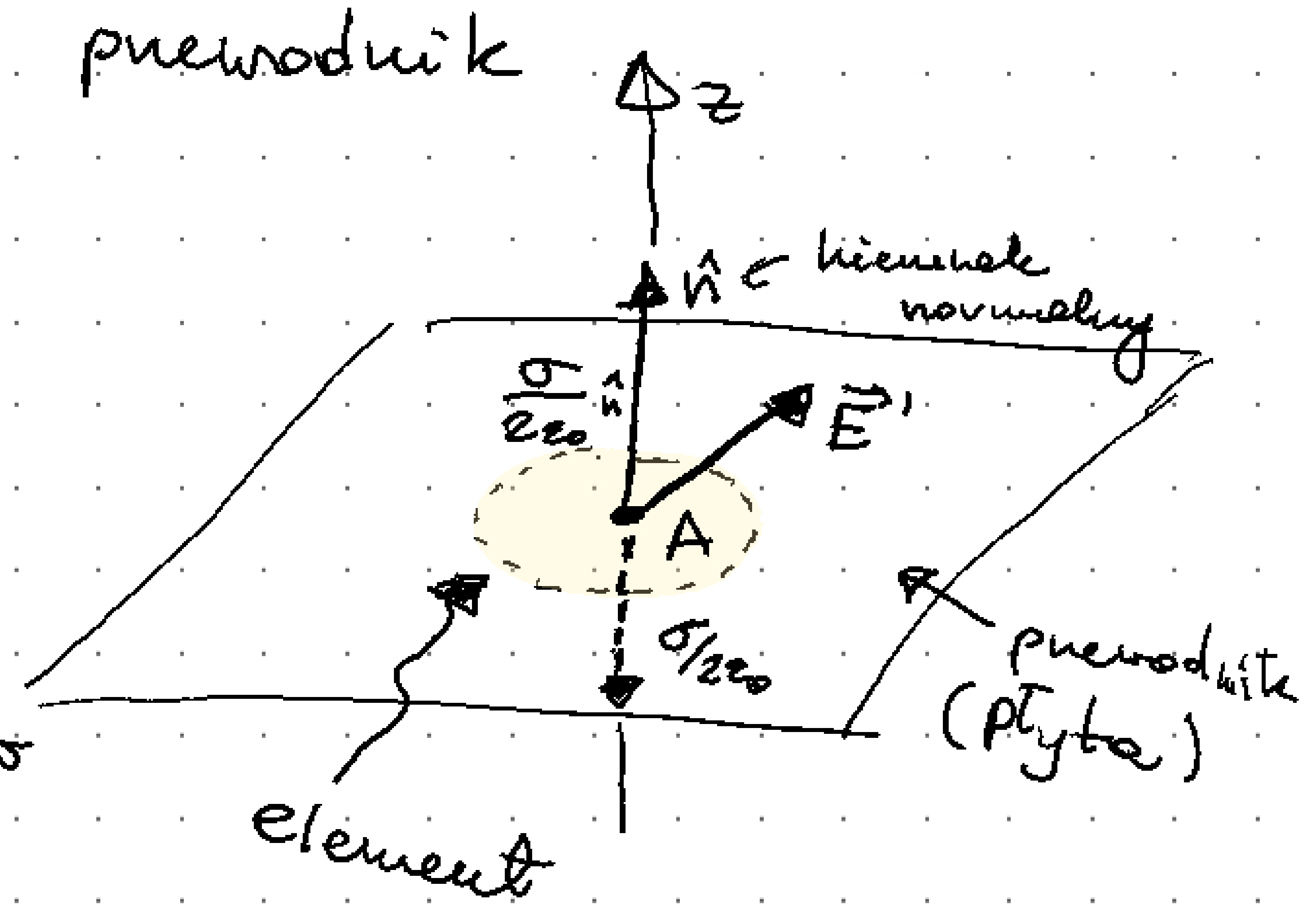
Co więcej wiemy, że składowe normalne na obu kulach wynoszą:

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}, \quad E_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\boxed{\frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{q_1}{q_2}\,\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{r_1}{r_2}}$$

