ELEKTROSTATYKA. METODA OBRAZÓW

3.01.2020

Metoda obrazów

__Obserwacja:__ powierzchnia przewodnika jest zarazem powierzchnią ekwipotencjalną.

__Fakt:__ Jeżeli znamy rozkład ładunków w rozważanym przez nas obszarze oraz warunki narzucone na powierzchni przewodnika, wtedy istnieje tylko jedna możliwa postać pola $\vec{E}$, która jest rozwiązaniem tego zagadnienia, w obszarze fizycznym (czyli tym na zewnątrz przewodnika). Mówi o tym tzw. twierdzenie o jednoznaczności.

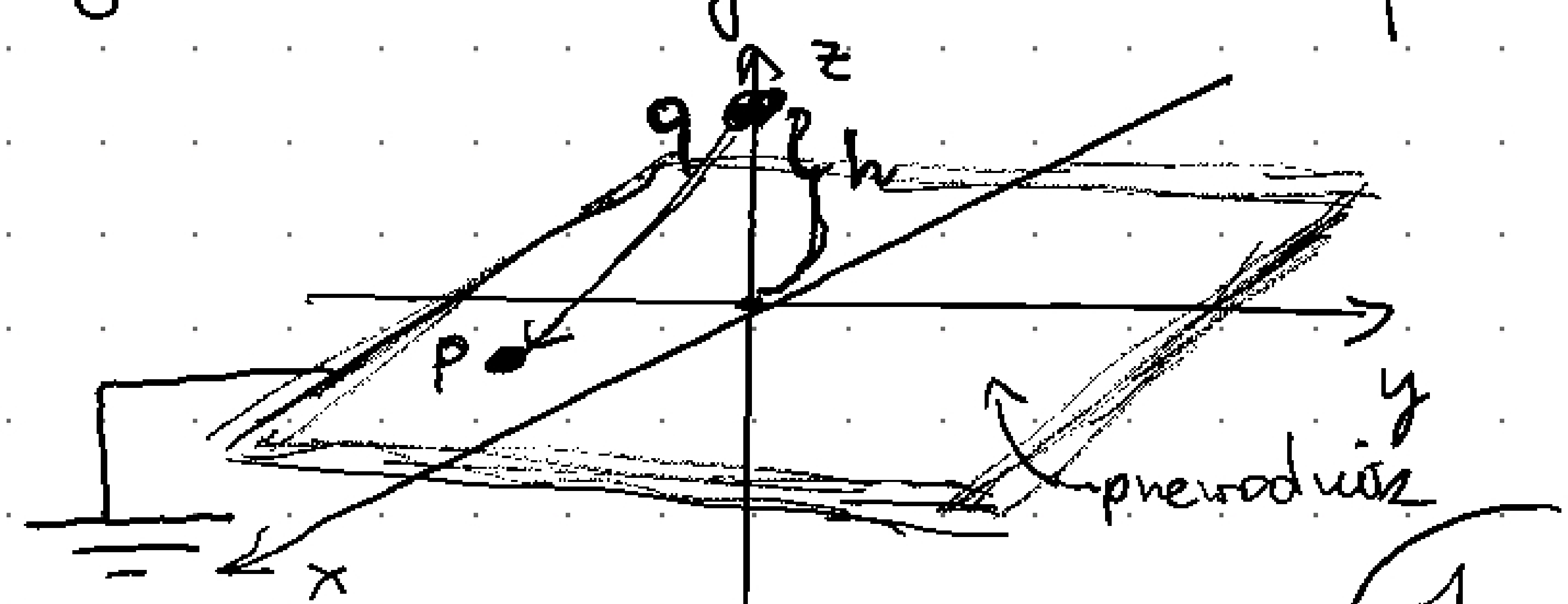
__Pomysł:__ Zgadnąć taki rozkład obrazowych ładunków w obszarze niefizycznym (po wewnętrznej stronie przewodnika) tak, aby spełnione były warunki na brzegu.

Przykłady:

