OPTYKA GEOMETRYCZNA - NAJWAŻNIEJSZE ZAGADNIENIA

27.12.2020

Prędkość światła i współczynnik załamania

Światło jest falą elektromagnetyczną, która w próżni porusza się z prędkością:

$$c = 3 \cdot 10^8 \ m/s$$

Światło poruszające się w danym ośrodku materialnym ma mniejszą prędkość:

$$v = c/n \quad , \qquad (n \geq 1)$$

gdzie n jest współczynnikiem załamania światła (bezwzględny wsp. załamania).

Zasada Fermata

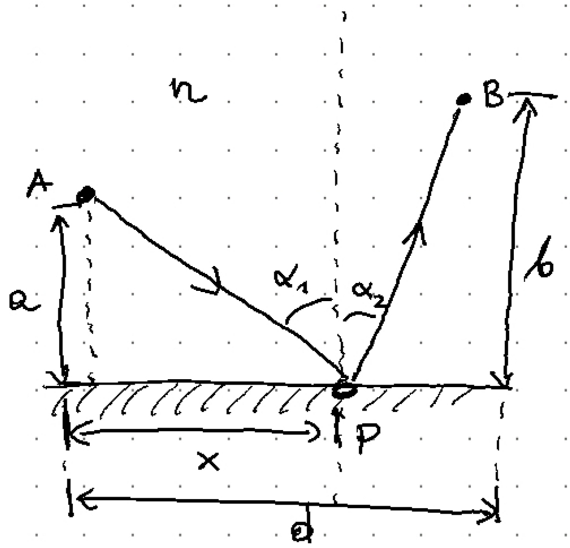
Promień świetlny poruszający się w dowolnym ośrodku od punktu A do punktu B przebywa najkrótszą możliwie drogę optyczną, czyli taką na której przebycie potrzebuje minimalnego czasu.

Droga optyczna to iloczyn drogi geometrycznej, a także bezwzględnego współczynnika załamania światła:

$$\underbrace{L}_{\text{dr. optyczna}} = \overbrace{S}^{\text{droga geometryczna}} \cdot \underbrace{n}_{\text{wsp. załamania}}$$

- Prawo odbicia

Promień świetlny porusza się w ośrodku o współczynniku załamania n i odbija się od powierzchni w punkcie P. Stosując zasadę Fermata znajdziemy



położenie punktu P, które minimalizuje czas potrzebny światłu na dotarcie z punktu A do punktu B:

Całkowity czas potrzebny promieniowi od A do B:

$$t(x) = \frac{1}{v}\left(\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{b^2+(d-x)^2}\right) = \frac{n}{c}\left(\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(d-x)^2}\right)$$

Szukamy takiego x, aby $t(x)$ był minimalny:

$$\frac{dt}{dx} = 0 = \frac{n}{c}\left[\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{1}{2}\frac{2(d-x)}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}(-1)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$$

Patrząc na rysunek u góry widzimy, że

$$\sin\alpha_1 = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}} = \sin\alpha_2$$

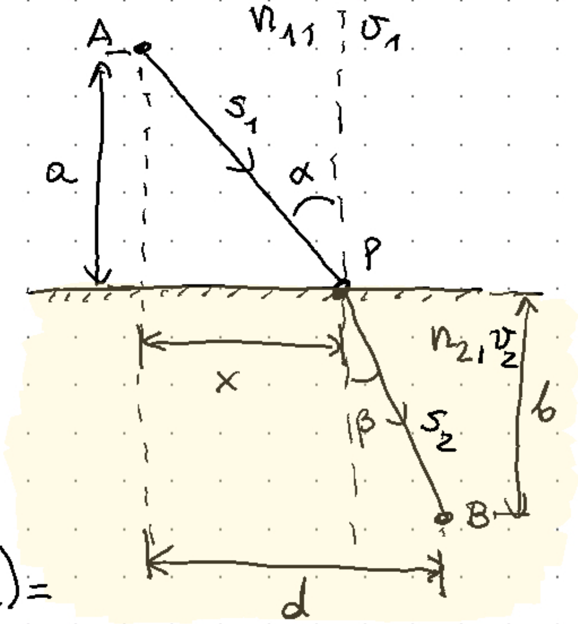
$$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha_1 = \alpha_2}$$

kąt odbicia

kąt padania

- Prawo załamania (Snella)