Siła działająca na przewodnik



$\vec{E}_{łaty}$ – pole pochodzące od ładunku w łacie

$\vec{E}'$ – pole pochodzące od innych ładunków

$$\vec{E} = \vec{E}_{łaty} + \vec{E}'$$

Pole pochodzące od łaty:

$$\vec{E}_{łaty} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}, & z>0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}, & z<0 \end{cases}$$

Korzystamy z zasady superpozycji:

– Pole elektryczne nad przewodzącą powierzchnią wynosi:

$$\vec{E}_{nad} = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\hat{n} + \vec{E}'$$

– Pole elektryczne pod przewodzącą powierzchnią:

$$\vec{E}_{pod} = -\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\hat{n} + \vec{E}'$$

stąd dostajemy, że

$$\vec{E}_{śr.} = \vec{E}' = \frac{1}{2}\left(\underset{\underset{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}}{\parallel}}{\vec{E}_{nad}} + \underset{\underset{0}{\parallel}}{\vec{E}_{pod}}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}$$

średnia wartość pola

warunki na składową normalną

czyli siła działająca na tą łatę wynosi:

$$\vec{F} = q\,\vec{E}_{śr.} = (\sigma A)\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n} = \frac{\sigma^2 A}{2\varepsilon_0}\hat{n}$$

Ciśnienie elektrostatyczne działające na taśmę:

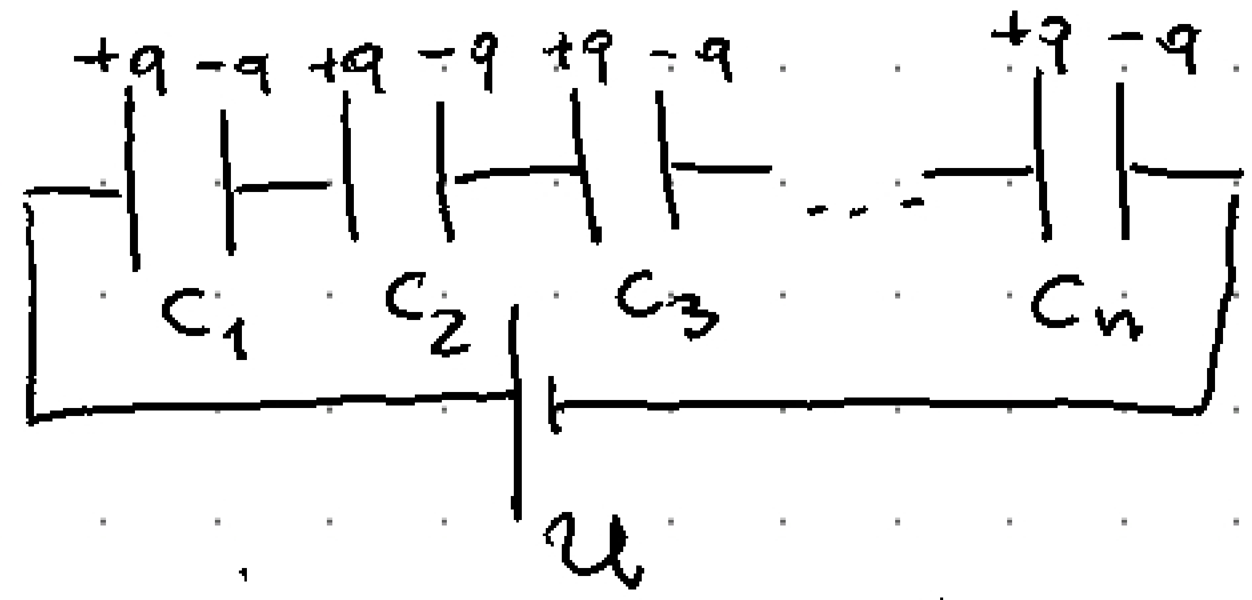
$$p = \frac{F}{A} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2_{\text{normalna}}$$

Kondensatory i dielektryki

Pojemność kondensatora z definicji wynosi: $C = \frac{Q}{U}$

Łączenie kondensatorów:

- szeregowe:



Na każdym kondensatorze następuje spadek napięcia:

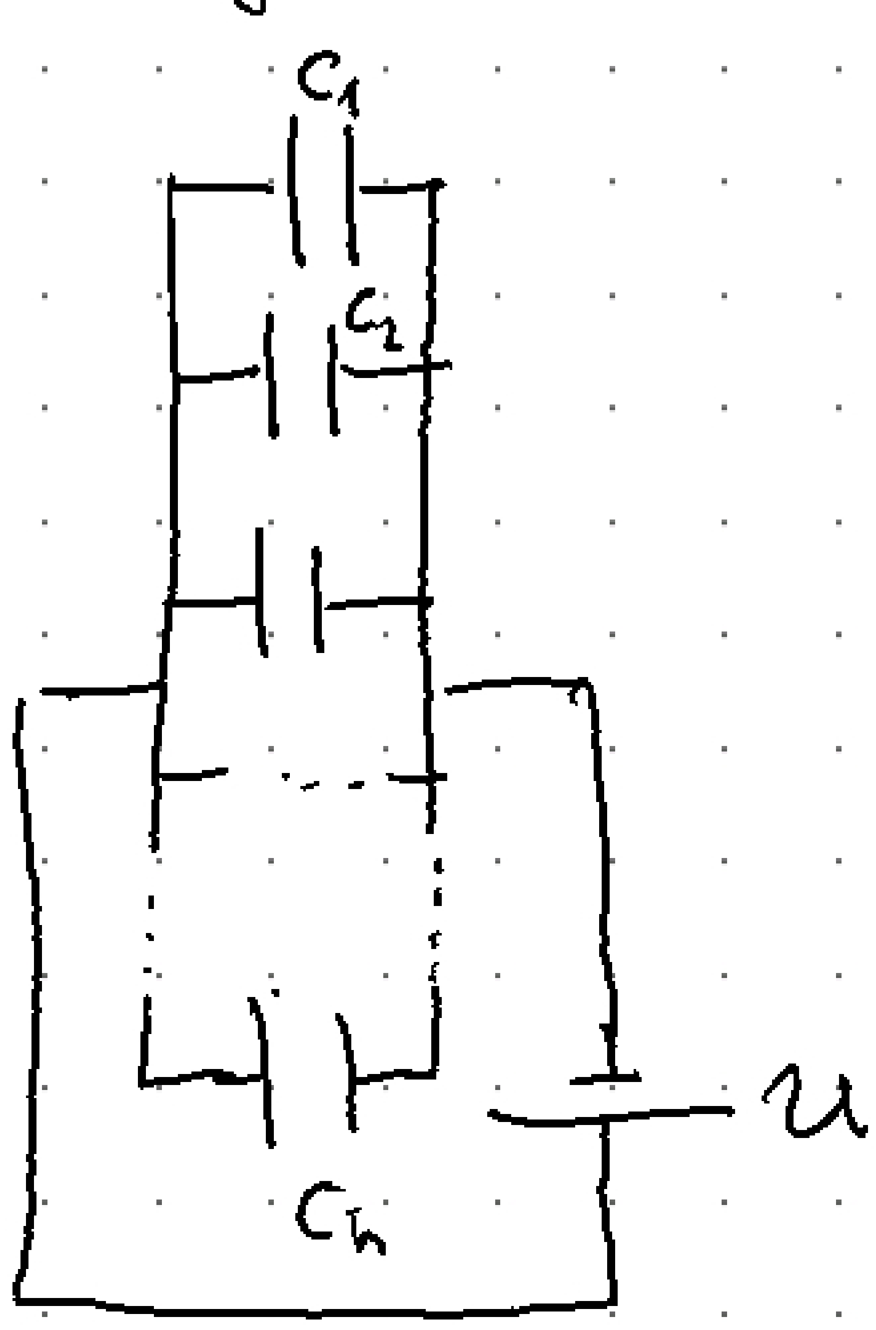
$$U = U_1 + U_2 + \ldots + U_n =$$

$$= \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \ldots + \frac{Q}{C_n} = Q\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{C_j}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C^*} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{C_j}$$

pojemność zastępcza

- równoległe:



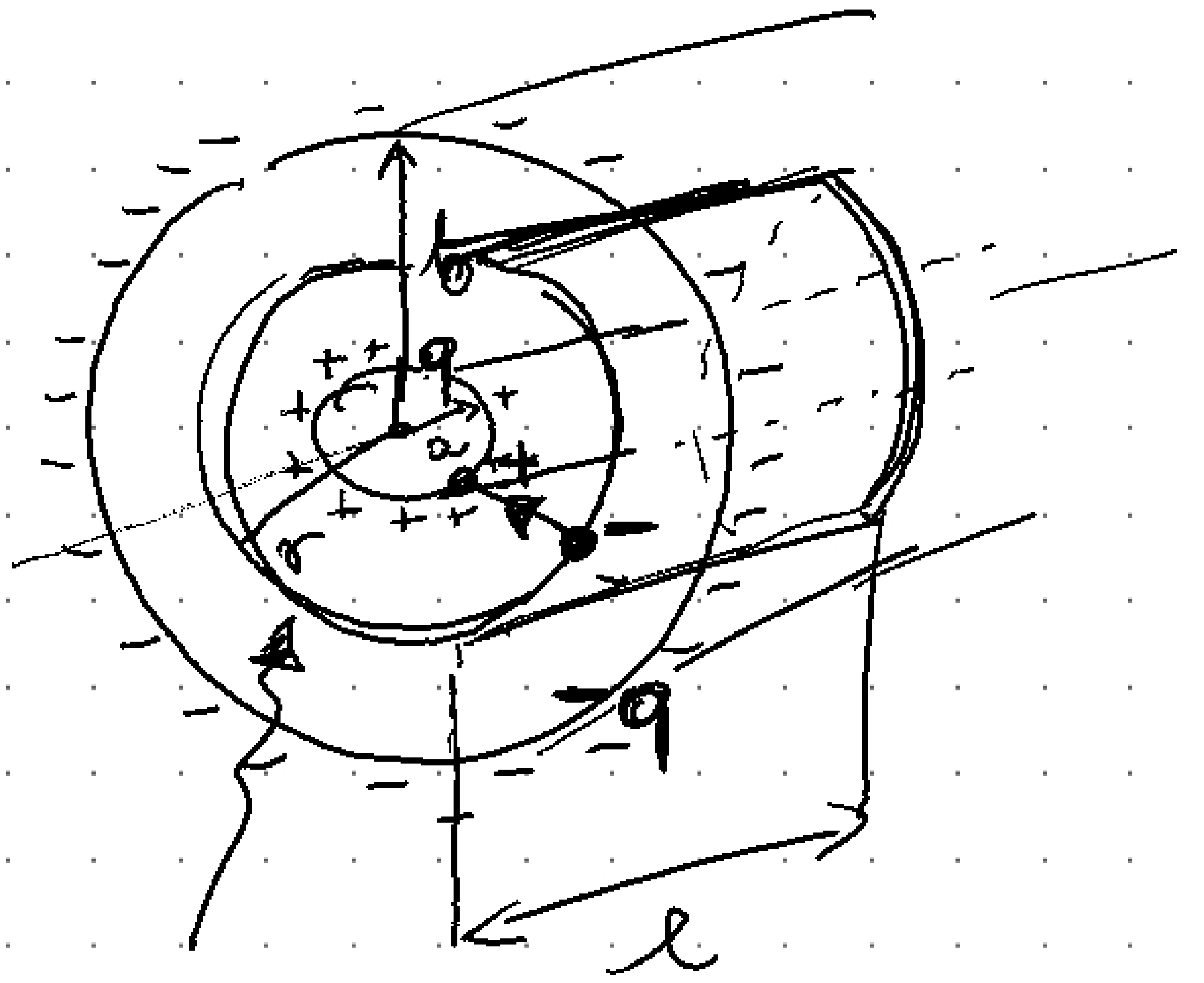
Napięcie jest stałe na wszystkich kondensatorach

