

MULTI POLOWE, MAŁE DRGANIA I LICZBY ZESPOLONE

■ Pole elektryczne

Jeżeli na ładunki znajdujące się w danym obszarze działają siły elektryczne to w obszarze tym istnieje pole elektryczne o natężeniu:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{el}}{q_0}$$

a także o potencjale elektrostatycznym: $\varphi = \frac{E_{pot}}{q_0}$

gdzie q_0 to wartość dodatniego ładunku próbnego znajdującego się w punkcie w którym chcemy

wyznaczyć \vec{E} i φ .

Potencjał elektrostatyczny nie jest niezależny od natężenia pola elektrycznego:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = \left[-\frac{\partial\varphi}{\partial x}, -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right]$$

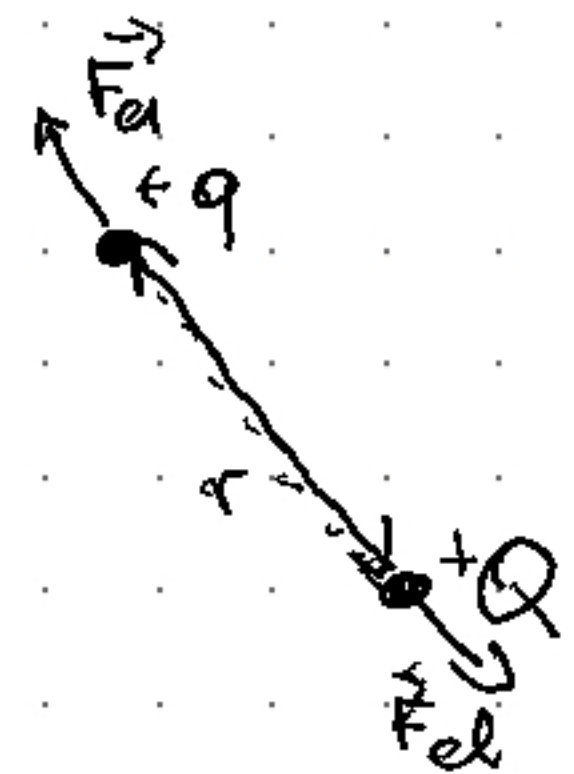
\uparrow gradient \parallel E_x \parallel E_y \parallel E_z

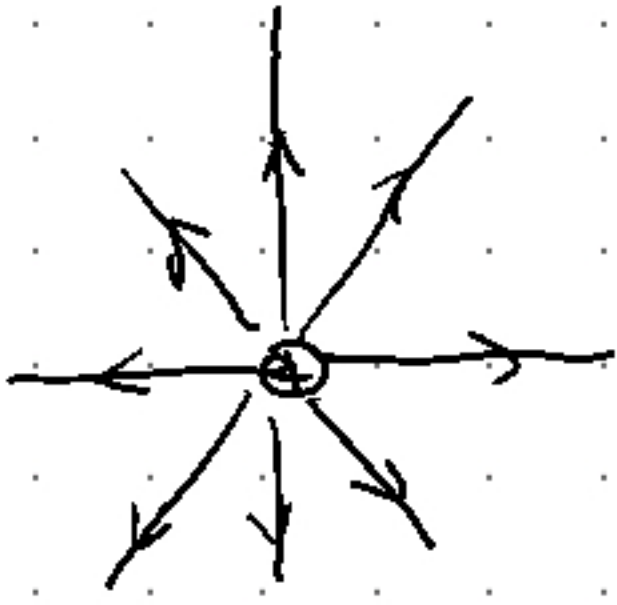
Zwykle interesuje nas wartość pola wzdłuż konkretnego kierunku.

■ Prawo Coulomba

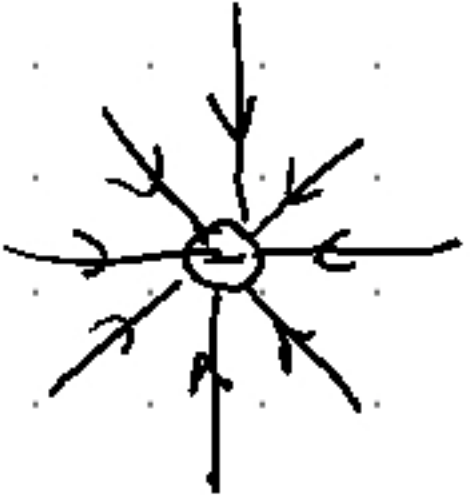
Wartość siły działającej między dwoma ładunkami punktowymi q i Q wynosi:

$$F_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2}, \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$



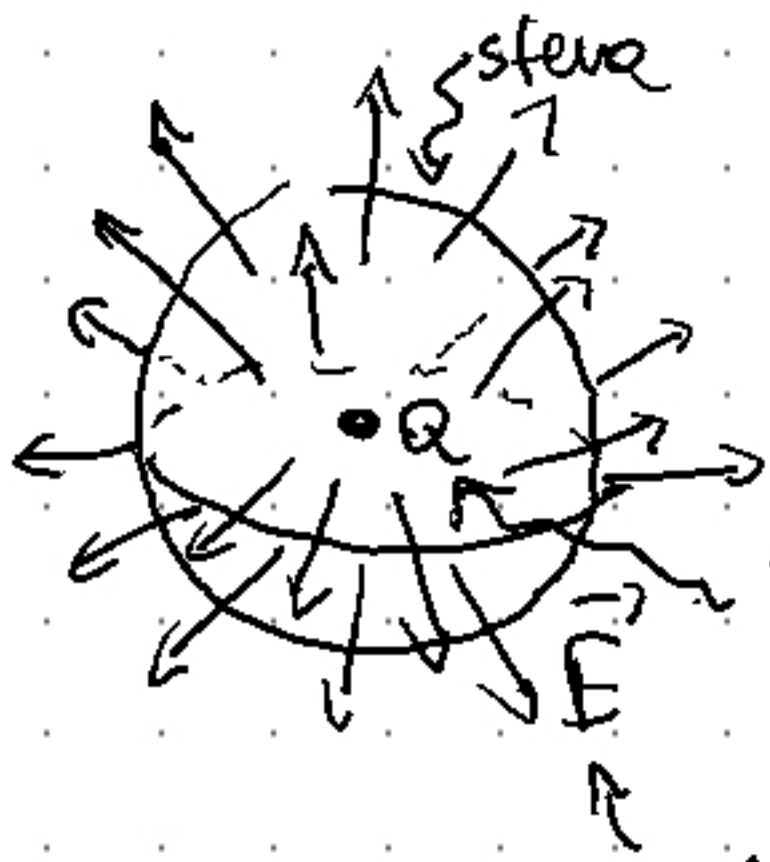


Linie pola elektrycznego są tym gęstsze im silniejsze pole. Zwrót linii pokazuje się z zwrótem siły jeśli ładunek dodatni. Takunek próbny q_0 .



ładunki różnoimiennie się przyciągają, a jednoimiennie się odpychają.

Pole pochodzące od ładunku punktowego jest sferycznie symetryczne, tzn.



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

wektor w kierunku radialnym

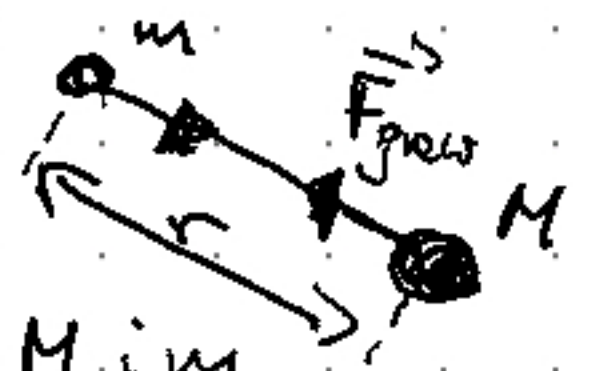
wszystkie wektory natężenia pola elektrycznego na tej sferze są równe co do wartości i prostopadłe do powierzchni sfery o środku w ład. Q.

Dygresja: Grawitacja - prawo powszechnego ciążenia

Dla grawitacji sytuacja jest analogiczna

$$F_{\text{grav}} = \frac{GMm}{r^2}$$

← siła grawitacji



tu także możemy wprowadzić natężenie pola grawitacji

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_{\text{grav}}}{m} = \frac{GM}{r^2} \hat{r}$$

↑ dla masy punktowej / kuli

między masami M i m (oddziaływanie zawsze przyciągające)

które jest związane z potencjałem grawitacyjnym

$$\vec{g} = -\vec{\nabla} \varphi_{\text{grav.}} \quad , \quad \varphi_{\text{grav.}} = \frac{E_{\text{pot.}}}{m}$$

↑ masa próbna.