Całkowity czas potrzebny na przebycie od punktu A do punktu B:



$$t(x) = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} =$$

$$= \frac{n_1 s_1}{c} + \frac{n_2 s_2}{c} = \frac{1}{c}(n_1 s_1 + n_2 s_2) =$$

$$= \frac{l}{c}$$, gdzie l - droga optyczna,

czyli

$$t(x) = \frac{1}{c}\left[n_1 \sqrt{a^2+x^2} + n_2 \sqrt{b^2+(d-x)^2} \right]$$

Korzystamy z zasady Fermata:

$$\frac{dt(x)}{dx} = 0 = \frac{1}{c}\left[n_1 \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - n_2 \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n_1 x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{n_2 (d-x)}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$$

Korzystając z rysunku, wiemy, że

$$\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}, \quad \sin\beta = \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}},$$

czyli

$$\boxed{n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta}$$

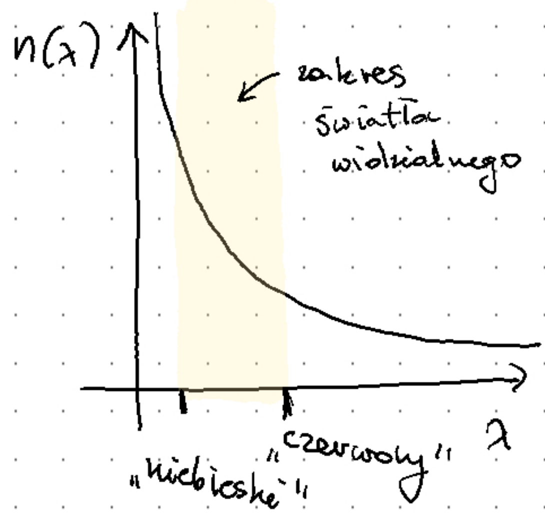
kąt padania — kąt załamania

Rozszczepianie się światła

Współczynnik załamania w próżni jest równy 1 dla wszystkich długości fali λ (dla wszystkich „kolorów"). W ośrodku materialnym współczynnik załamania zależy od długości fali:

$$n^2(\lambda) = 1 + \frac{B_1 \lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \frac{B_2 \lambda^2}{\lambda^2 - C_2} + \frac{B_3 \lambda^3}{\lambda^2 - C_3},$$

gdzie B_1, B_2, B_3, C_1, C_2 i C_3 to pewne stałe zależne od materiału (tzw. wsp. Sellmeiera).



Korzystając z prawa Snella mamy:

$$\sin\beta = \frac{1}{n(\lambda)} \sin\alpha$$

przy przejściu z powietrza do ośrodka, ponieważ

$$n(\lambda_1) > n(\lambda_2), \quad \text{gdy} \quad \lambda_1 < \lambda_2,$$

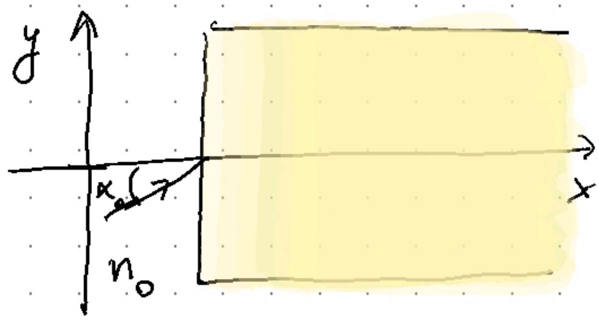
więc światło załamuje się bardziej dla krótszych długości fali niż dla dłuższych (kolor niebieski załamuje się bardziej niż kolor czerwony).