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots + Q_n$$

$$Q = C_1 U + C_2 U + \ldots + C_n U$$

$$\Rightarrow C^* = \frac{Q}{U} = \sum_{j=1}^{n} C_j$$

Przykład: Kondensator walcowy



powierzchnia Gaussa

Korzystamy z prawa Gaussa:

i) $r > b$, $Q_{wew} = 0$

$$\Rightarrow E = 0$$

ii) $r \in [a, b]$, $Q_{wew.} = q$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E\, 2\pi r l = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0 l q}$$

iii) $r < a$, $Q_{wew.} = 0$

$$\Rightarrow E = 0$$

Szukamy napięcia: $(\varphi_+ > \varphi_-)$

$$U = \varphi_+ - \varphi_- = \int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_b^a \frac{q}{2\pi \varepsilon_0 l r}\, dr =$$

$$= \frac{q}{2\pi \varepsilon_0 l} \int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0 l} \ln\left(\frac{b}{a}\right),$$

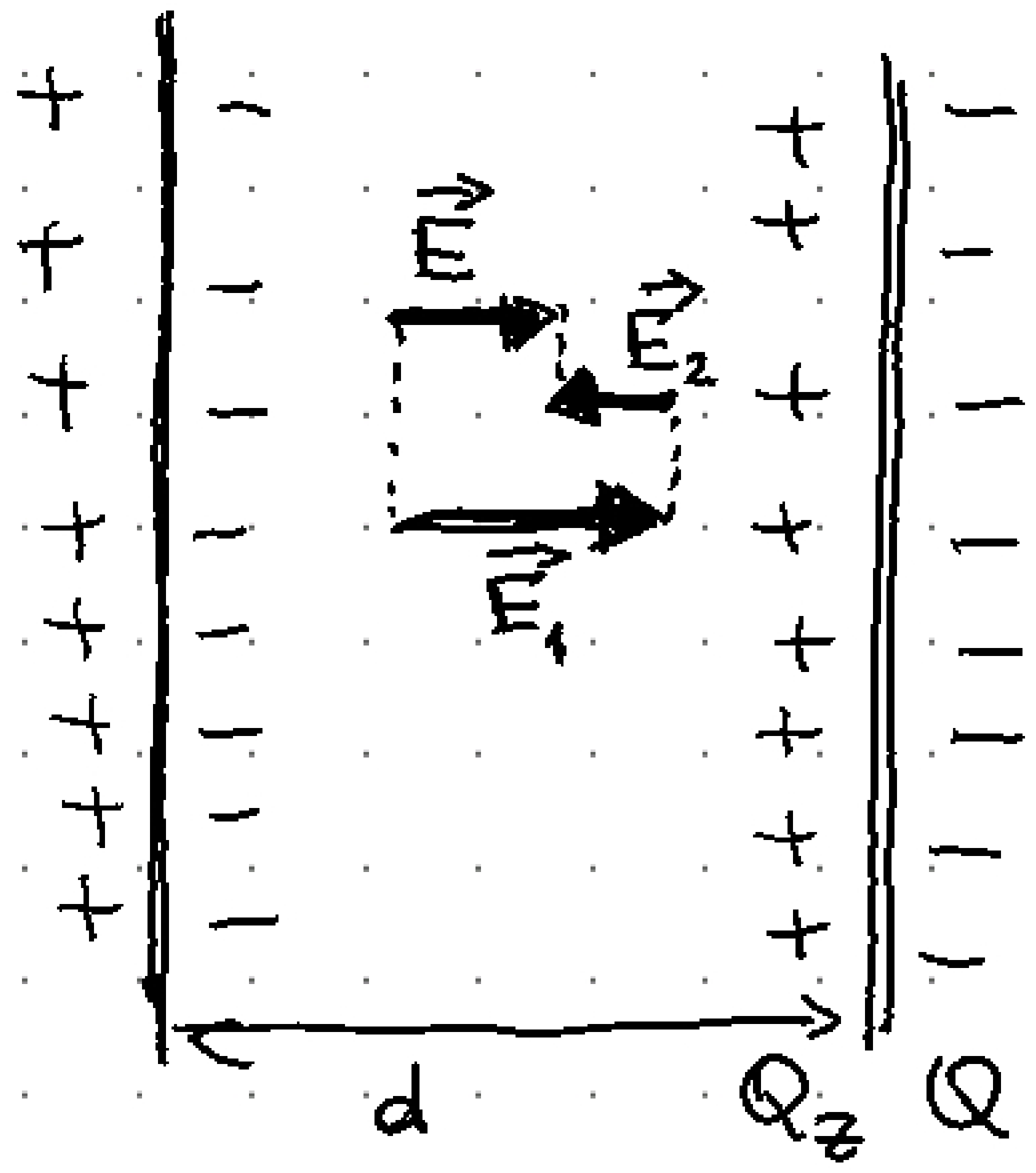
a stąd mamy $C = \frac{q}{U} = 2\pi \varepsilon_0 \frac{l}{\ln(b/a)}$