1°) ładunek punktowy przy uziemionej nieskończonej płycie

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

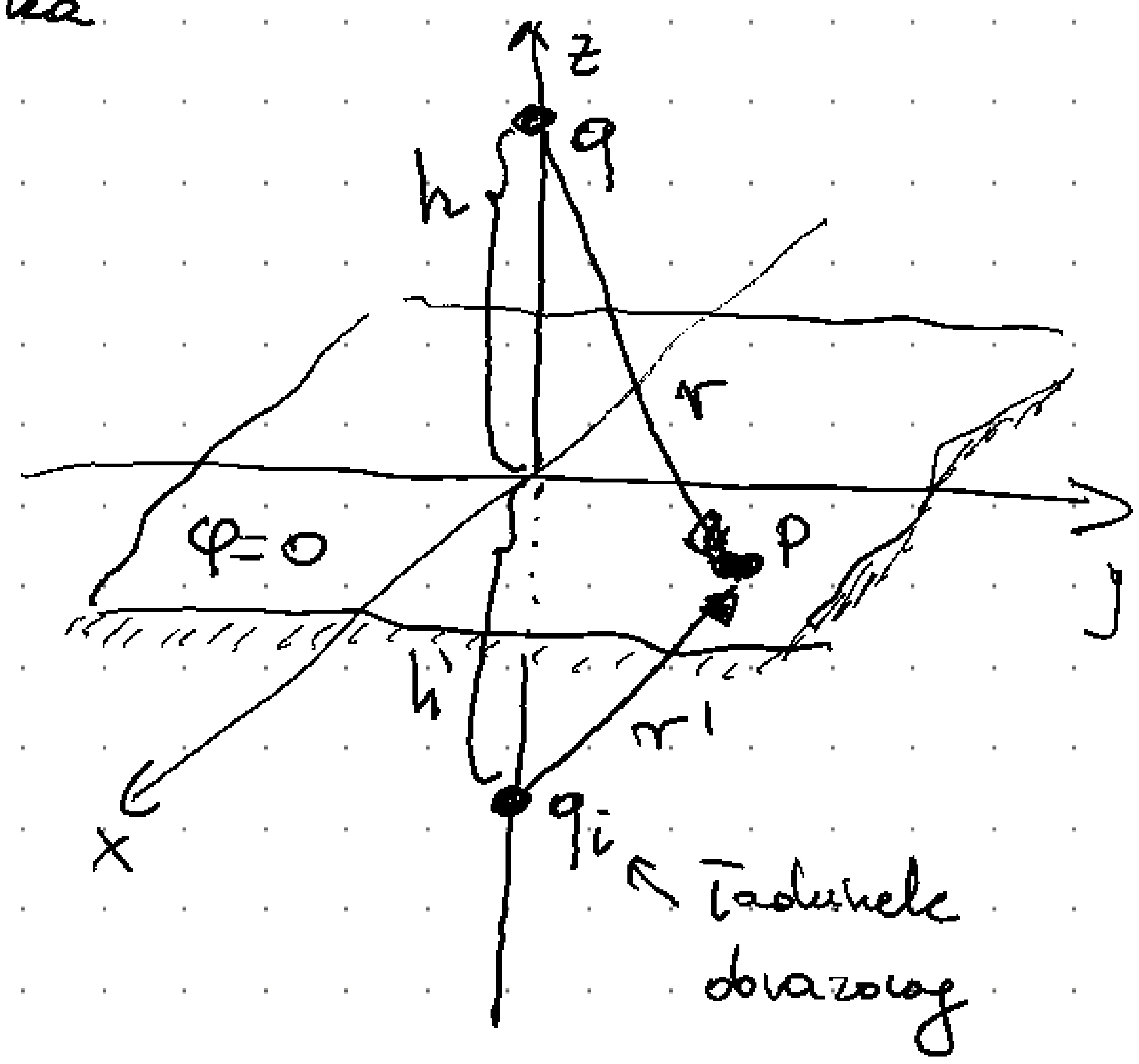


Płyta jest uziemiona, czyli potencjał na jej powierzchni wynosi $\varphi\big|_{\substack{\text{powierzchnia}\\ \text{przewodnika}}} = 0.$

W dowolnym punkcie P na powierzchni przewodnika chcę, aby

$$\varphi(r) + \varphi_i(r') = 0$$

potencjał pochodzący od ładunku we wnętrzu przewodnika



$$\Rightarrow \varphi_i(r') = -\varphi(r) \quad \underbrace{\forall}_{\text{dla każdego}} x, y$$

$$\varphi_i(r') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-q}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}}$$

Oznacza to, że ładunek obrazowy ma wartość $-q$ i znajduje się w odległości h od początku układu współrzędnych we wnętrzu przewodnika (czyli $z=-h$). Powyższa relacja jest spełniona dla każdego x i y na powierzchni przewodnika (czyli $z=0$).

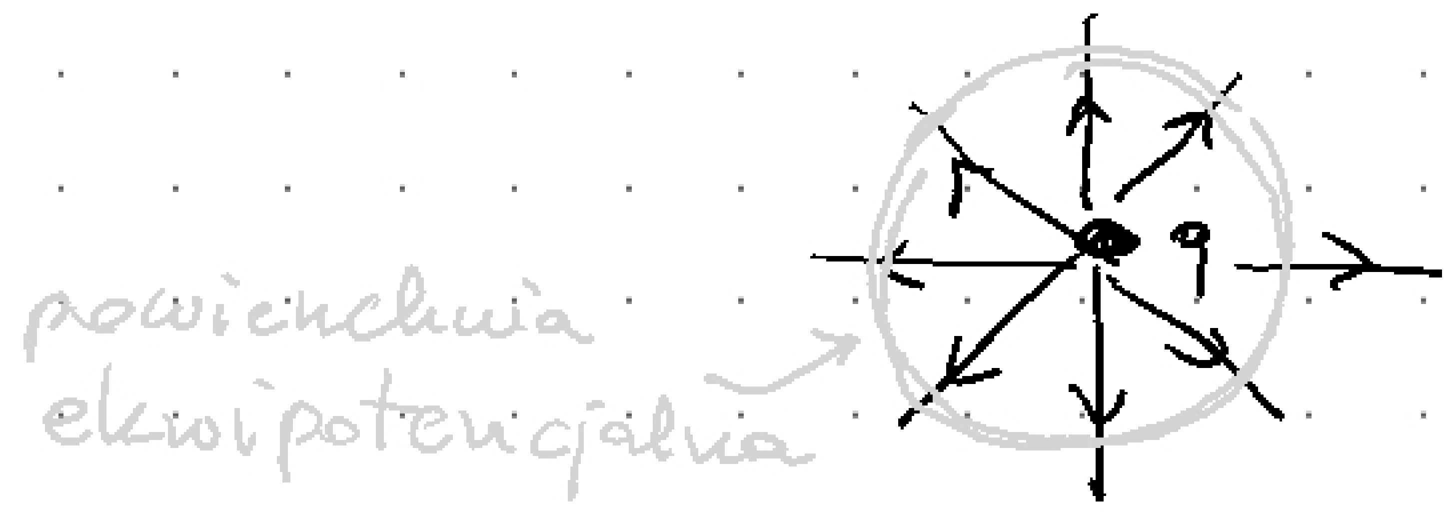
Siła działająca na ładunek q ze strony płyty wynosi:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-q}{(2h)^2} \hat{z} = -\frac{q}{16\pi\varepsilon_0 h^2} \hat{z}$$