Efekt ten odpowiada za rozszczepienie światła w pryzmacie, ale nie można tego stosować w przypadku siatki dyfrakcyjnej.

PS. Powietrze traktuje się jak próżnię, czyli $n_{pow.} \simeq 1$.

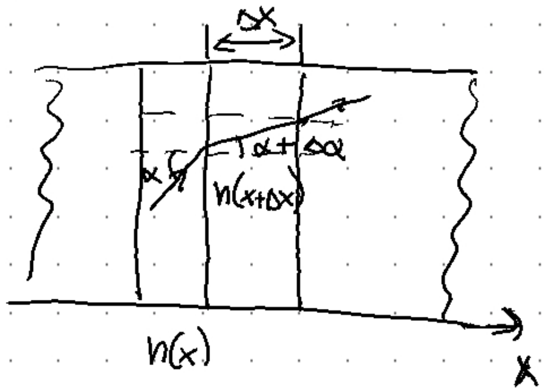
[redacted] Załamanie światła w ośrodkach o zmiennym współczynniku załamania

Mamy ośrodek w którym współczynnik załamania zależy od położenia x (np. akwarium w którym występuje gradient stężenia soli)



Możemy rozłożyć ten materiał na paseczki o szerokości Δx i zastosować prawo Snella:

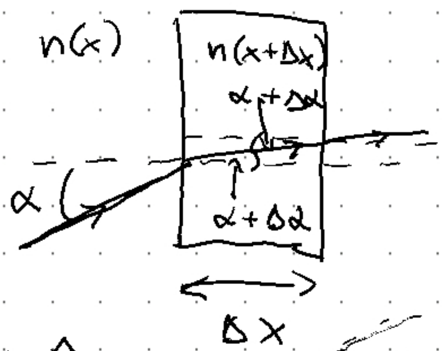
$$n(x)\sin\alpha = n(x+\Delta x)\sin(\alpha+\Delta\alpha)$$



jest to prawda dla wszystkich warstw, więc

$$n(x)\sin\alpha = n_0\sin\alpha_0 = \text{const},$$

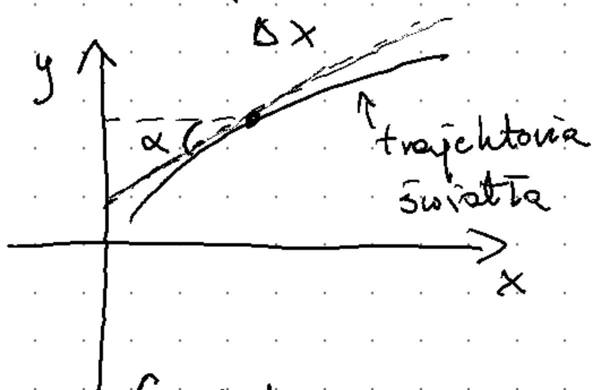
co więcej kąt α jest nachyleniem trajektorii światła wewnątrz tego materiału, czyli



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}, \text{ więc}$$

$(A = n_0\sin\alpha_0)$

$$\sin\alpha = \frac{A}{n(x)}$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{A/n(x)}{\sqrt{1-(A/n(x))^2}} \Rightarrow y = \int\frac{A\,dx}{\sqrt{n^2(x)-A^2}}$$