– Energia pola elektrycznego w kondensatorze

$$dW = U\, dq = \frac{q'}{C} dq' \Rightarrow W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

$\Rightarrow W = \frac{1}{2} C U^2$ – praca związana z ładowaniem kondensatora

Dielektryk w kondensatorze



$\vec{E_1}$ - pole pochodzące od okładek

$\vec{E_2}$ - pole od ładunków związanych Q_z

$$E_1 = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}, \quad E_2 = \frac{Q_z}{\varepsilon_0 S}$$

$$Q = \varepsilon_r C_0 U$$

ε_r – względne przenikalności dielektryczne

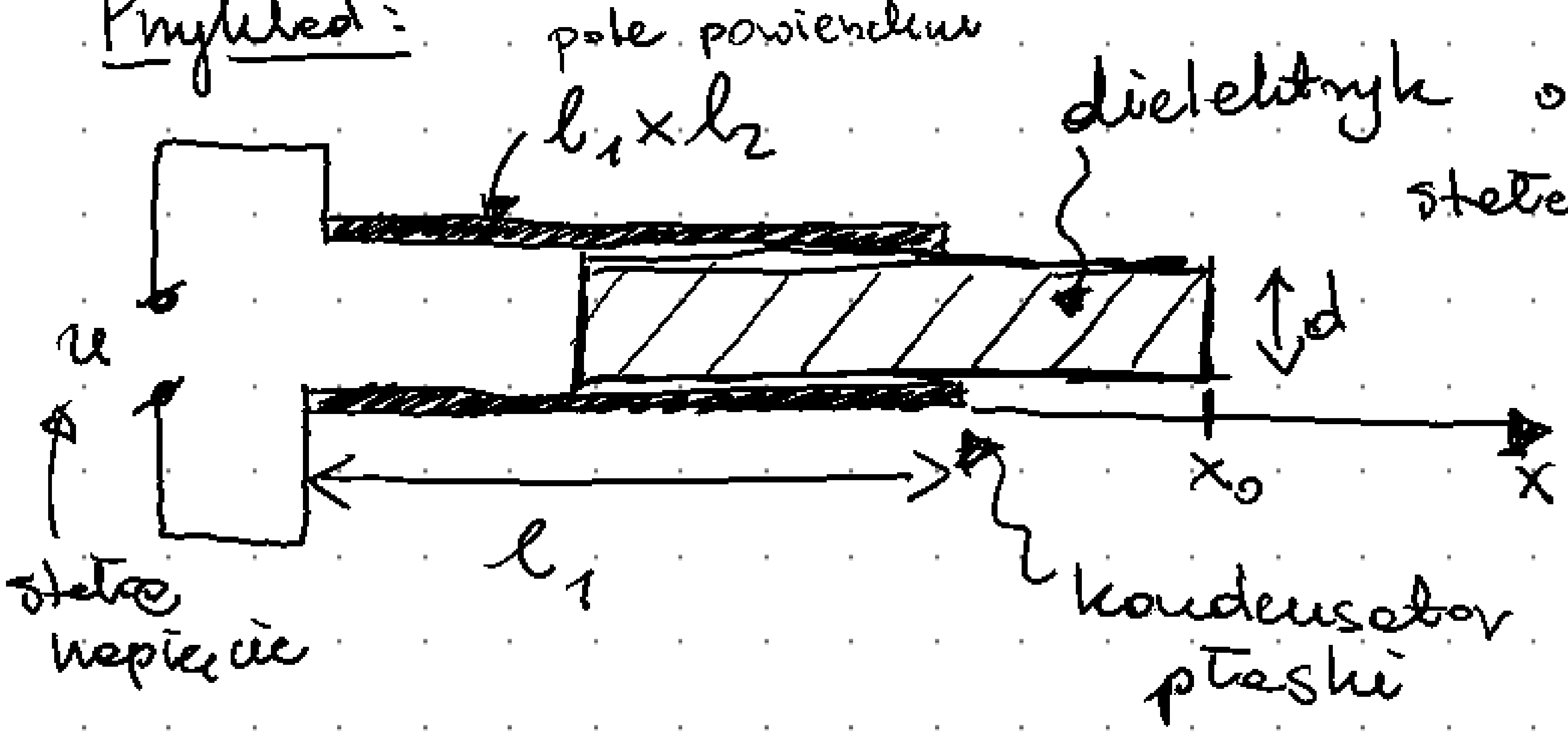
C_0 – pojemność kondensatora próżniowego