- Potencjał elektrostatyczny od ładunku punkowego

Potencjał elektrostatyczny możemy policzyć

jako stosunek pracy wykonanej przez siłę

\vec{F}_{el} przy przenoszeniu ładunku z pewnego

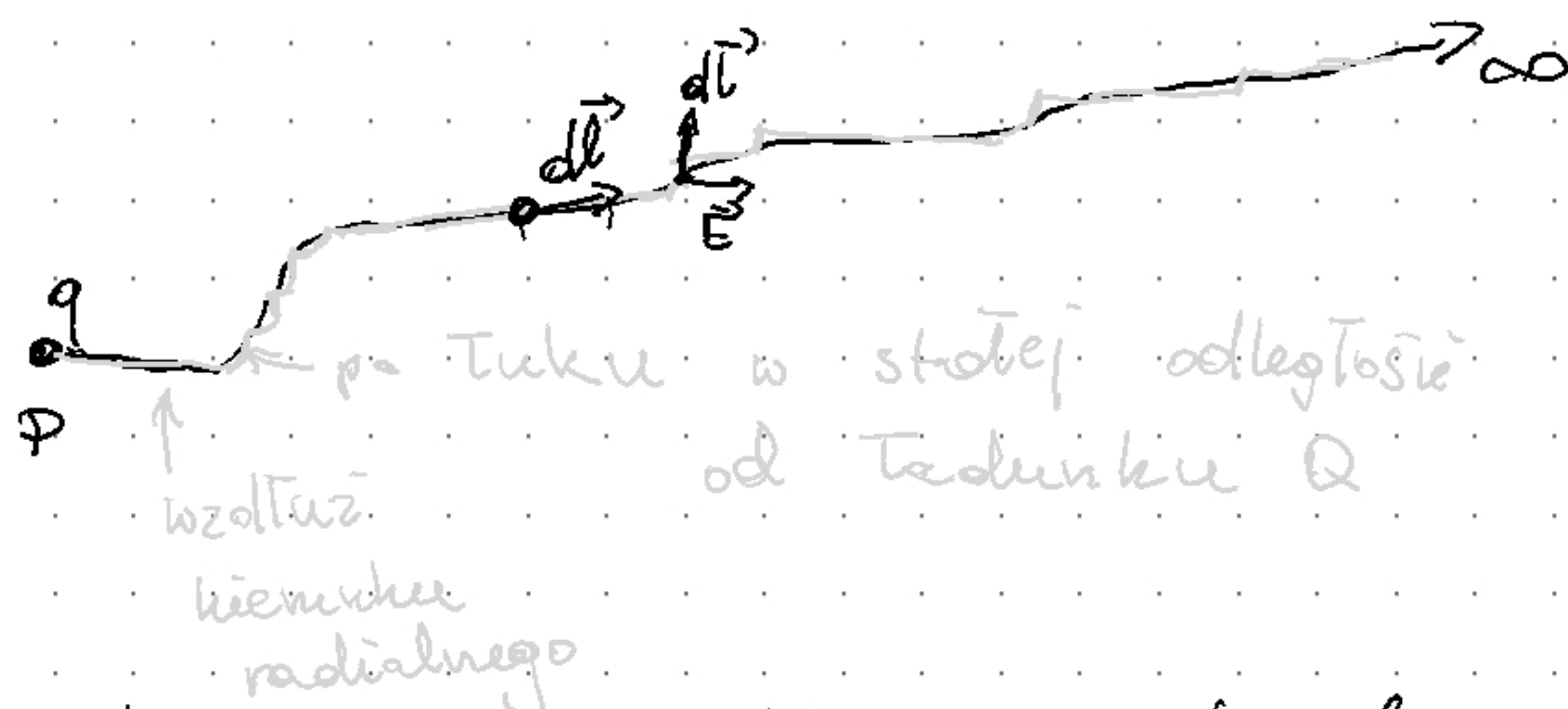
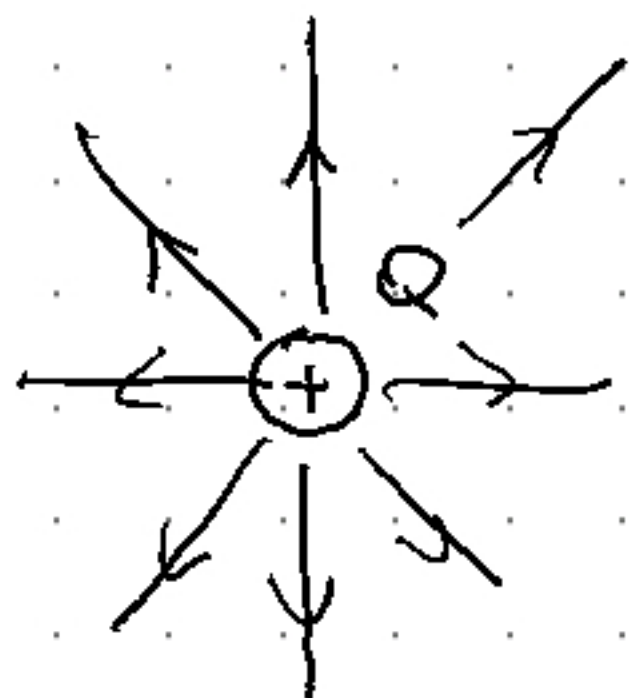
punktu P do ∞ dzielonej przez wartość

tego ładunku:

$$\varphi(P) = \frac{W_{P \rightarrow \infty}}{q} = \frac{1}{q} \int_P^{\infty} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{l} = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

↑ element $d\vec{l}$ równoległy do trajektorii po której przenoszą ładunek do nieskończoności

Dla ładunku punkowego mamy:



Ponieważ pole od ładunku punkowego jest sferycznie symetryczne, więc

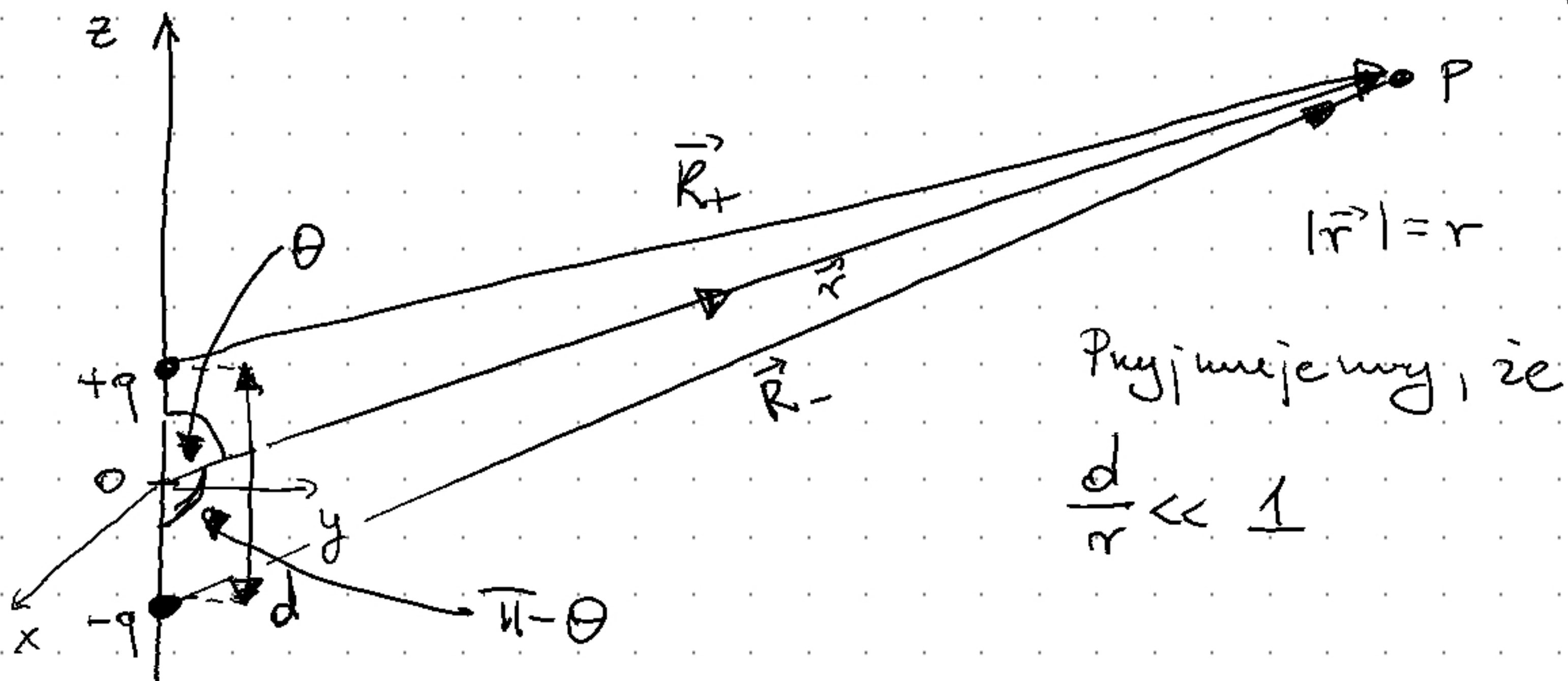
- $\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ na łuku będący fragmentem okręgu o środku w ład. Q
- $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E dr$ wzdłuż kierunku radialnego