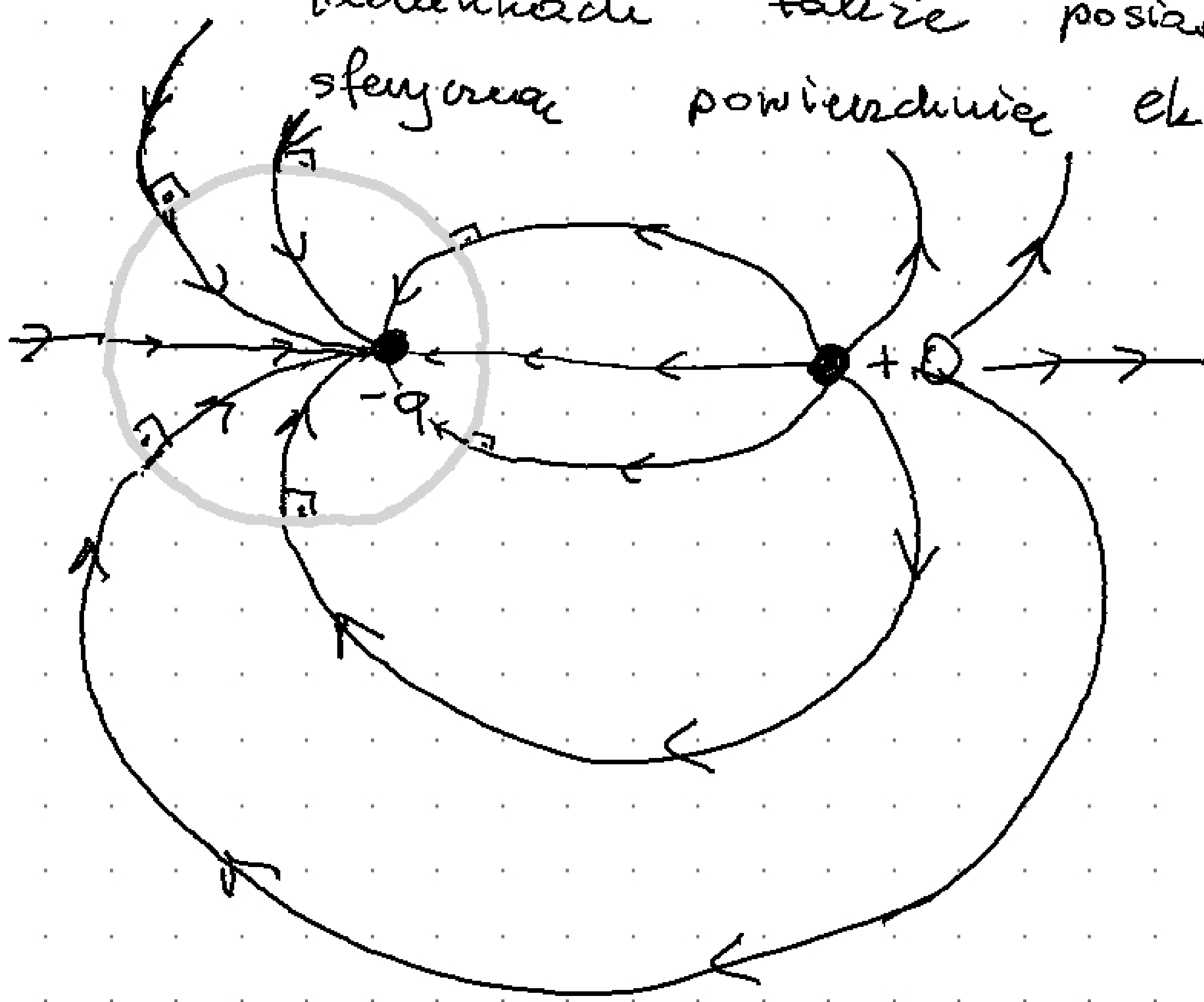
2°) Kula przewodząca o potencjale na jej powierzchni wynoszącym $\varphi\big|_{\substack{\text{powierzchnia}\\ \text{kuli}}} = V_0 \neq 0.$

Jaka siła będzie działać na ładunek q umieszczony w odległości xR od środka kuli? ($x \in [1, \infty[$).