$$E = E_1 - E_2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{S} - \frac{Q_z}{S}\right) = \frac{U}{d}$$

$$Q_z = Q\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

$Q - Q_z = Q/\varepsilon_r$ - ładunek swobodny.

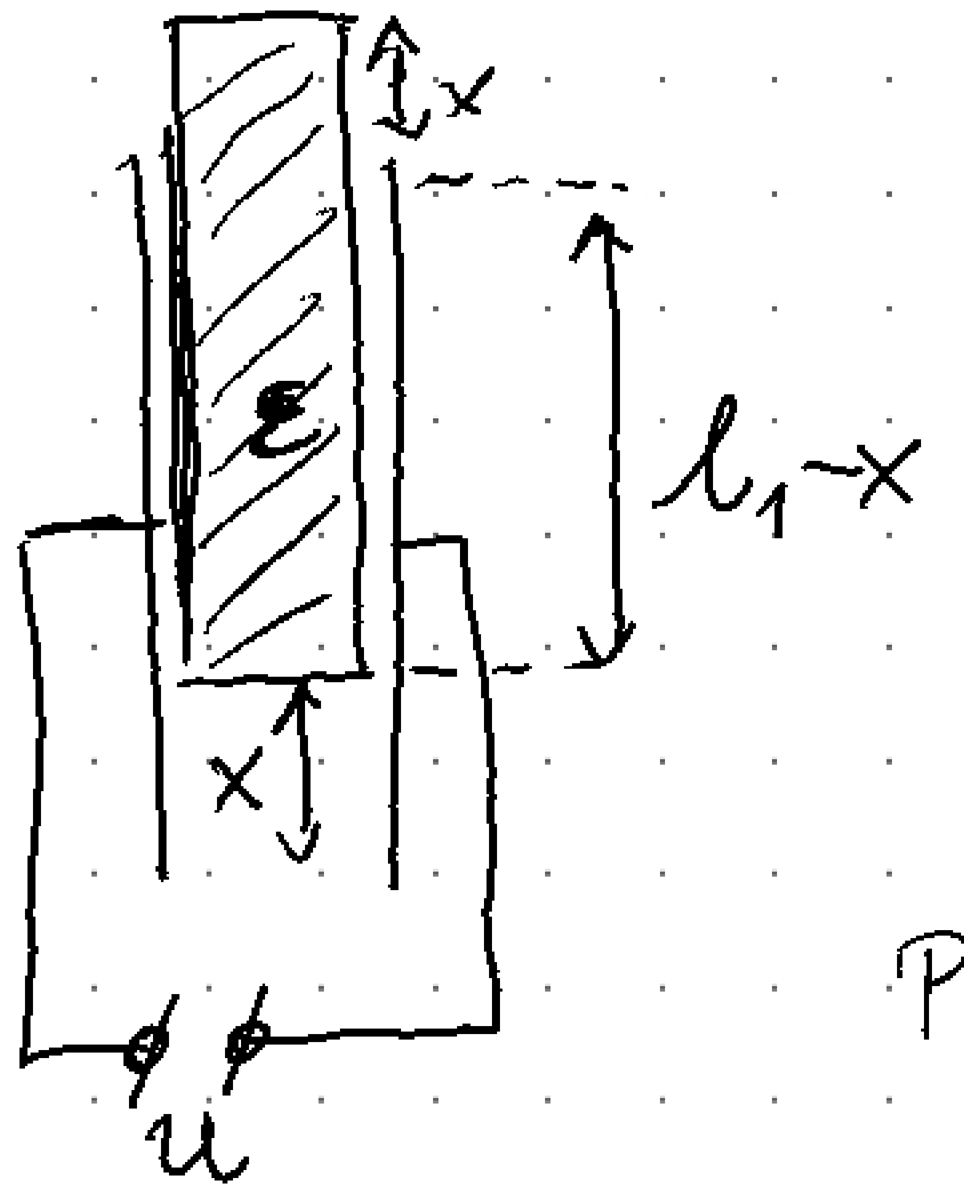
<u>Przykład:</u>



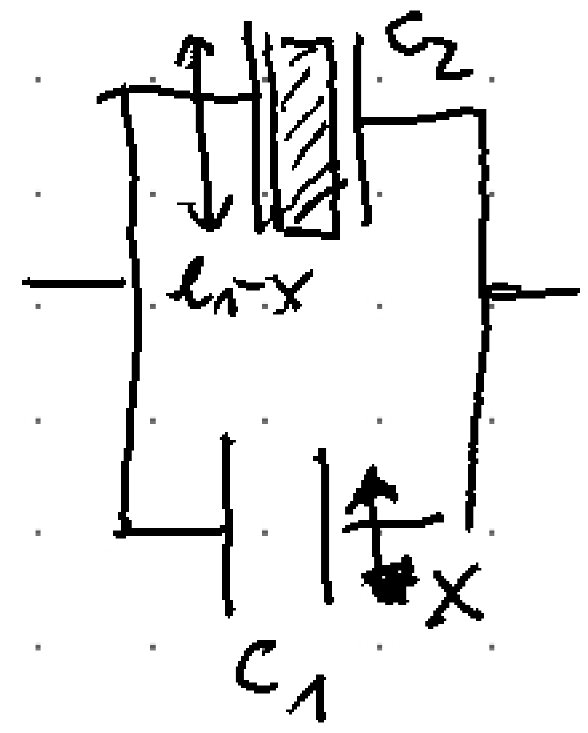
$d \ll l_1, \; d \ll l_2$

Wysuniętą płytkę puszczono swobodnie. Zaniedbując tarcie znaleźć zależności przemieszczenia i prędkości od czasu.

Gdy płytka jest wysunięta z kondensatora na odległość $x \leq l_1$ pojemność kondensatora wynosi



$\Longrightarrow$



$$C_x = C_1 + C_2 = \varepsilon_0 l_2 \left[x + \varepsilon(l_1 - x)\right]/d$$

Pojemność kondensatora:

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 l_2}{d}\left[x + \varepsilon(l_1 - x)\right]$$

