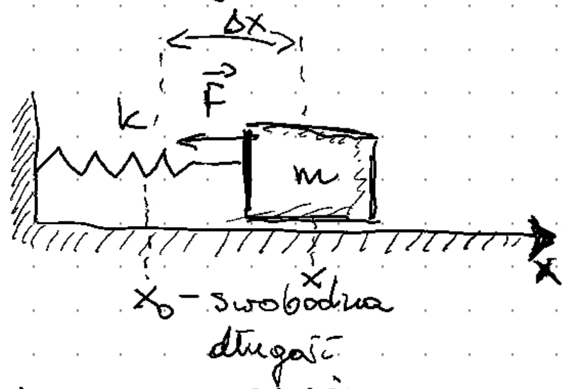
OSCYLATOR HARMONICZNY. MAŁE DRGANIA

14/12/2019

Problem drgań jest jednym z najważniejszych zagadnień fizycznych. Zagadnienie oscylatora harmonicznego w wersji kwantowej jest jednym z najważniejszych w całej współczesnej fizyce i stanowi podwaliny kwantowej teorii pola. W ciągu kilku najbliższych zajęć przyjrzymy się wszystkim ważniejszym aspektom tego zagadnienia w kontekście klasycznym.

Oscylator harmoniczny



Na klocek działa siła sprężystości (Hooka):

$$F_{wyp} = -k(x - x_0) = -k\Delta x,$$

wtedy

$$F_{wyp} = ma = m\frac{d^2 \overbrace{\Delta x}^{\ddot{\Delta x}}}{dt^2} \Rightarrow \ddot{\Delta x} + \frac{k}{m}\Delta x = 0$$

Otrzymane równanie różniczkowe nosi nazwę równania oscylatora harmonicznego i ogólnie ma ono postać:

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0} \qquad (*)$$

Nim nauczymy się pewnej systematycznej metody rozwiązywania tego równania spróbujmy je zgadnąć. Spodziewamy się, że klocek będzie poruszał się ruchem drgającym, więc zgadujemy rozwiązanie o postaci:

$$x(t) = A\cos(Bt + C) \text{, wtedy}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\left(A\cos(Bt+C)\right) = -A\sin(Bt+C)\cdot B$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{d}{dt}\left(-AB\sin(Bt+C)\right) = -AB^2\cos(Bt+C),$$

wstawiając to do równania (*) mamy:

$$-\cancel{A}B^2\cancel{\cos(Bt+C)} + \omega_0^2\cancel{A}\cancel{\cos(Bt+C)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad B = \omega_0$$

Uzyskane rozwiązanie powinno mieć dwie stałe wynikające z „odcałkowania" tego równania. W równaniu najwyższą pochodną jest druga pochodna po czasie, dlatego to równanie trzeba dwukrotnie „odcałkować", stąd dwie stałe.

Mamy, więc

$$x(t) = \underset{\substack{\text{amplituda}\\ \text{drgań}}}{A}\cos(\overbrace{\underset{\substack{\text{częstość}\\ \text{kołowa}}}{\omega_0}t + \underset{\substack{\text{przesunięcie}\\ \text{fazowe}}}{\varphi}}^{\text{faza}})$$

Amplituda i przesunięcie fazowe są stałymi, które trzeba wyznaczyć z warunku początkowego.

Zinterpretujmy uzyskany wynik:

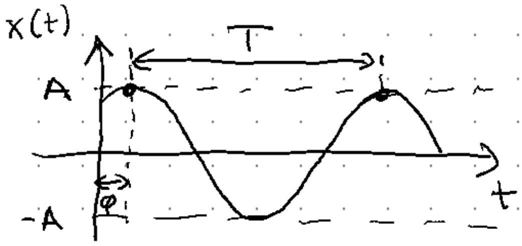
- po pierwsze wiemy, że $|\cos(\omega_0 t+\varphi)| \leq 1$, a to oznacza, że amplituda A jest maksymalnym wychyleniem ciała drgającego z położenia równowagi.
- Zauważmy, że

$$x\left(t+\frac{2\pi}{\omega_0}\right) = A\cos\left(\omega_0\left(t+\frac{2\pi}{\omega_0}\right)+\varphi\right) = A\cos(\omega_0 t+2\pi+\varphi) = A\cos(\omega_0 t+\varphi) = x(t)$$

widzimy, że funkcja $x(t)$ po czasie $\frac{2\pi}{\omega_0}$ przyjmuje swoją poprzednią wartość. Zatem $2\pi/\omega_0$ jest okresem ruchu T.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

dla klocka $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$



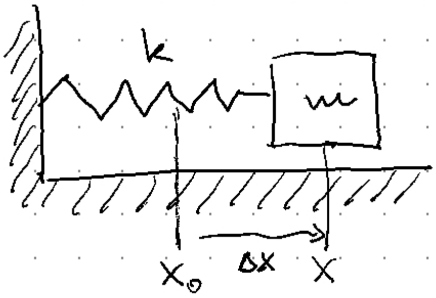
Wielkość $\nu = \frac{1}{T}$ nazywamy częstotliwością drgań i mówi nam ona o ilości pełnych drgań w jednostce czasu.