Dowodząc trajektorie mogą zatem "wyprostować":

$$\varphi = \int_R^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_R^{\infty} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

Napięcie to różnica potencjałów w dwóch różnych punktach: $U = |\varphi(A) - \varphi(B)| = \left| \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \right|$

■ Rozwinięcia multipolowe - dipol elektryczny



Potencjał w punkcie P pochodzący od ładunków $+q$ i $-q$ wynosi:

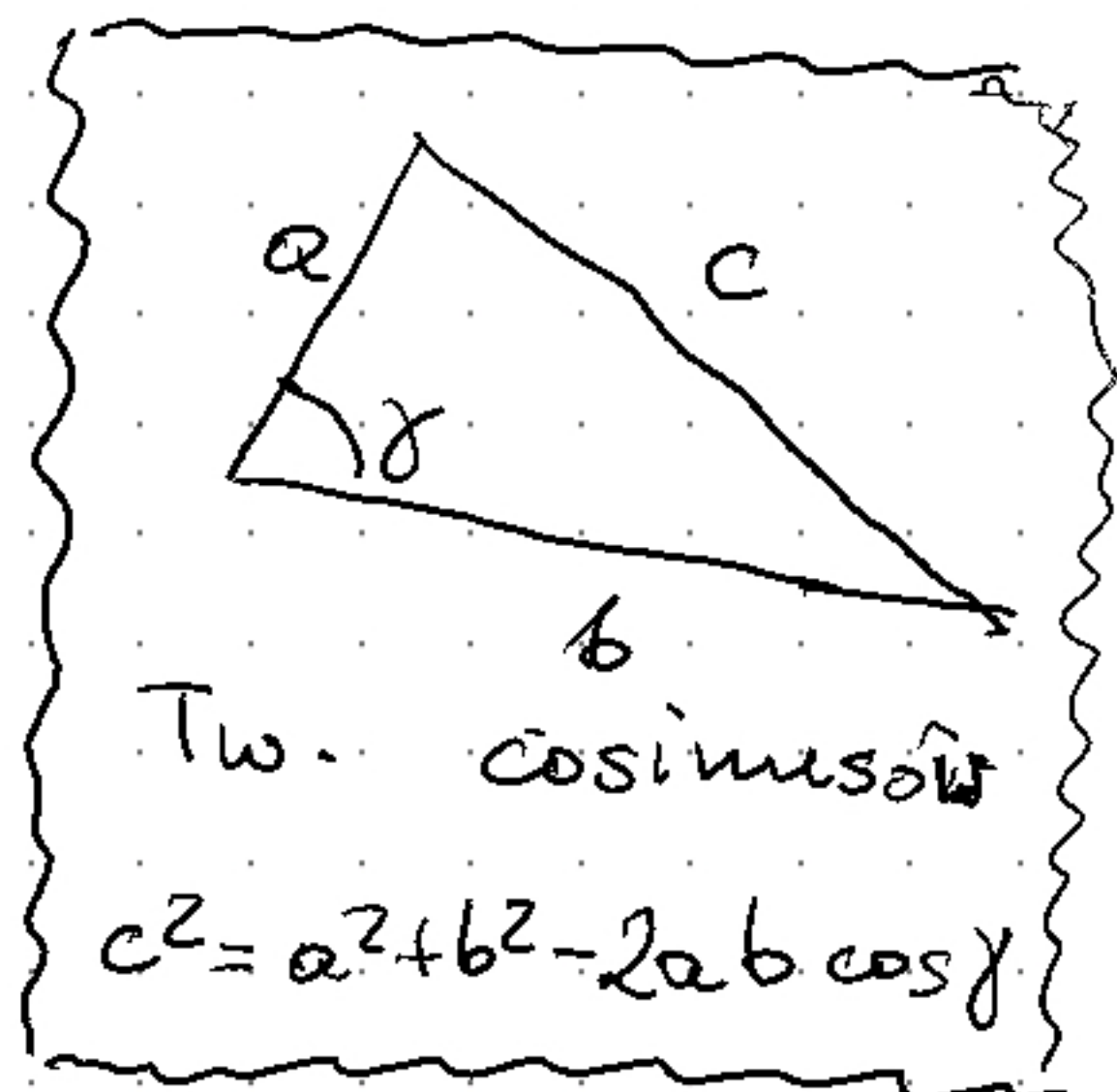
$$\varphi(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} \right]$$

Stosujemy tw. cosinusów:

$$R_+^2 = r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2r \frac{d}{2} \cos \theta =$$

$$= r^2 \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{r}\right)^2 - \frac{d}{r} \cos \theta \right]$$

$$R_-^2 = r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2r \frac{d}{2} \cos(\pi - \theta) = r^2 \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{r}\right)^2 + \frac{d}{r} \cos \theta \right]$$



$\varepsilon = \frac{d}{r} \ll 1$, czyli $\varepsilon \ll \varepsilon^2$, więc
 zaniedbujemy mianownik wyższego rzędu,
 wtedy

$$\frac{1}{R_{\pm}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4}\varepsilon^2 \mp \varepsilon \cos\theta\right)^{1/2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 \mp \varepsilon \cos\theta\right)^{-1/2} =$$

$$= \frac{1}{r} \left[\left(1 \mp 0 \cdot \cos\theta\right)^{-1/2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 \mp 0 \cdot \cos\theta\right)^{-3/2} (\mp \cos\theta) \cdot \varepsilon + \dots \right] =$$

↑
 stosujemy wzór
 Taylora: $f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots$

$$= \frac{1}{r} \left[1 \mp \frac{1}{2} \varepsilon \cos\theta + \dots \right] = \frac{1}{r} \left[1 \mp \frac{d}{2r} \cos\theta + \dots \right],$$

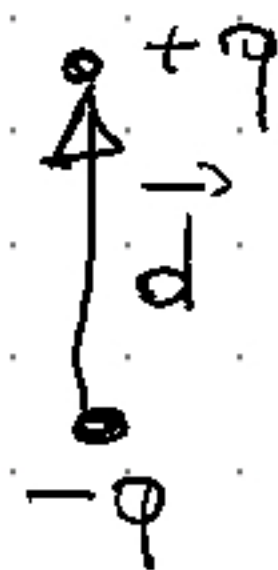
czyli

$$\varphi(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r} \left(1 + \frac{d}{2r} \cos\theta\right) - \frac{1}{r} \left(1 - \frac{d}{2r} \cos\theta\right) + \dots \right] =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d}{r^2} \cos\theta = \frac{q d \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Wprowadzamy moment dipolowy