Zakładając, że $\sin\alpha_0$ jest małe, czyli także A jest małe mamy

$$\frac{1}{n(x)}\frac{1}{\sqrt{1-(A/n(x))^2}} \simeq \frac{1}{n(x)} + \frac{1}{2}\frac{1}{n(x)}\frac{A^2}{n^2(x)} + \frac{3}{8}\frac{1}{n(x)}\frac{A^4}{n^4(x)} + \dots$$

rozwijamy w szereg Taylora

$$\left\{ \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}} = (1-\varepsilon^2)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{3}{8}\varepsilon^4 + \dots \right\}$$

dla małych ε

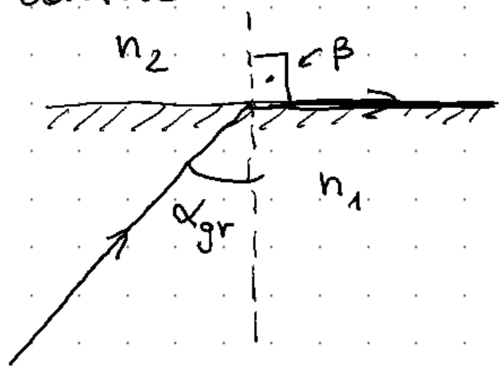
Zostawiając tylko pierwszy wkład mamy:

$$y \simeq \int \frac{A}{n(x)}\,dx$$

Światło w takich ośrodkach porusza się po krzywych nie będących liniami prostymi.

Całkowite wewnętrzne odbicie

Gdy $n_1 > n_2$, wtedy



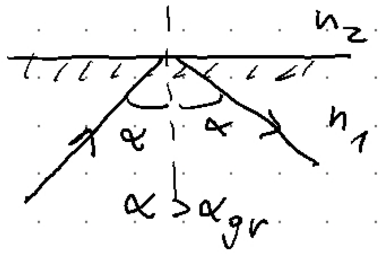
$$n_2 \sin\beta = n_1 \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \sin\beta > \sin\alpha,$$

więc dla pewnej wartości α_{gr} światło przestaje wydostawać się z ośrodka o większym wsp. załamania, lecz ulega odbiciu:

$$\sin\alpha_{gr} = \frac{n_2}{n_1}\sin 90^\circ = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$ – względny wsp. załamania

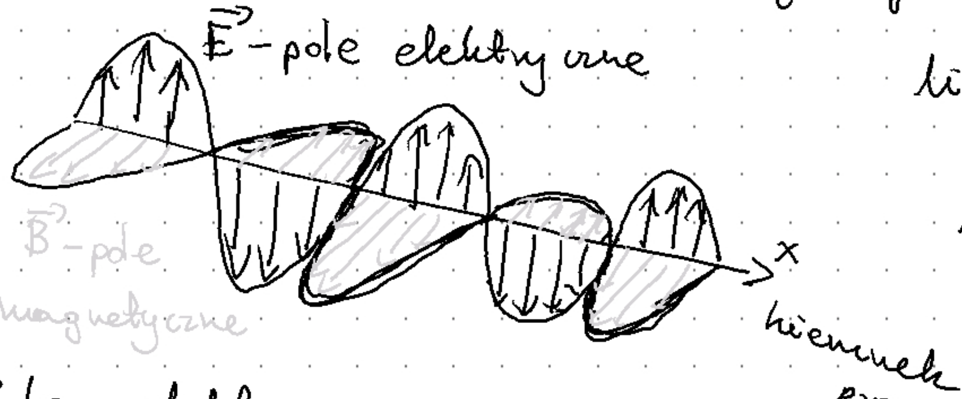
Gdy $\alpha > \alpha_{gr}$ następuje całkowite wewnętrzne odbicie.



Zjawisko to jest wykorzystywane w światłowodach i niektórych pryzmatach.

Polaryzacja światła

Światło jest falą elektromagnetyczną.



liczba falowa:

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ← dł. fali

$2\pi\nu$ ← częstotliwość

$\parallel$

ω - częstość kołowa drgań

$c = \nu \cdot \lambda$

Pola elektryczne i magnetyczne oscylują w przestrzeni pozostając wzajemnie prostopadłe w trakcie propagacji światła.