Ruch drgający jest związany z ruchem po okręgu. Rzut ciała poruszającego się po okręgu z prędkością kątową ω_0 na pewną płaszczyznę porusza się zgodnie z równaniem $x(t) = A\cos(\omega_0 t+\varphi)$. Wielkość $\omega_0 = 2\pi\nu$ nazywamy częstością kołową.

- za pomocą przesunięcia fazowego φ możemy zmienić położenie początkowe drgającego ciała.

Energia w ruchu harmonicznym

Praca wykonana przez nas w celu przesunięcia klocka o Δx względem położenia równowagi wynosi



$$dW = F dx \Rightarrow W = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} F(x)dx = -k\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} x dx = -\frac{k}{2}x^2\Big|_{x_0}^{x_0+\Delta x}$$

Niech $x_0 = 0$, wtedy

zmiana energii potencjalnej

$$W = -\frac{k}{2}(\Delta x)^2 \Rightarrow \Delta E_{pot} = -W = \frac{k}{2}(\Delta x)^2,$$

cyli $E_{pot} = \frac{1}{2}kx^2$ dla sił sprężystości.

W naszym przypadku:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow E_{pot}(t) = \frac{1}{2}A^2 k\cos^2(\omega_0 t+\varphi)$$

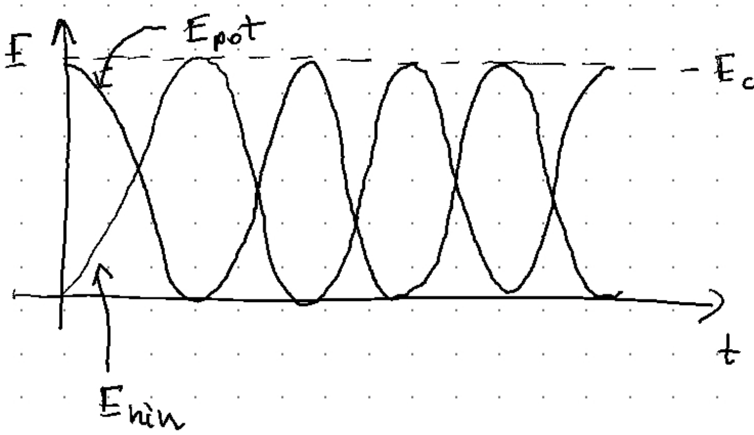
$$v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t+\varphi) \Rightarrow E_{kin}(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t+\varphi)$$

ponieważ $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, więc

$$E_{całk}(t) = \frac{1}{2}A^2 k\cos^2(\omega_0 t+\varphi) + \frac{1}{2}m\underbrace{\left(\frac{k}{m}\right)}_{\omega_0^2}A^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}A^2 k\left[\cos^2(\omega_0 t+\varphi) + \sin^2(\omega_0 t+\varphi)\right] = \frac{1}{2}kA^2 = \text{const}$$

Energia jest zachowana w tym przypadku!



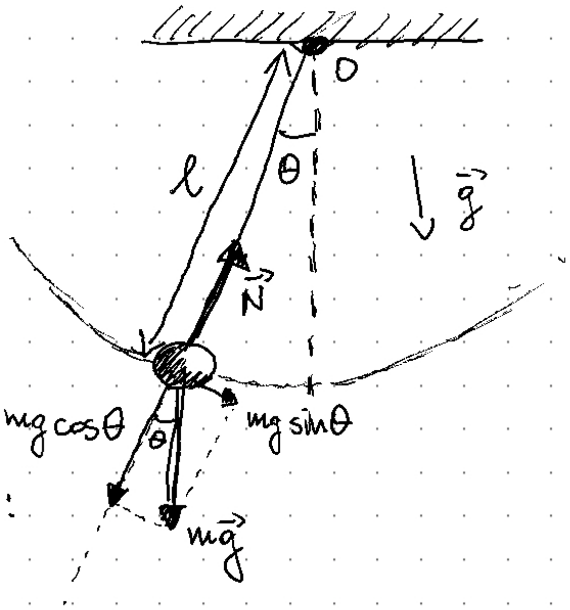
$E_{całk} = \frac{1}{2} k A^2 = E_{pot} + E_{kin}$

Energia całkowita zależy tylko od amplitudy!