$$\vec{p} = q \vec{d}, \quad |\vec{d}| = d,$$

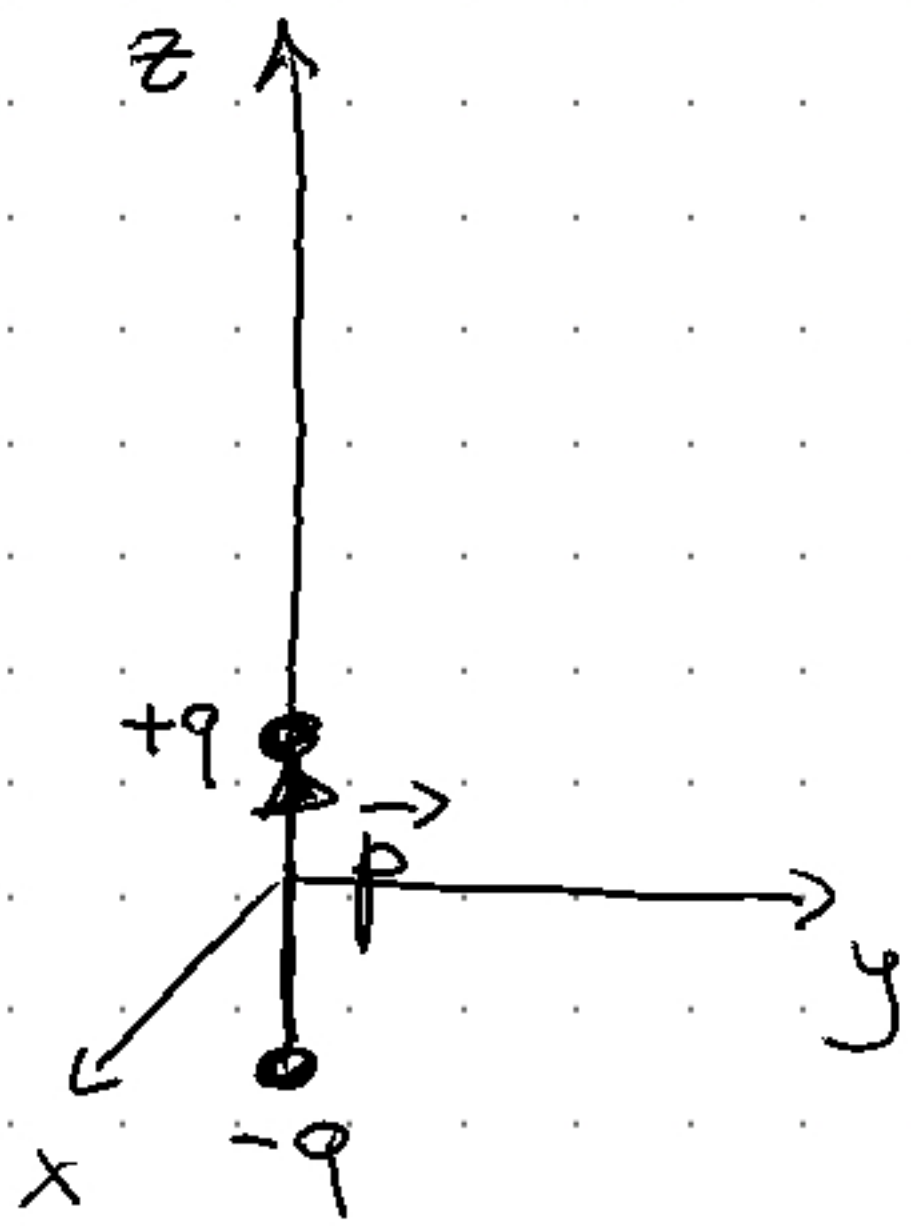


wtedy

$$\varphi(P) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Konstantując z $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$ policzymy teraz

wartości natężenia pola elektrycznego



$$\vec{p} = [0, 0, qd] = [0, 0, p]$$

$$\vec{r} = [x, y, z]$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

czyli

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{p z}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] =$$

$$= - \left[-\frac{3}{2} \frac{p z}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} 2x \right] =$$

$$= \frac{3 p x z}{4\pi\epsilon_0 r^5}$$

Dla E_y analogicznie:

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{3 p y z}{4\pi\epsilon_0 r^5}$$

Dla E_z mamy:

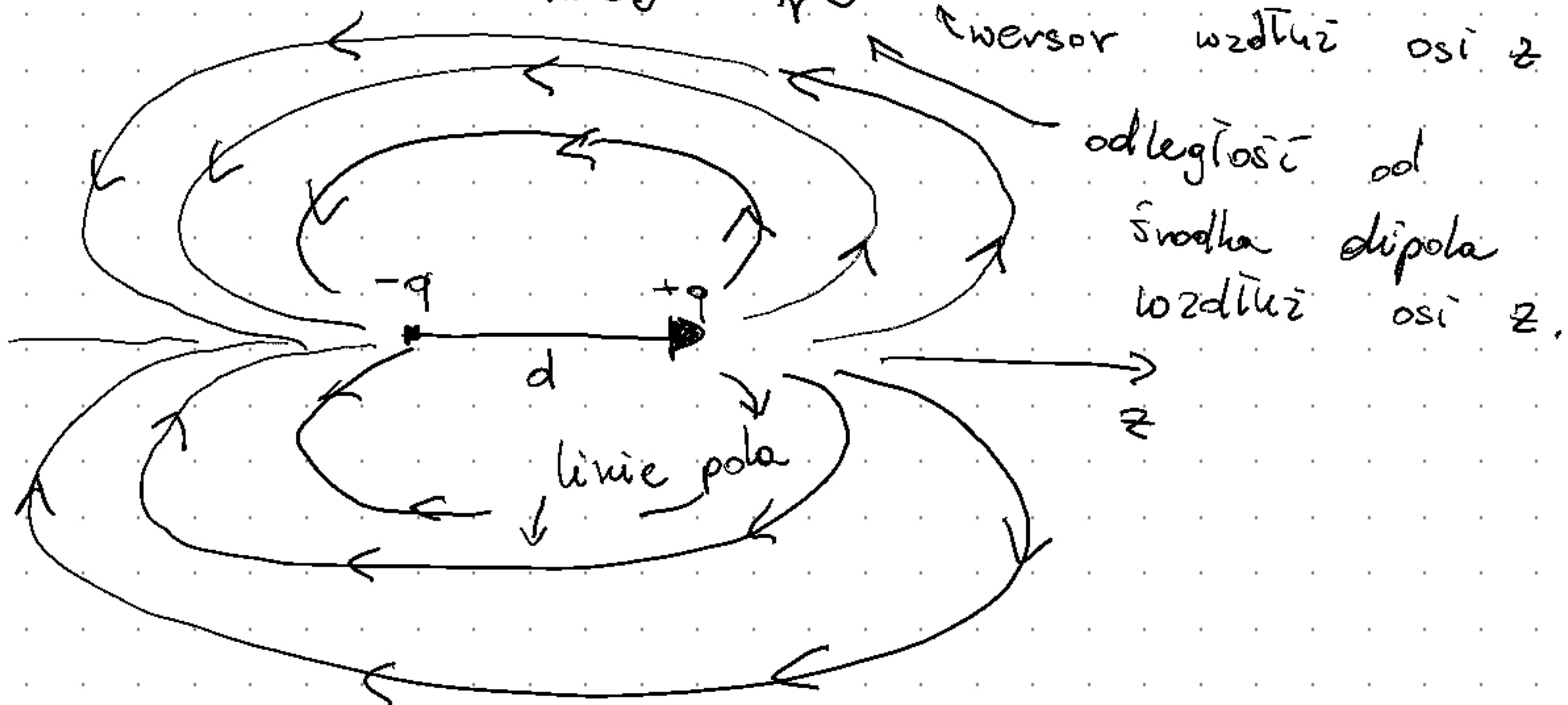
$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{p z}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] =$$

$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} - \left(-\frac{3}{2} \right) \frac{2 p z^2}{4\pi\epsilon_0 r^5} = \frac{3 p z^2}{4\pi\epsilon_0 r^5} - \frac{p r^2}{4\pi\epsilon_0 r^5}$$

6

W związku z tym pole elektryczne na osi dipola otrzymujemy wstawiając $x=y=0$, czyli $(r=z)$

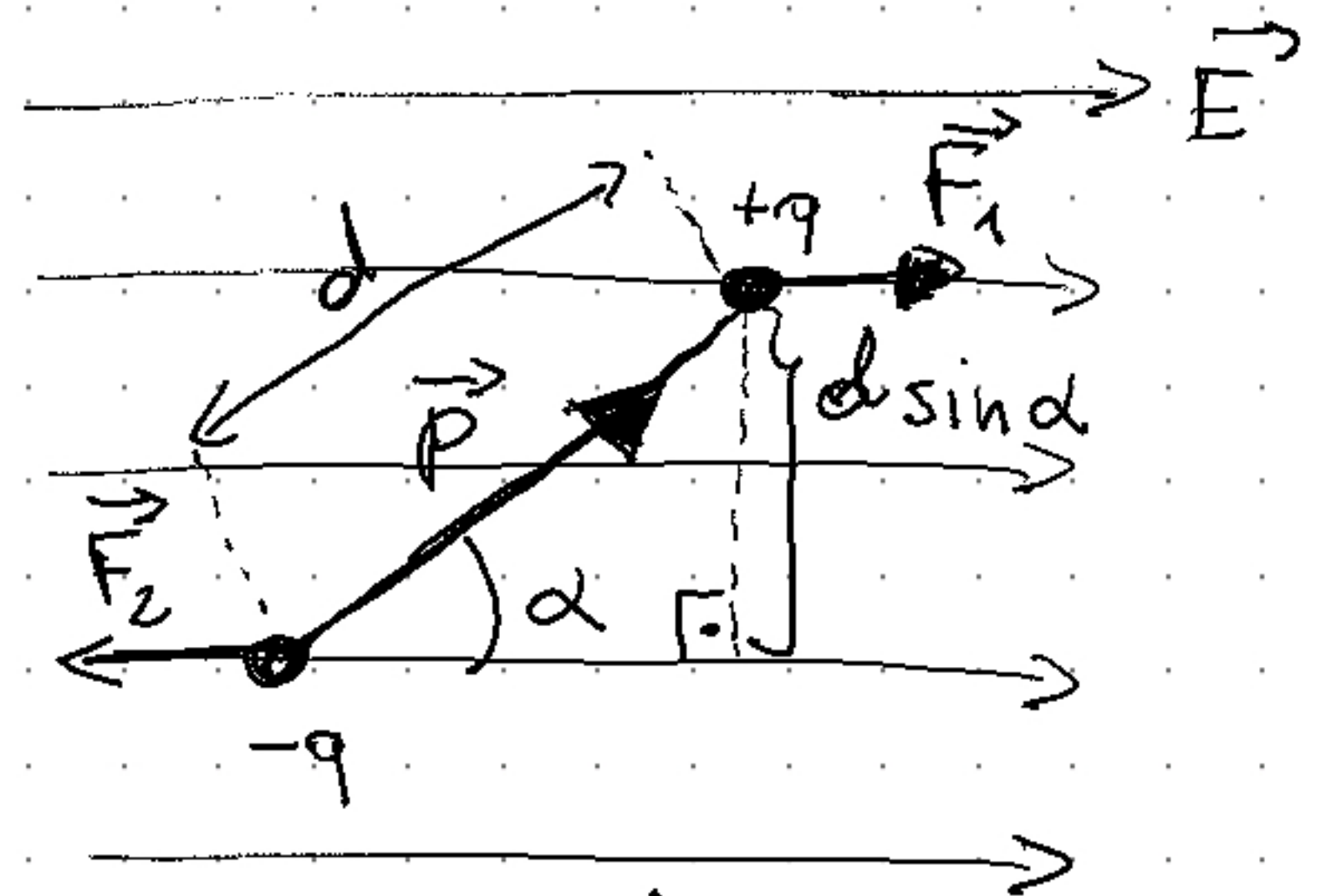
$$\vec{E}_{||} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} \hat{z}$$