Obserwacja 1°) Powierzchnie ekwipotencjalne wokół ładunku punktowego są sferycznie symetryczne.

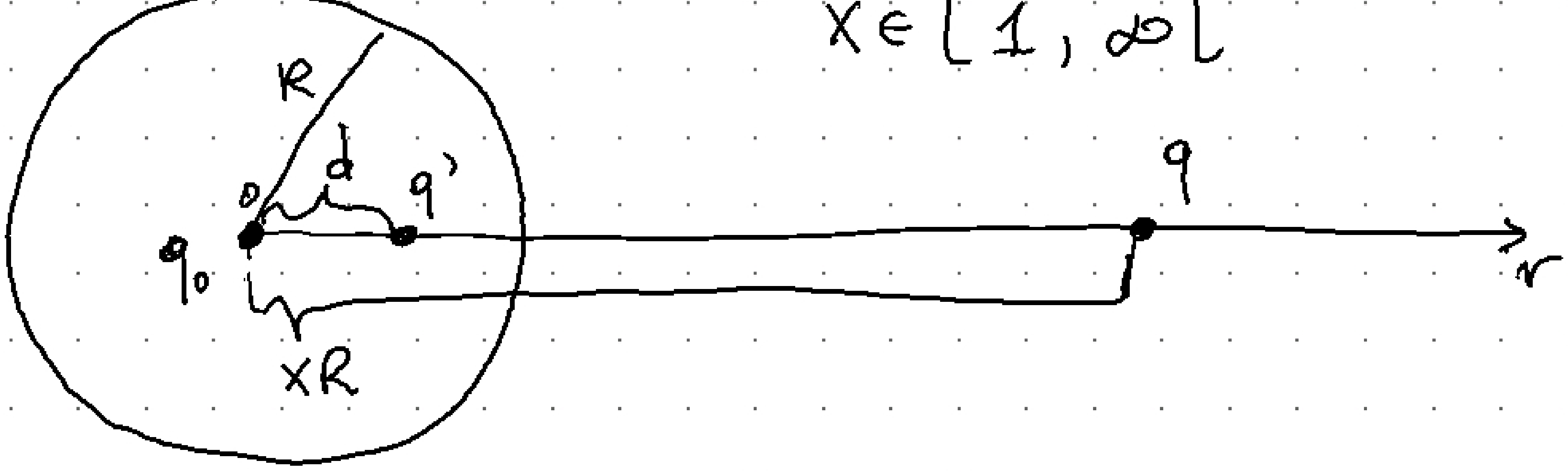


Obserwacja 2°) Dwa ładunki różnoimienne o różnych ładunkach także posiadają jedną sferyczną powierzchnię ekwipotencjalną



Korzystając z tych obserwacji postulujemy rozkład ładunków wewnątrz kuli

$x \in [1, \infty[$

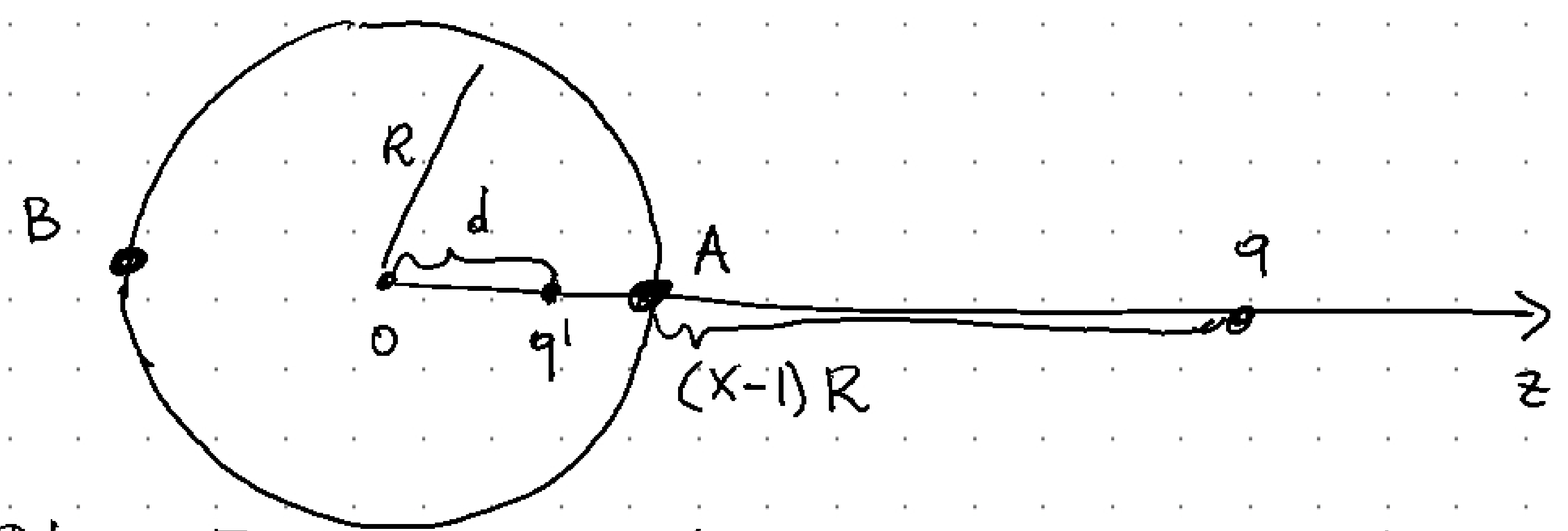


ładunek q_0 ma tylko podbijać potencjał na powierzchni kuli (bo potencjał od ładunku jest sferycznie symetryczny), czyli