Wahadło matematyczne. Przybliżenie małych drgań

Moment bezwładności w tym przypadku wynosi:

$$I = m l^2$$



Moment siły grawitacji powodujący obrót wokół osi O wynosi

$$M = -mgl\sin\theta$$

Zatem z II prawa Newtona:

$$I\varepsilon = -mgl\sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgl}{I}\sin\theta = 0$$

Zakładamy, że drgania są małe, wtedy możemy rozwinąć $\sin\theta$ w szereg Taylora dla $\theta = 0$:

$$\sin\theta = \sin(0) + \frac{1}{1!}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\Big|_{\theta=0} \cdot \theta + \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\theta^2}(\sin\theta)\Big|_{\theta=0} \cdot \theta^2 + \ldots =$$

$$= 0 + \cos\theta\Big|_{\theta=0} \cdot \theta - \frac{1}{2}\sin\theta\Big|_{\theta=0} \cdot \theta^2 - \frac{1}{3!}\cos\theta\Big|_{\theta=0} \cdot \theta^3 + \ldots =$$

czyli $\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \ldots \simeq \theta$

W przybliżeniu małych drgań dostajemy, że

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{I}\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgl}{ml^2}\theta = 0$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego z częstością kołową $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, czyli okres tego wahadła wynosi $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Wyższe człony dają poprawki anharmoniczne dla wahadła matematycznego. Uwzględniając kolejny człon rozwinięcia dostajemy:

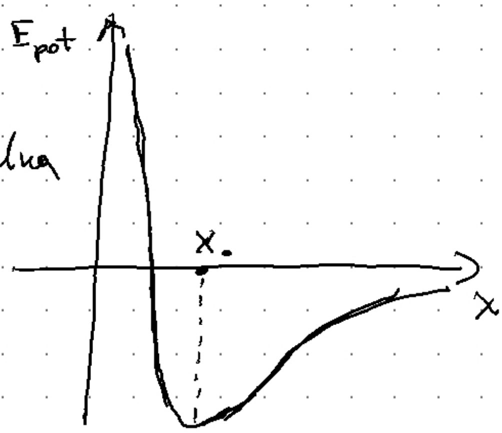
$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta - \frac{1}{6}\frac{g}{l}\theta^3 = 0} \qquad \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

Poprawki te można policzyć, ale za chwilę zaprezentuję to na prostszym przypadku. Dla wahadła matematycznego dostajemy następujące poprawki do okresu:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{2}{2^2}\sin^2\theta_{max} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\sin^4\frac{\theta_{max}}{2} + \ldots\right)$$

Oscylator anharmoniczny

Załóżmy, że moje ciało posiada energię potencjalną $E_{pot}(x)$. Siła działająca na to ciało jest wtedy dana gradientem energii potencjalnej, czyli $F = -\dfrac{dE_{pot}(x)}{dx}$



Niech moja energia potencjalna ma kształt podobny do krzywej Lennard-Jonesa z jednych z poprzednich zajęć, wtedy mogę rozwinąć ją w pobliżu minimum:

$$E_{pot}(x) = E_{pot}(x_0) + \frac{1}{1!}\left.\frac{dE_{pot}}{dx}\right|_{x=x_0}(x-x_0) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2E_{pot}}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^2 +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3E_{pot}}{dx^3}\right|_{x=x_0}\cdot(x-x_0)^3 + \ldots$$

Wybierzmy poziom odniesienia tak by $E_{pot}(x_0) = 0$, ponadto ponieważ $F = -\dfrac{dE_{pot}}{dx}$, więc w minimum pochodna ta znika (warunek równowagi mechanicznej). Oznacza to, że człon liniowy w x znika. Ponadto wprowadzając oznaczenia:

$$k = \left.\frac{d^2E_{pot}}{dx^2}\right|_{x=x_0} \quad - \text{ stała sprężystości}$$

$$\frac{1}{3}ks = \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3E_{pot}}{dx^3}\right|_{x=x_0}, \text{ gdzie } s \ll 1$$

Mamy, że w przybliżeniu

$$E_{pot}(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{3}ksx^3 + \dots \quad \left(\begin{matrix} \text{tutaj} \\ x = \Delta x \end{matrix} \right)$$

Siła działająca na moje ciało wynosi, wtedy

$$F = -\frac{dE_{pot}}{dx} = -kx + ksx^2$$

, czyli dostajemy równanie o postaci

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x - s\omega_0^2 x^2 = 0} \quad (*)$$