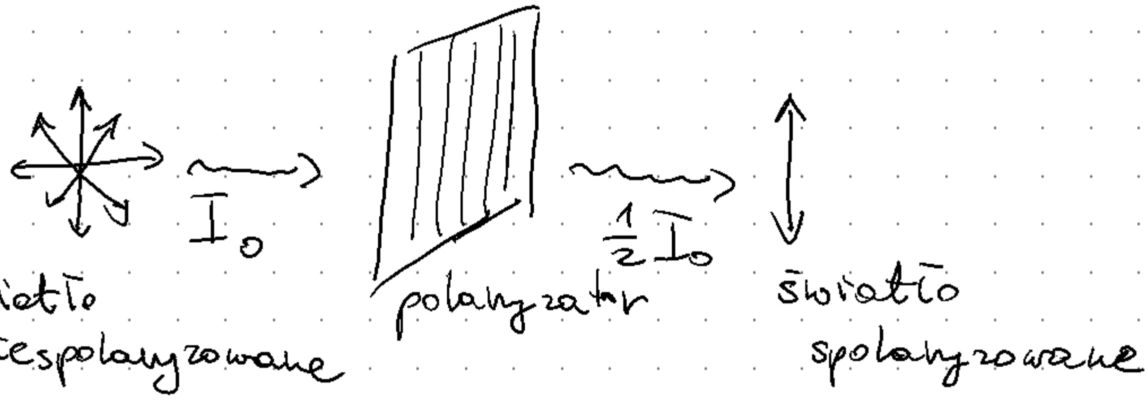
Umownie wektor opisujący kierunek wektora pola elektrycznego nazywamy polaryzacją:

$$\vec{E} = E_0 \vec{\varepsilon} \cos(kx - \omega t)$$

↖ wektor polaryzacji, $|\vec{\varepsilon}| = 1$

Światło słoneczne jest zwykle nie spolaryzowane, tzn. jest mieszaniną światła w którym pole elektryczne drga we wszystkich kierunkach prostopadłych do kierunku propagacji.

Światło niespolaryzowane można spolaryzować w konkretnym kierunku przy pomocy polaryzatora, wtedy intensywność światła maleje o połowę.



Prawo Malusa

Natężenie światła jest proporcjonalne do kwadratu natężenia pola elektrycznego:

$$I \propto E^2$$

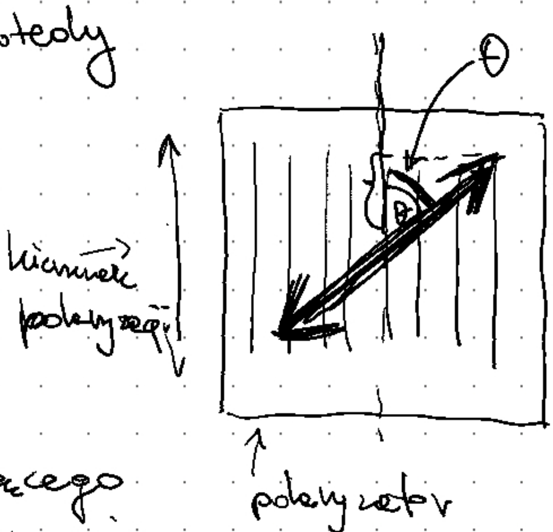
Jeżeli światło spolaryzowane przechodzi przez polaryzator, którego płaszczyzna polaryzacji tworzy z kierunkiem wyznaczonym przez wektor polaryzacji kąt θ, wtedy