Energia kondensatora: $W(x) = \frac{1}{2} C(x) U^2$

Ładunek na okładkach: $Q(x) = C(x)\, U$

Zasada zachowania energii:

$$\underbrace{\Delta E_k}_{\text{zmiana energii kinetycznej kondensatora}} + W(x + \Delta x) = W(x) + \underbrace{W_{źr}}_{\text{praca źródła}}$$

$$W_{źr} = \left[Q(x+\Delta x) - Q(x)\right] U = \Delta C\, U^2,$$

stąd: $\Delta E_k = \Delta C \frac{U^2}{2} = -\frac{\varepsilon_0 l_2 (\varepsilon - 1) U^2}{2d} \Delta x$

$$\Delta E_k = F_x(x)\,\Delta x \Rightarrow F = \frac{\varepsilon_0 l_2 (\varepsilon - 1) U^2}{2d}$$

$F_x(x)$ – siła działająca wzdłuż x na dielektryk

F – siła z którą dielektryk jest wciągany do kondensatora

$a = F/m$, czyli

$$x(t) = x_0 - \frac{at^2}{2}, \quad v_x(t) = -at$$

Dielektryk wykonuje drganie wokół $x = 0$, gdzie $v_{max} = \sqrt{2 a x_0}$, a okres drgań $T = 4\sqrt{2x_0/a}$