Na powierzchni kuli

$$\varphi(R) = V_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{R} \Rightarrow q_0 = 4\pi\varepsilon_0 R V_0$$

Teraz zajmiemy się wyznaczeniem położenia i wartości ładunku q'. Traktując powierzchnię kuli jakby była uziemiona (bo potencjał na niej możemy zawsze zwiększyć wstawiając ładunek w jej środku):



Potencjał musi być równy zero na całej kuli, więc także w punkcie A i B, czyli

$$\begin{cases} A: & \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q'}{R-d} + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{(X-1)R} = 0 \\[2ex] B: & \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q'}{R+d} + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{(X+1)R} = 0 \end{cases}$$

Rozwiązujemy ten układ równań ze względu na d i q':

$$\begin{cases} \dfrac{q'}{R-d} = -\dfrac{q}{(x-1)R} \Rightarrow q' = -q\,\dfrac{R-d}{(x-1)R} = \dfrac{-q}{(x-1)}\left[1-\dfrac{d}{R}\right] \\[2ex] \dfrac{q'}{R+d} = -\dfrac{q}{(x+1)R} \Rightarrow -\dfrac{q}{(x-1)}\left[1-\dfrac{d}{R}\right] = -\dfrac{q}{(x+1)}\left[1+\dfrac{d}{R}\right] \end{cases}$$

$$1-\frac{d}{R} = \frac{x-1}{x+1} + \frac{d}{R}\,\frac{x-1}{x+1}$$

$$\underbrace{1-\frac{x-1}{x+1}}_{\frac{x+1-x+1}{x+1}=\frac{2}{x+1}} = \underbrace{\left(1+\frac{x-1}{x+1}\right)}_{\frac{x+1+x-1}{x+1}=\frac{2x}{x+1}}\frac{d}{R} \Rightarrow \boxed{d = \frac{R}{x}}$$

czyli

$$q' = -\frac{q}{x-1}\underbrace{\left[1-\frac{1}{x}\right]}_{\frac{x-1}{x}} = -\frac{q}{x}$$

odległość q' od q

$$R - \frac{1}{x}R + (x-1)R = R\left[\frac{x-1}{x} + [illegible]\right] = \frac{R}{x}\left[x^2-1\right]$$

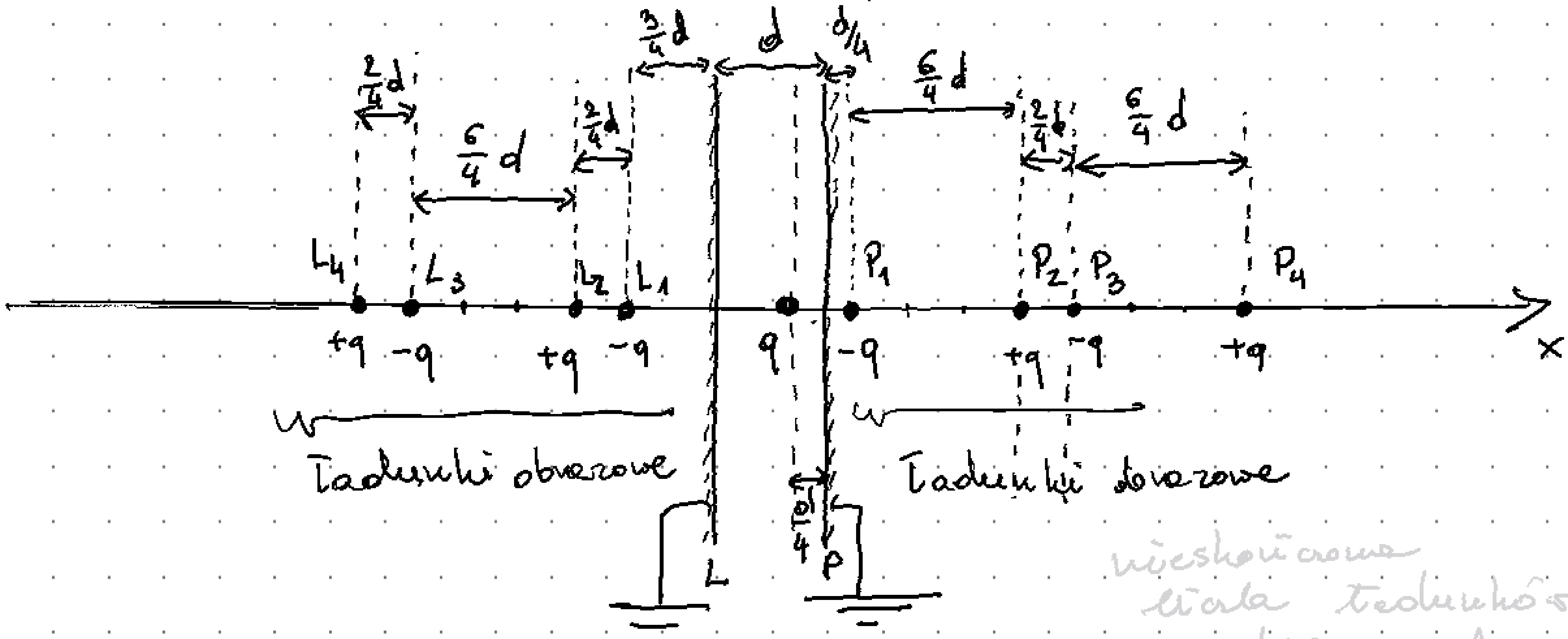
Zauważmy, że gdy $x=1$, czyli ładunek q jest na powierzchni, wtedy $q' = -q$ i $d=R$, czyli ładunek obrazowy i rzeczywisty się znoszą. Natomiast, gdy $x \to \infty$, wtedy $d \to 0$ i $q' \to 0$.