Spróbujemy rozwiązać to równanie uwzględniając tzw. wyższe harmoniczne:

$$x(t) = A[\cos\omega t + q\cos 2\omega t] + x_1$$

Zakładamy, że $q \ll 1$ oraz $x_1 \ll A$; wtedy

$$\dot{x}(t) = -A\omega[\sin\omega t + 2q\sin 2\omega t]$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2[\cos\omega t + 4q\cos 2\omega t]$$

wstawiamy to do $(*)$, wtedy:

$$-A\omega^2(\cos\omega t + 4q\cos 2\omega t) + A\omega_0^2(\cos\omega t + q\cos 2\omega t) +$$

$$+ \omega_0^2 x_1 - s\omega_0^2\,[A(\cos\omega t + q\cos 2\omega t) + x_1]^2 = 0$$

ponieważ $x_1 \ll A$ oraz $q \ll 1$, więc dominujący jest wkład od $\cos^2\omega t$

wtedy

$$-A\omega^2(\cos\omega t + 4q\cos 2\omega t) + A\omega_0^2(\cos\omega t + q\cos 2\omega t) +$$
$$+ x_1\omega_0^2 - s\omega_0^2 A^2 \underbrace{\cos^2\omega t}_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\omega t)} + \ldots = 0$$

, wtedy

$$A\cos\omega t\left[\omega_0^2 - \omega^2\right] = 0 \Rightarrow \quad \omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$A\cos 2\omega t\left[-4q\omega^2 + q\omega_0^2 - \frac{1}{2}s\omega_0^2 A\right] = 0$$

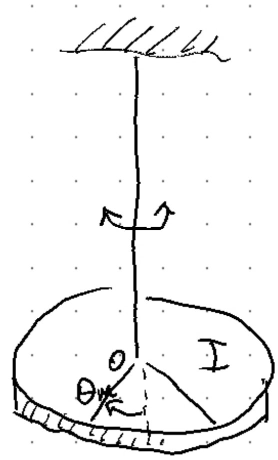
ponieważ $\omega = \omega_0$, więc $q = -\frac{1}{6}sA$

Natomiast wyraz wolny poprzez przyrównanie do zera wynosi: $x_1 = \frac{1}{2}sA^2$, czyli

$$x(t) = A\left(\cos\omega_0 t - \frac{1}{6}sA\cos 2\omega_0 t\right) + \frac{1}{2}sA^2$$

Wahadło torsyjne

Po skręceniu nić chce powrócić do swego poprzedniego stanu, co wiąże się z pojawieniem momentu siły proporcjonalnego do kąta skręcenia:



$$M = -k\theta$$

k – stała skręcenia / moment kierujący

Wtedy z II zasady dynamiki mamy:

$$I\varepsilon = M \Rightarrow I\ddot{\theta} = -k\theta,$$

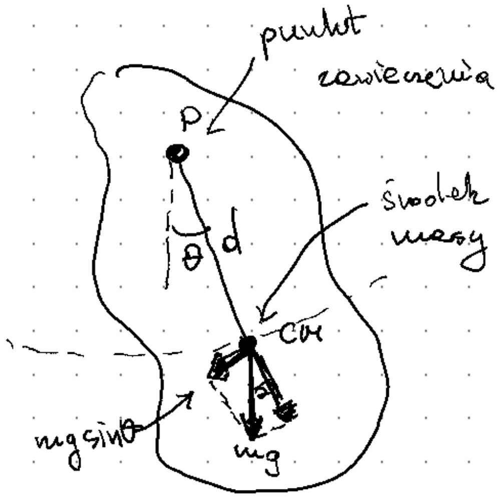
czyli $$\ddot{\theta} + \frac{k}{I}\theta = 0,$$ co znowu jest równaniem oscylatora harmonicznego, więc

$$\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

gdzie $\omega_0 = \sqrt{k/I}$, przy czym okres w tym przypadku wynosi:

$$T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{I/k}$$

Wahadło fizyczne

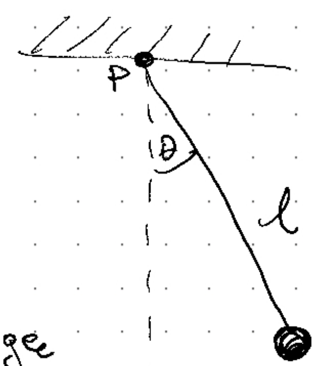


Z drugiego prawa Newtona mamy:

$$I\ddot{\theta} = -mgd\sin\theta$$

stosujemy przybliżenie małych drgań, wtedy

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{I}\theta = 0,$$



czyli $$\omega_0^2 = \frac{mgd}{I},$$

a okres wynosi $$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Dla dowolnego ciała fizycznego możemy znaleźć takie wahadło matematyczne, że ich okresy drgań są równe, wtedy $l = \frac{I}{md}$