Na dipol znajdujący się w zewnętrznym polu elektrycznym działa moment sił:

$$M = qEd \sin\alpha = pE \sin\alpha$$

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$



Energia potencjalna takiego dipola w zewnętrznym polu elektrycznym wynosi:

$$E_{pot} = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE \cos\alpha$$

W przypadku ogólnego rozkładu ładunków także możemy skonstruować rozwinięcie dipolowe, wtedy

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum_{i=1}^N q_i}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum_{i=1}^N \vec{r}_i q_i}{r^3} + \dots$$

monopol \rightarrow dipol \leftarrow kwadrupol, itd.

$$Q_{\text{całk}} = \sum_{i=1}^N q_i - \text{ładunek całkowity}$$

$$\vec{p}_{\text{całk}} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i - \text{całkowy moment dipolowy}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q_{\text{całk}}}{r} + \frac{\vec{p}_{\text{całk}} \cdot \vec{r}}{r^3} + \dots \right]$$

monopol \leftarrow dipol \leftarrow kwadrupol, oktupol, etc.

■ Małe drgania

Równanie oscylatora harmonicznego:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Rozwiązanie: $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

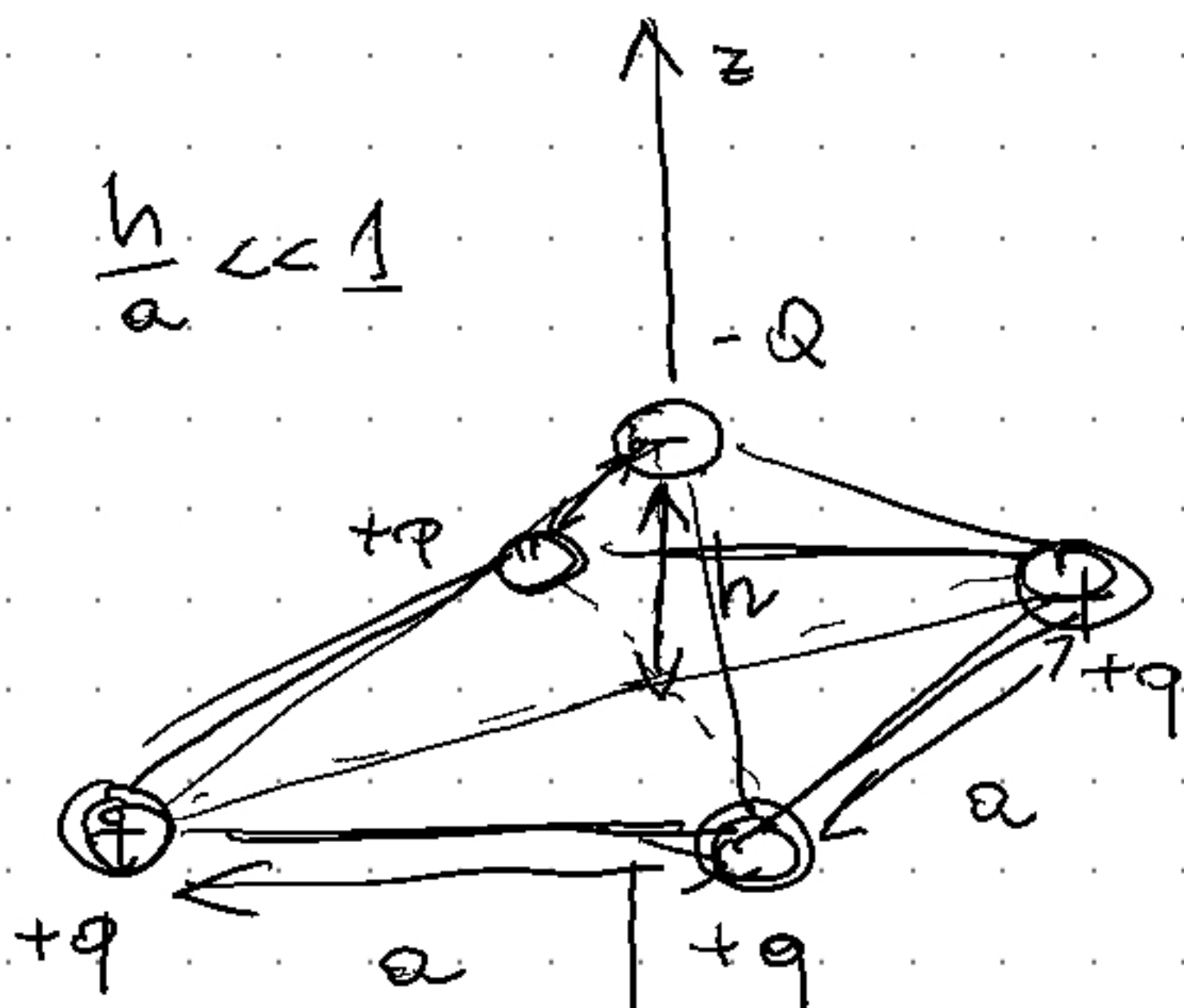
\uparrow
amplituda

\uparrow
częstość
kątowa

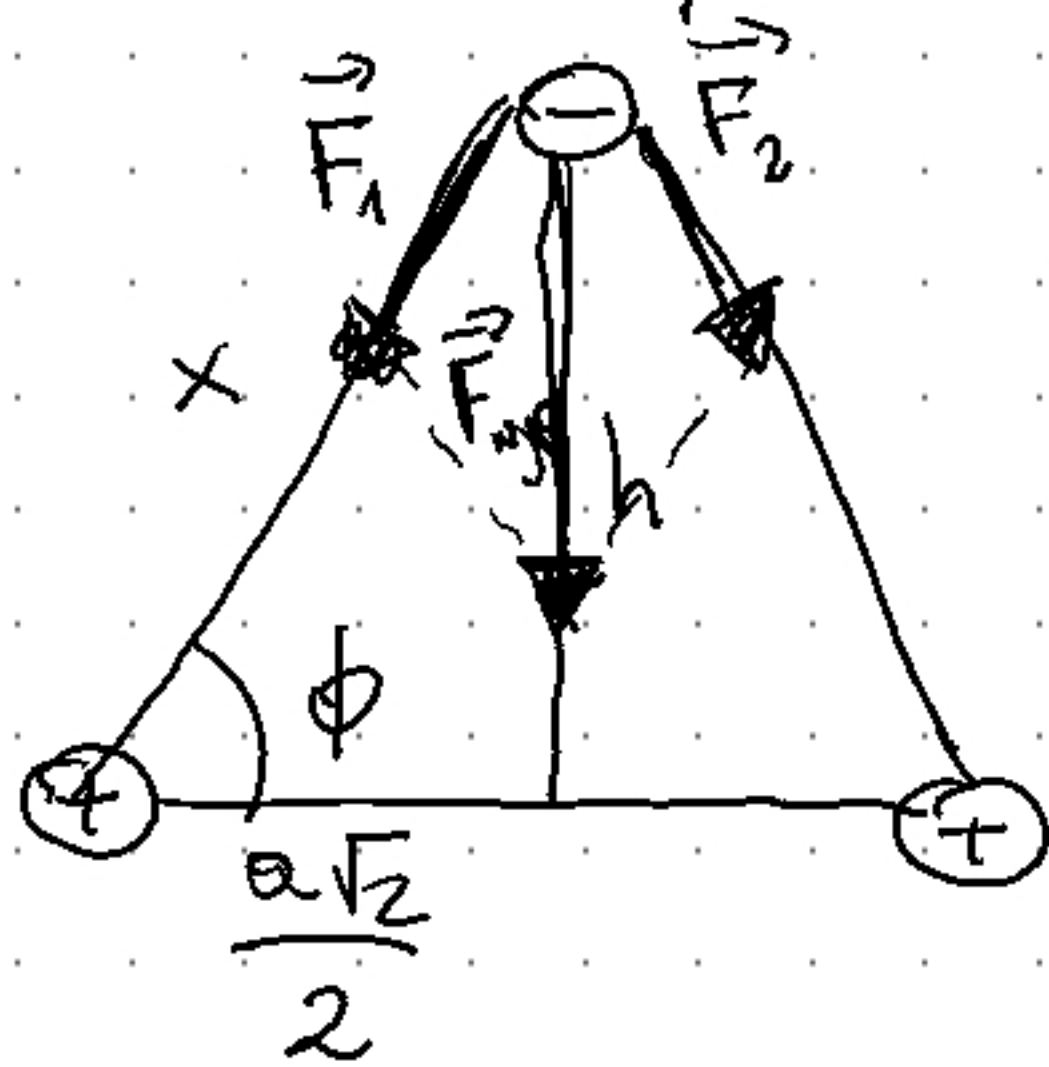
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$\left[\begin{array}{l} \text{pełne} \\ \text{wzruszenie} \end{array} \right]$
 \leftarrow przesunięcie
fazowe
ustaleni