Siła działająca na ładunek q wynosi

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{4\pi\varepsilon_0 R V_0}{x^2R^2} - \frac{x\,q}{(x^2-1)^2R^2}\right]\hat{z}$$

← wer. łączący ładunki

3°) Wyznaczyć siłę działającą na ładunek między dwoma uziemionymi płytami z błędem względnym nie większym niż 2,5%.



nieskończona ilość ładunków obrazowych

Korzystamy z metody obrazów, przy czym ładunki obrazowe po prawo dają obrazy ze względu na powierzchnię przewodnika po lewo (rys. płyta L), a wszystkie ładunki obrazowe na lewo dają obrazy na płycie P (patrz rys.).

Niech $a = \frac{d}{4}$, wtedy ładunki po prawo znajdują się:

P: a, $(a+6a)$, $(a+6a+2a)$, $(a+6a+2a+6a)$, ...
Ładunek: $-$ $+$ $-$ $+$

analogicznie po lewo mamy:

L: $3a$, $(3a+2a)$, $(3a+2a+6a)$, $(3a+2a+6a+2a)$, ...
$-$ $+$ $-$ $+$

Siła działająca ze strony ładunków po prawo wynosi:

$$F_p = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(2^{-2} - 8^{-2} + 10^{-2} - 16^{-2} + \dots\right)$$

Siła działająca na ładunek q ze strony ładunków po lewo wynosi

$$F_L = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(-6^{-2} + 8^{-2} - 14^{-2} + 16^{-2} - \ldots\right),$$

czyli

$$F = F_p + F_L = \frac{q^2 4^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\left(\frac{1}{2^2} - \underbrace{\frac{1}{6^2}}_{2^2\cdot 3^2} + \underbrace{\frac{1}{10^2}}_{2^2\cdot 5^2} - \underbrace{\frac{1}{14^2}}_{2^2\cdot 7^2} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 d^2}\left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 d^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

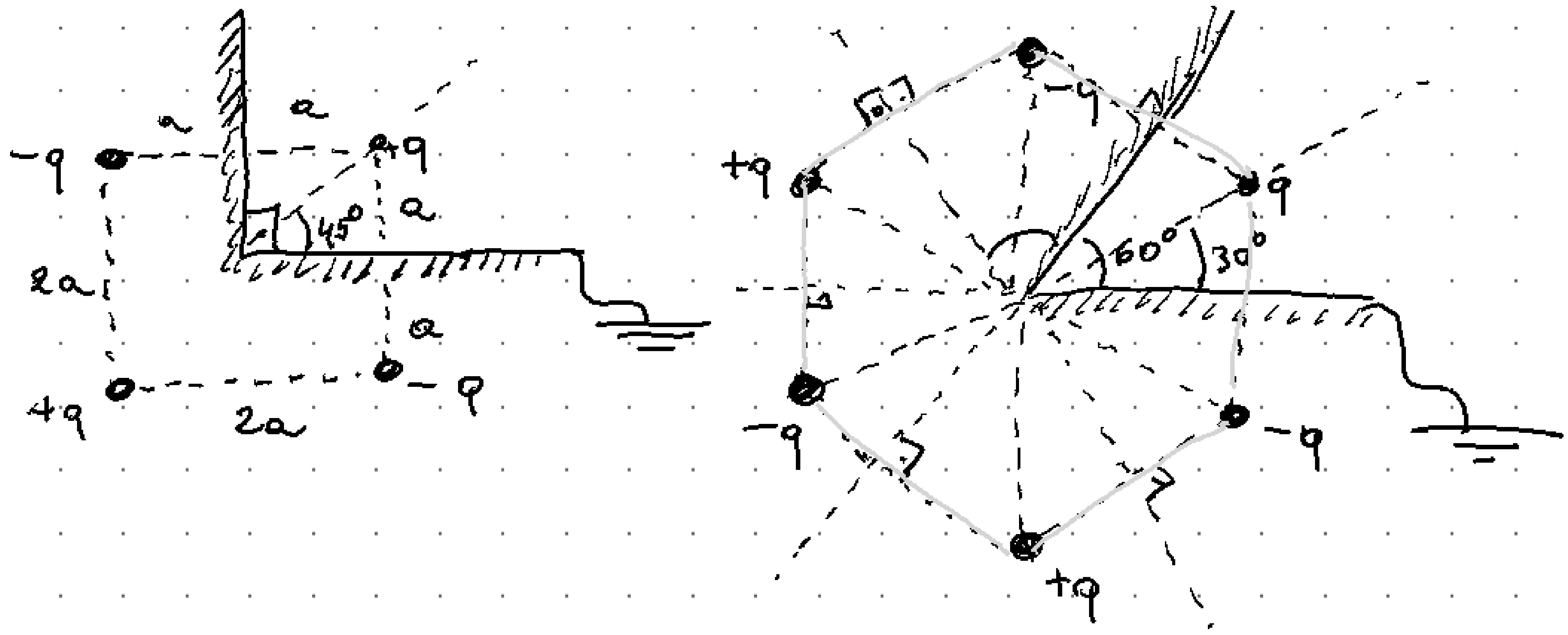
Błąd względny: $\frac{\Delta x}{x} = \frac{x - x_0}{x} \leq 2{,}5\%$