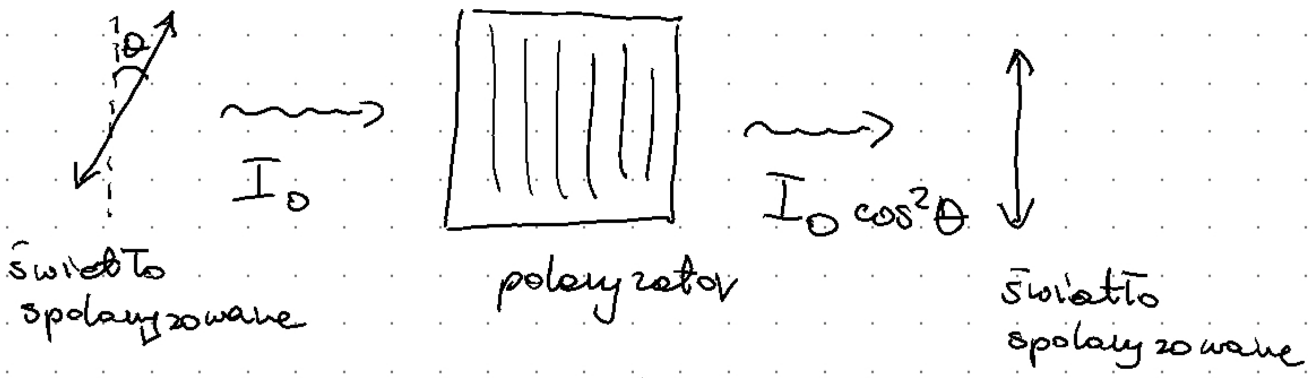
składowa $\vec{E}$ wzdłuż kierunku polaryzacji wynosi

$$E = E_0 \cos\theta,$$

czyli natężenie światła spolaryzowanego przechodzącego przez polaryzator wynosi

$$I = I_0 \cos^2\theta$$

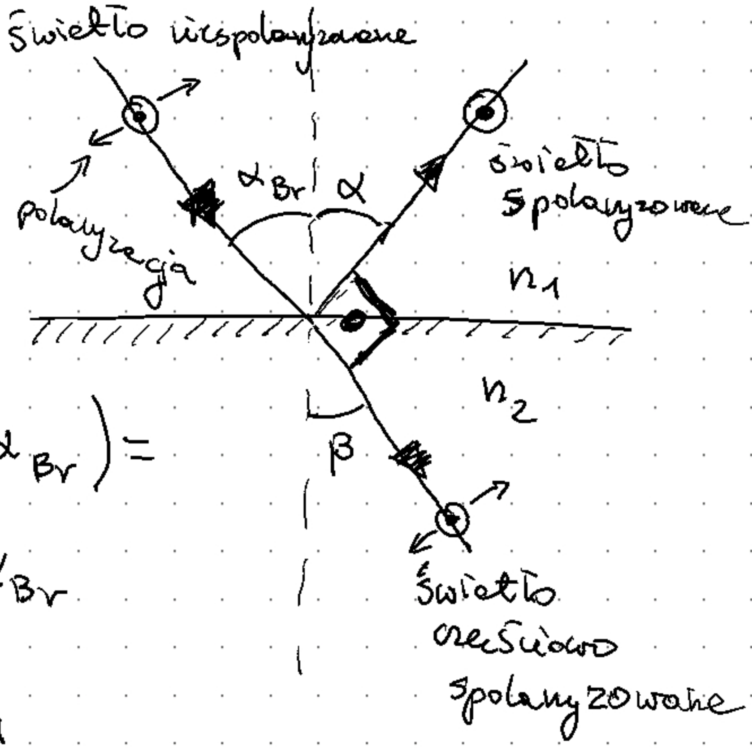




Jest to tzw. prawo Malusa.

■ Kąt Brewstera

Gdy na granicę ośrodków przezroczystych pada światło niespolaryzowane pod takim kątem, że promień odbity i załamany tworzą kąt prosty, wtedy światło odbite jest całkowicie spolaryzowane. Promień załamany jest spolaryzowany częściowo.



$$\alpha+\beta=90^\circ, \quad \alpha=\alpha_{Br}$$

z prawa Snella

$$n_1 \sin\alpha_{Br} = n_2 \sin\beta$$

$$n_1 \sin\alpha_{Br} = n_2 \sin(90^\circ-\alpha_{Br}) =$$

$$= n_2 \cos\alpha_{Br}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha_{Br} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

Kąt padania odpowiadający tej sytuacji nazywamy kątem Brewstera.