$$\frac{h}{a} \ll 1$$



ładunki dodatnie są zamocowane, ładunek $-Q$ może poruszać się wzdłuż osi z .



$$X = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{2h^2}{a^2} \right)^{1/2}$$

$$\sin \phi = \frac{h}{X}$$

$$F_{wyp} = -4k \frac{qQ}{X^3} h$$

Stosujemy przybliżenie metody drgań ($\frac{h}{a} \ll 1$):

$$\frac{1}{X^3} = \frac{2^{3/2}}{a^3} \left[1 + \frac{2h^2}{a^2} \right]^{-3/2} =$$

$$\approx \frac{2^{3/2}}{a^3} \left[1 + \underbrace{\left(-\frac{3}{2} \right)}_{=0} \left[1 + \frac{2h^2}{a^2} \right]^{-5/2} \frac{4h}{a^2} \cdot h + \dots \right]_{h=0} =$$

$$\approx \frac{2^{3/2}}{a^3} \quad \text{1 wykład}$$

$$m \ddot{h} = -8\sqrt{2} k \frac{qQ}{a^3} h$$

$$\ddot{h} + \frac{8\sqrt{2} k qQ}{m a^3} h = 0, \leftarrow \text{r. oscylatora harmonicznego}$$

wtedy okres drgań wynosi:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m a^3}{8\sqrt{2} k qQ}}$$

■ Liczby zespolone

← jednostka urojona

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1$$

↑
l. zespolona

1°) Dodawanie liczb zespolonych

$$z = x + iy, \quad w = a + ib$$

$$z + w = (x + a) + i(y + b)$$

2°) Mnożenie liczb zespolonych

$$z \cdot w = (x + iy)(a + ib) = xa + i^2 yb + ixb + iya =$$

$$= (xa - yb) + i(xb + ya)$$

3°) Sprzężenie zespolone i moduł

$$z = x + iy$$

$$z^* = x - iy$$

sprzężenie zespolone

$$|z|^2 = z \cdot z^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \text{moduł}$$

4°) Część rzeczywista i urojona

$$z = x + iy$$

$$\operatorname{Re}(z) = x$$

$$\operatorname{Im}(z) = y$$

↑ część rzeczywista

↑ część urojona

5°) Dzielnie liczb zespolonych

$$z/w = \frac{x+iy}{a+ib} = \frac{x+iy}{a+ib} \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{xa+yb+i(ya-xb)}{a^2+b^2}$$

wyfli $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{xa+yb}{a^2+b^2}$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{ya-xb}{a^2+b^2}$$

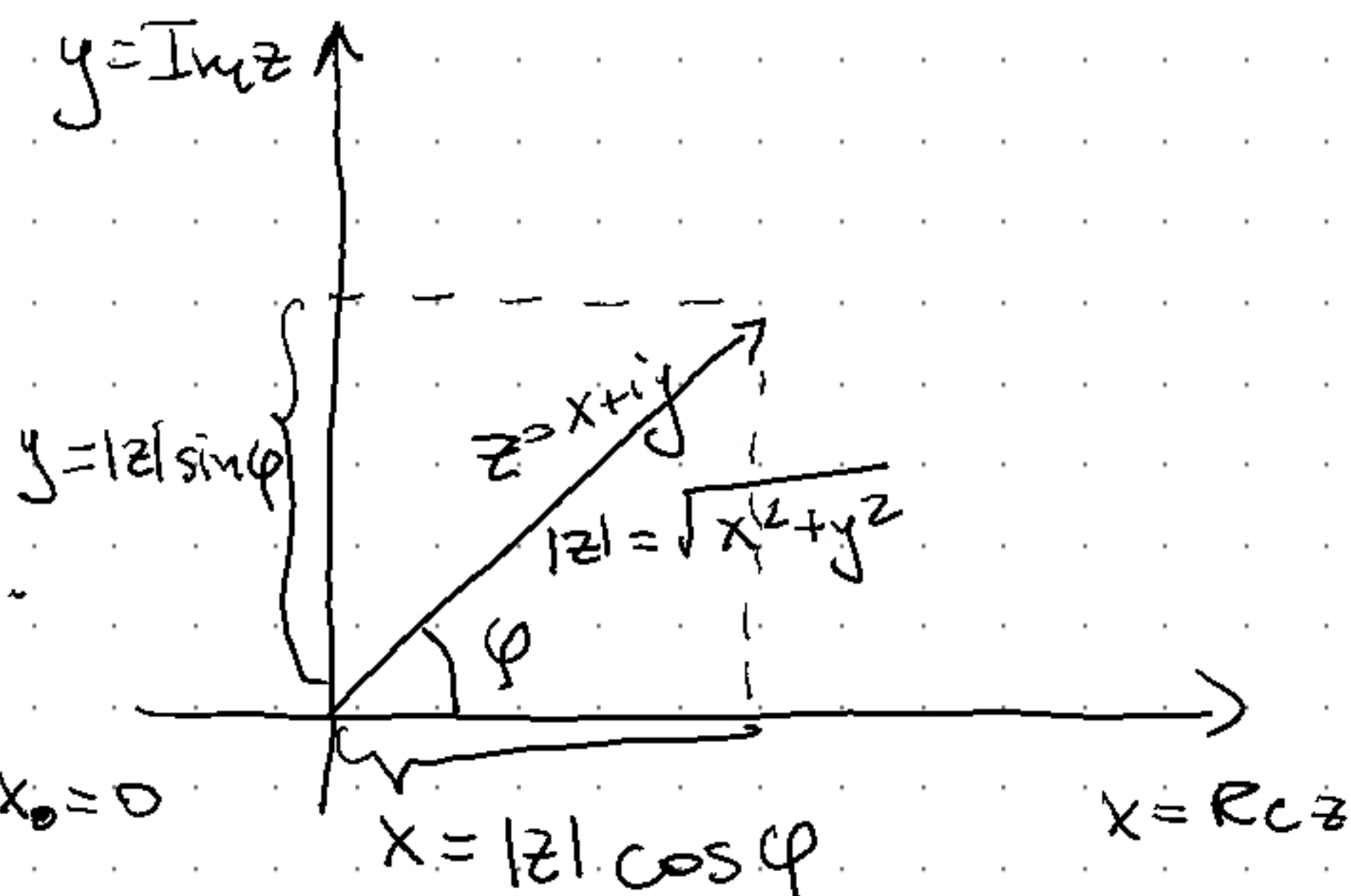
6°) Interpretacja graficzna

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

↑
rozwiijam

w szereg Taylora dla $x_0 = 0$



$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{1}{2!}(i\varphi)^2 + \frac{1}{3!}(i\varphi)^3 + \dots =$$

$$= \left[1 - \frac{1}{2!}\varphi^2 + \frac{1}{4!}\varphi^4 - \dots \right] + i \left[\varphi - \frac{1}{3!}\varphi^3 + \frac{1}{5!}\varphi^5 - \dots \right]$$

$$\sin\varphi \stackrel{\uparrow}{=} \varphi - \frac{1}{3!}\varphi^3 + \frac{1}{5!}\varphi^5 - \dots$$

rozw. w szereg Taylora

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots$$

↑
rozw. w szereg Taylora

cykli poprzez porównanie

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (\text{wzór Eulera})$$

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| e^{i\varphi} = x + iy$$

Dodawanie dwóch liczb zespolonych

odpowiada graficznie dodawanie wektorów

im odpowiedzającym. Sprzężenie zespolone

jest za to odbiciem wektora względem

osi x .