Ilość wyrazów	wartość liczbowa $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^{-2}$	błąd względny
1	1	—
2	$\frac{8}{9} = 0{,}88\ldots$	$\frac{(1-0{,}88)}{0{,}88} = 12{,}5\%$
3	$0{,}9288\ldots$	$\frac{1}{25}/0{,}9288 = 4{,}3\%$
4	$0{,}90839\ldots$	$\frac{1/49}{0{,}90839\ldots} = 2{,}3\%$,

czyli $F \simeq 0{,}91\,\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 d^2}$, gdzie

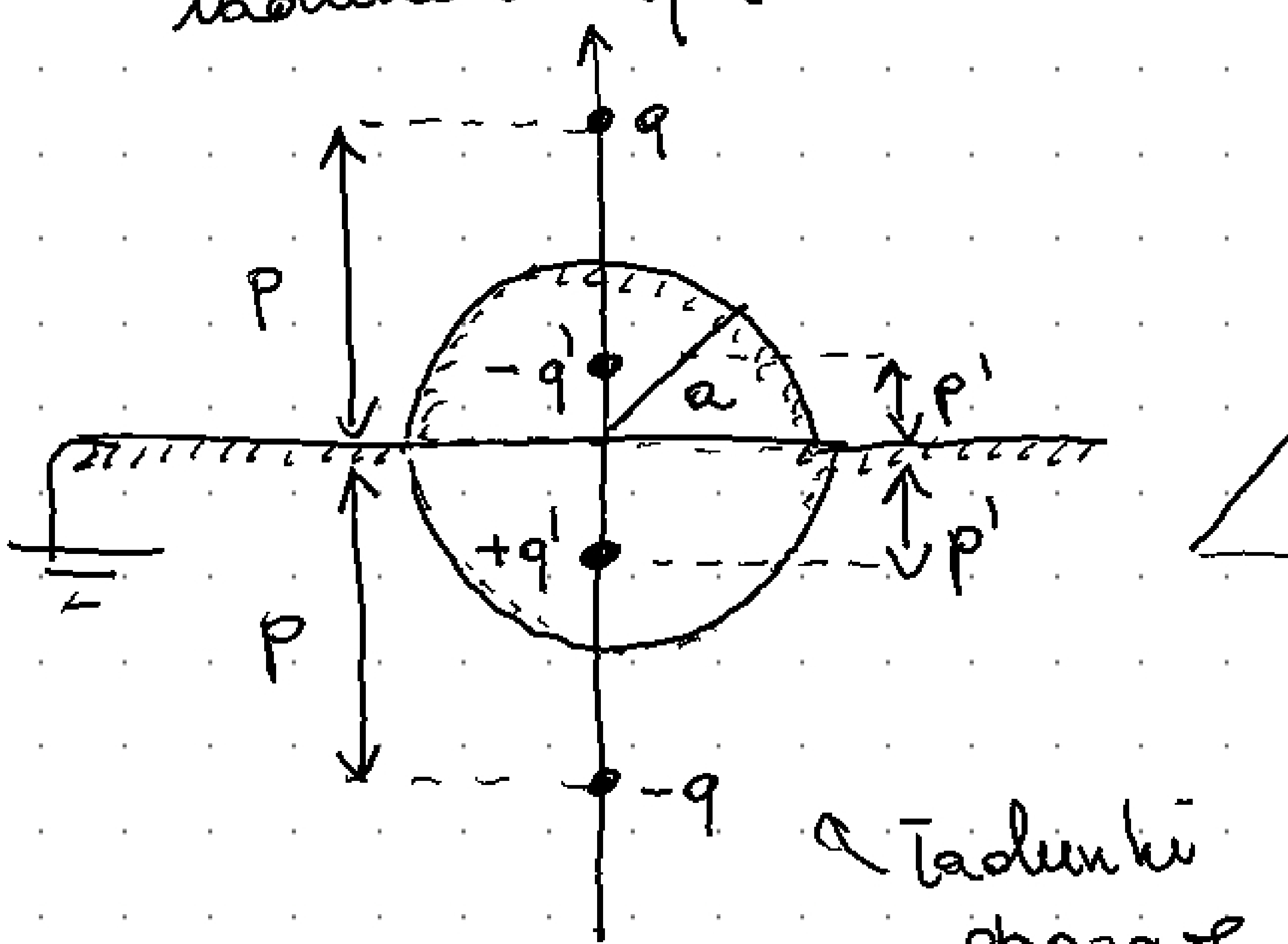
$K = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = 0{,}916$ to stała Catalana.

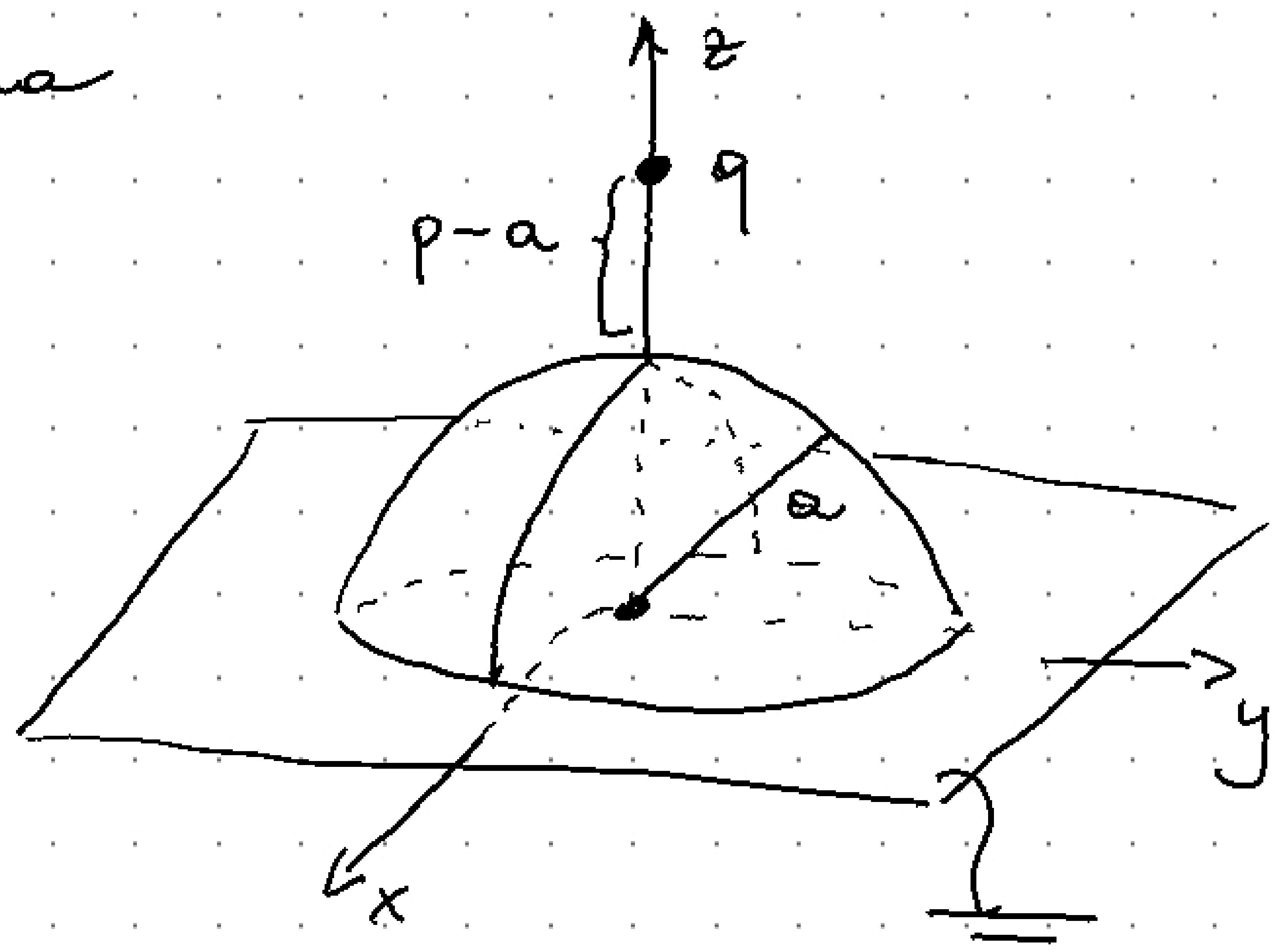
Analogicznie rozwiązuje się narożniki:



4°) Płaszczyzna uziemiona ze sferycznym wybrzuszeniem

Jaka siła działa na ładunek q?





Korzystając z wyniku z przykładu 2°) mamy:

$xa = p \Rightarrow x = \frac{p}{a}$, czyli $\quad q' = \frac{qp}{a}$

$$p' = \frac{a^2}{p},$$

więc siła wynosi:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-qq'}{(p-p')^2} + \frac{qq'}{(p+p')^2} - \frac{q^2}{(2p)^2}\right] = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{ap}{(p^2-a^2)^2} - \frac{ap}{(p^2+a^2)^2} + \frac{1}{4p^2}\right]$$