7°) Wzór de Moivre'a

$$z^n = |z|^n (e^{i\varphi})^n = |z|^n e^{in\varphi} = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Przykładowe zastosowanie:

$$\bullet) (e^{i\varphi})^2 = e^{i2\varphi} = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi$$

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + 2i \sin \varphi \cos \varphi,$$

cykli

$$\cos(2\varphi) = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$$

$$\sin(2\varphi) = 2 \sin \varphi \cos \varphi$$

Polecam poprobowować wygenerować inne

tożsamości trygonometryczne.

np. dla $\cos(\varphi_1 + \varphi_2)$

8°) Alternatywna postać $\sin \varphi$ i $\cos \varphi$

$$\begin{cases} e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \\ e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi \end{cases}$$

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2 \cos \varphi \quad + \leftarrow \text{dodaje równanie stronami}$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i \sin \varphi \quad - \leftarrow \text{odejmuje stronami}$$

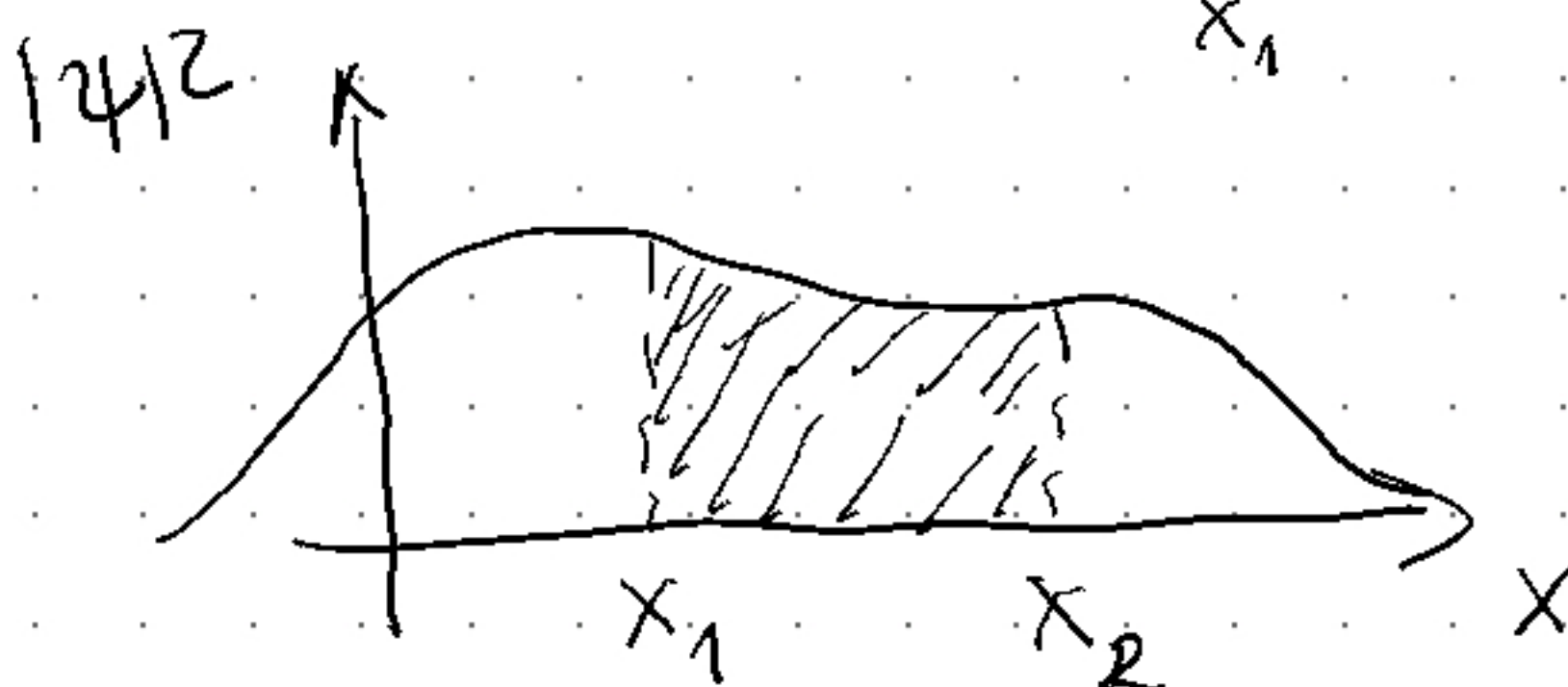
$$\Rightarrow \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

■ Dygresja: Skąd biorą się dyskretne poziomy energetyczne w mechanice kwantowej?

$\psi(x)$ - funkcja falowa

$|\psi(x)|^2 = \psi^*(x) \psi(x)$ - gęstość prawdopodobieństwa

$P(x \in [x_1, x_2]) = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx$ - prawdopodobieństwo, że cząstka



znajduje się w przedziale

$[x_1, x_2]$

Warunek, że cząstka jest gładka:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx \quad (\text{tzw. warunek normalizacji})$$

Energia cząstki można wyznaczyć z tzw. równania Schrödingera:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x) \psi(x) = E \psi(x)$$

↑
operator
rozmiarkowej
energii
kinetycznej

↑
potencjał
w którym
cząstka się
porusza

↑
energia
cząstki

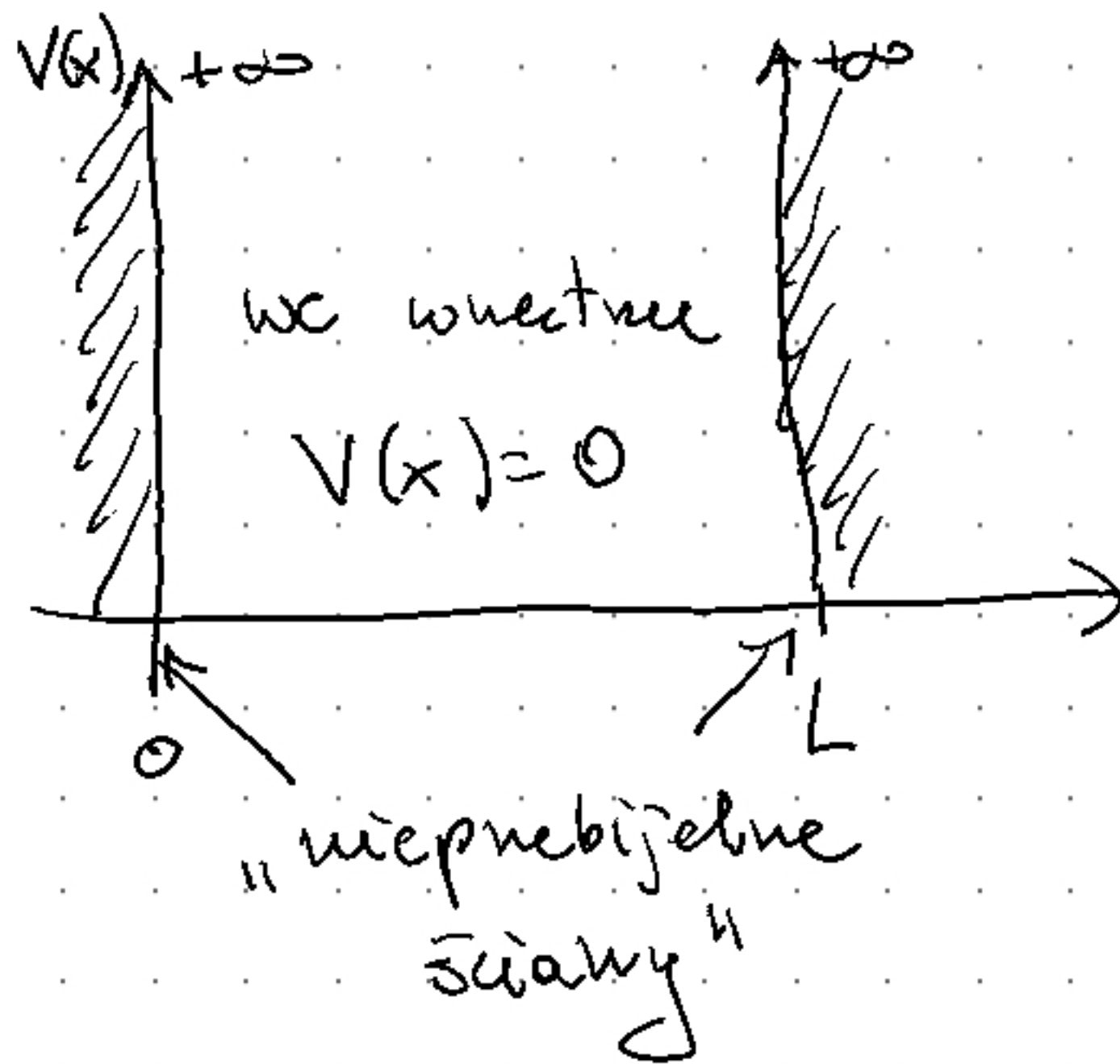
$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

stała Plancka

Rozważmy najprostszy przypadek:

Nieprzebijalne ściany oznaczają, że cząstki nie może tam być, czyli $\psi(0) = \psi(L) = 0$

Rozważane równanie ma postać równania oscylatora harmonicznego:



$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = E \psi(x) \quad \text{dla } x \in [0, L]$$

⇓

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) = 0 \quad (*)$$

k^2 - wprowadzamy oznaczenie

Postulujemy rozwiązanie

$$\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$$

$$\frac{d\psi}{dx} = Ak \cos(kx) - Bk \sin(kx)$$

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -Ak^2 \sin(kx) - Bk^2 \sin(kx)$$

Wstawiając do (*) wszystko się zgadza. Ponadto mamy warunki:

$$\psi(0) = \psi(L) = 0$$

$$1^o) \quad \psi(0) = A \sin(0) + B \cos(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\psi(L) = A \sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}$$

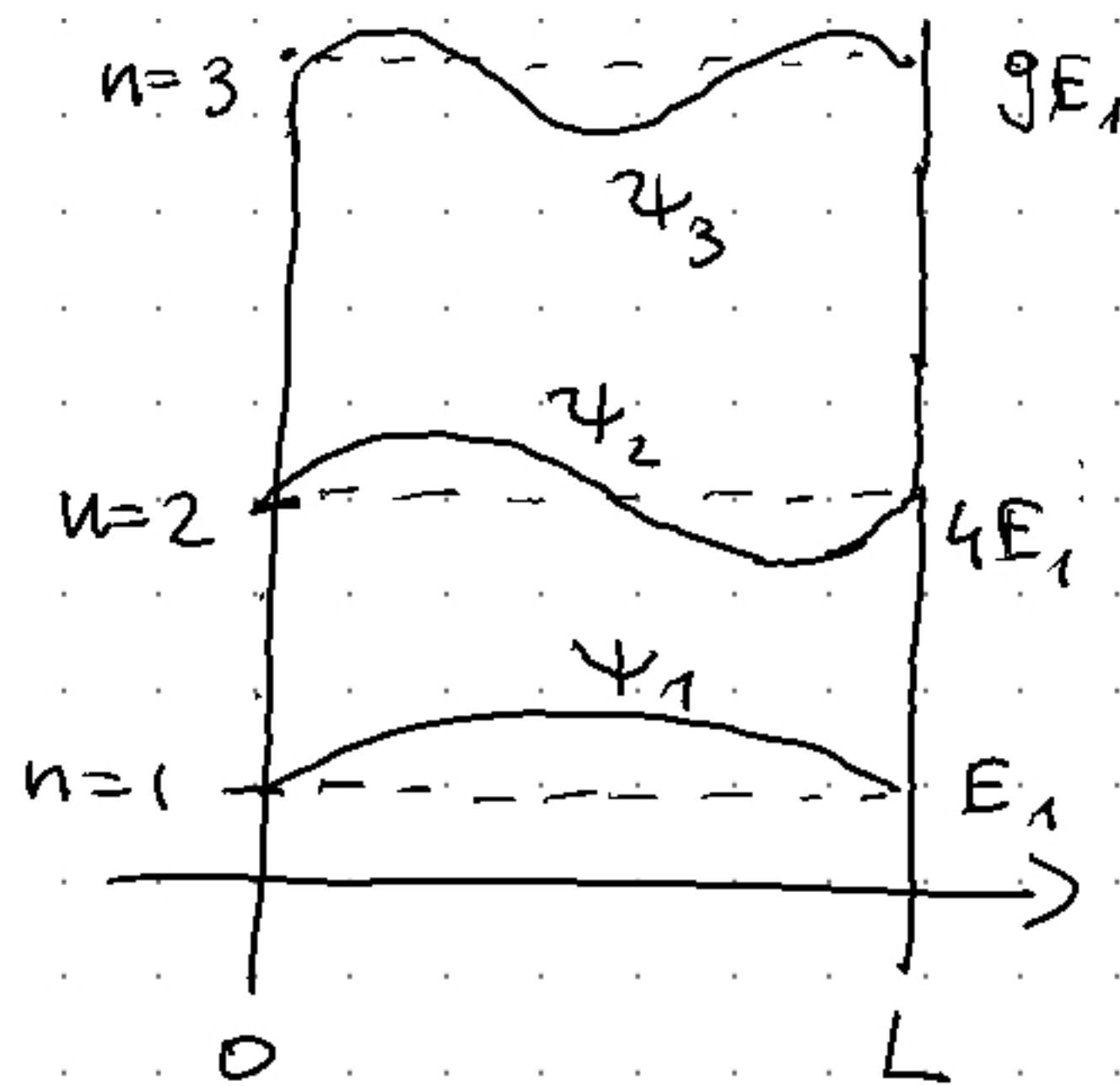
$$k^2 L^2 = n^2 \pi^2 \Rightarrow E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \quad \text{- stała dostępną energię}$$

$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

$$n=1 \quad , \quad E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

$$n=2 \quad , \quad E_2 = 4 \cdot E_1$$

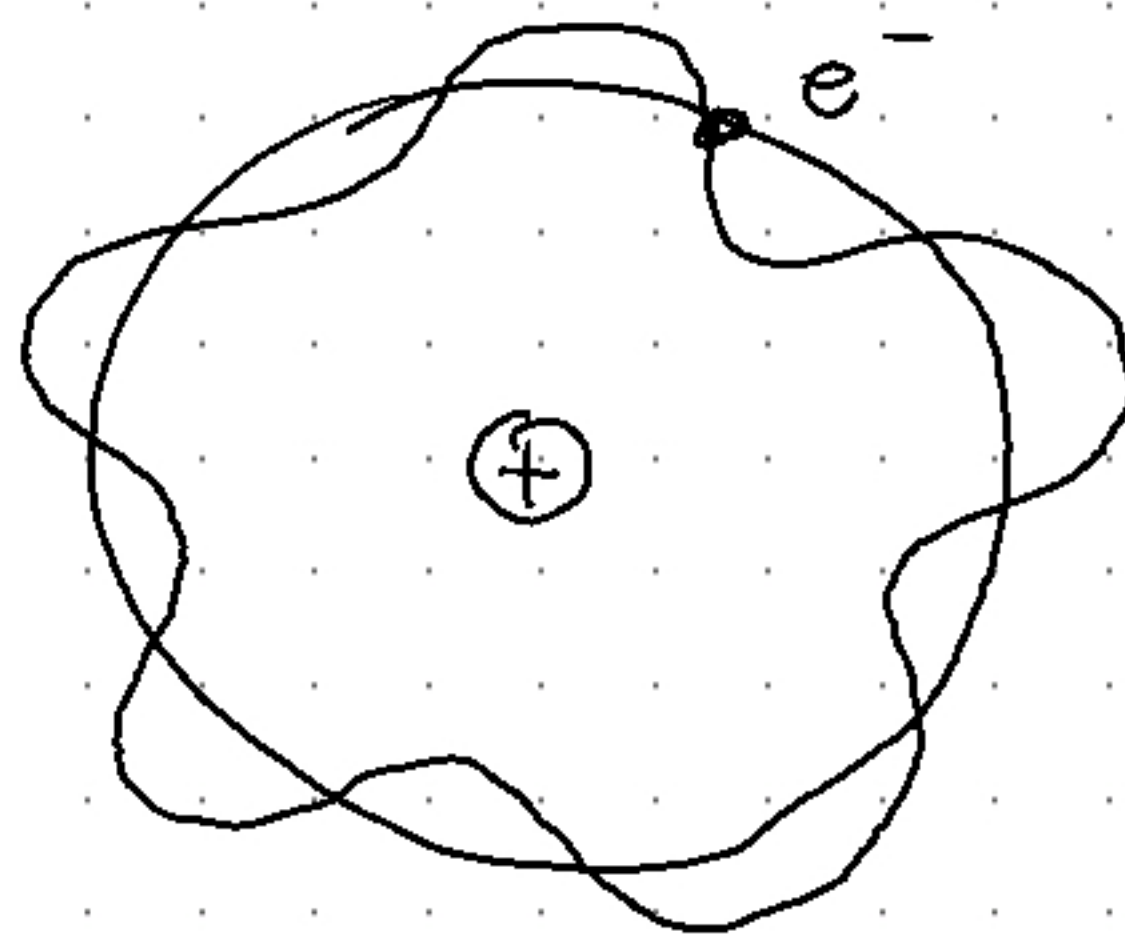
$$n=3 \quad , \quad E_3 = 9 \cdot E_1$$



Dostajemy tu fale

stojące wewnątrz studni potencjału, które prowadzą do dyskretnej poziomic energii:

W modelu Bohra dla atomu wodoru możemy ten wynik interpretować podobnie.



← fale stojące (dozwolone energie odpowiada zamkniętej orbicie)

Jest to interpretacja de Broglie'a.

W rzeczywistości problem ten jest trudniejszy, ale tym zajmować się nie studiach.