MECHANIKA KLASYCZNA
BRYŁA SZTYWNA

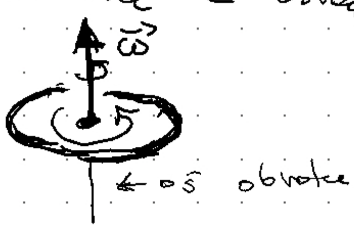
23.11.2019

Analogia między mechaniką punktu materialnego a bryłą sztywną.

Wiele równań występujących w przypadku dynamiki punktu materialnego ma swój analog w przypadku bryły sztywnej. Umiejętność dostrzegania tych analogii jest ważna w fizyce, bo te same równania dają te same rozwiązania co może być przez nas wykorzystane.

KINEMATYKA

PUNKT MATERIALNY	BRYŁA SZTYWNA
x – przemieszczenie	α – przemieszczenie kątowe
$v = \frac{dx}{dt}$ – prędkość	$\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ – prędkość kątowa
$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ – przyspieszenie	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\omega}{dt^2}$ – przyspieszenie kątowe
gdy $a = const$, wtedy	gdy $\varepsilon = const$, wtedy
$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$
w ogólności $\vec{x}, \vec{v}, \vec{a}$ są wektorami	w ogólności $\vec{\alpha}, \vec{\omega}, \vec{\varepsilon}$ są wektorami, których kierunek pokrywa się z osią obrotu.



DYNAMIKA

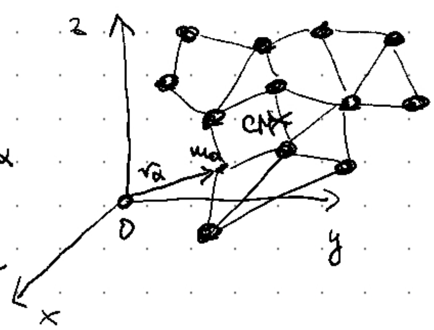
PUNKT MATERIALNY	BRYŁA SZTYWNA
m – masa	I – moment bezwładności względem osi obrotu
$\vec{p} = m\vec{v}$ – pęd	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = I\vec{\omega}$ – moment pędu
$\vec{F}$ – siła	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ – moment siły ($\vec{r}$ wzgl. osi obrotu)
II zasada dynamiki: $\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	II zasada dynamiki: $\vec{M} = I\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Energia kinetyczna $E_{k,post.} = \frac{1}{2} m v^2$	Energia kinetyczna $E_{k,obr.} = \frac{1}{2} I \omega^2$

Prawa dynamiki Newtona dla bryły sztywnej przyjmują analogiczną formę do tych dla punktu materialnego.

Bryła sztywna. Podstawowe pojęcia

Bryła sztywna jest obiektem składającym się z bardzo wielu N punktów materialnych. Odległości pomiędzy tymi masami są ustalone, czyli zaniedbujemy deformacje tych ciał.

Właściwości środka masy



- środek masy

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha, \quad M = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha$$

(M – masa całkowita układu)

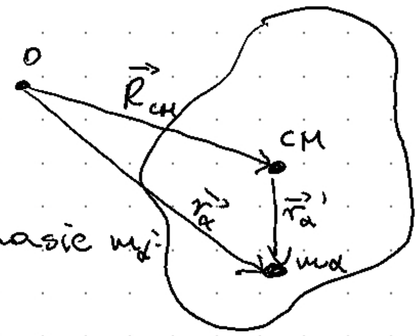
- pęd całkowity ($\vec{v}_\alpha = \dot{\vec{r}}_\alpha$)

$$\vec{P} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{p}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = \frac{M}{M} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = M \dot{\vec{R}}_{CM}$$

- całkowity moment pędu

$\vec{r}_\alpha{}'$ – położenie m_α względem CM.

$\vec{r}_\alpha = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_\alpha{}'$



Moment pędu cząstki o masie m_α:

$$\vec{\ell}_\alpha = \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha = \vec{r}_\alpha \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha$$

$$\vec{L} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{\ell}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_\alpha \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha$$ – względem punktu O

$$\vec{L} = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\vec{R}_{CM} + \vec{r}_\alpha{}'\right) \times m_\alpha \left(\dot{\vec{R}}_{CM} + \dot{\vec{r}}_\alpha{}'\right) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{R}_{CM} \times m_\alpha \dot{\vec{R}}_{CM} + \vec{R}_{CM} \times \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha{}' + \sum_{\alpha=1}^{N} (m_\alpha \vec{r}_\alpha{}') \times \dot{\vec{R}}_{CM} + \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_\alpha{}' \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha{}' =$$

$$= \left\{ \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha{}' = 0 \right.$$ – CM jest równy zero, gdy liczymy go względem CM $\Big\} =$

$$= \vec{R}_{CM} \times \vec{P} + \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_\alpha{}' \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha{}' = \underbrace{\vec{L}_{CM}}_{\vec{L}_{orb}} + \underbrace{\vec{L}_{wzgl.\,CM}}_{\vec{L}_{obr}}$$

$\vec{L}_{orb}$ – część orbitalna

$\vec{L}_{obr}$ – część obrotowa

- energia kinetyczna

$$E_k = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha{}^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \left(\dot{\vec{R}}_{CM} + \dot{\vec{r}}_\alpha{}'\right)^2 =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{R}}_{CM}^2 + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha{}'^2 + \dot{\vec{R}} \cdot \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha{}'}_{0 \text{ (patrz wyżej)}} =$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha{}'^2 = E_{k,CM} + E_{k,\,wzgl.\,CM}$$

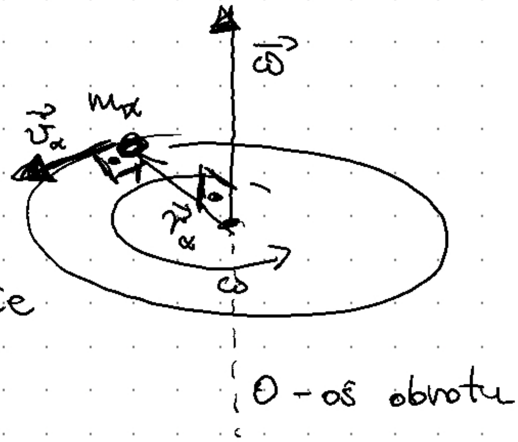
Moment bezwładności

Związek między prędkością liniową, a prędkością kątową:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

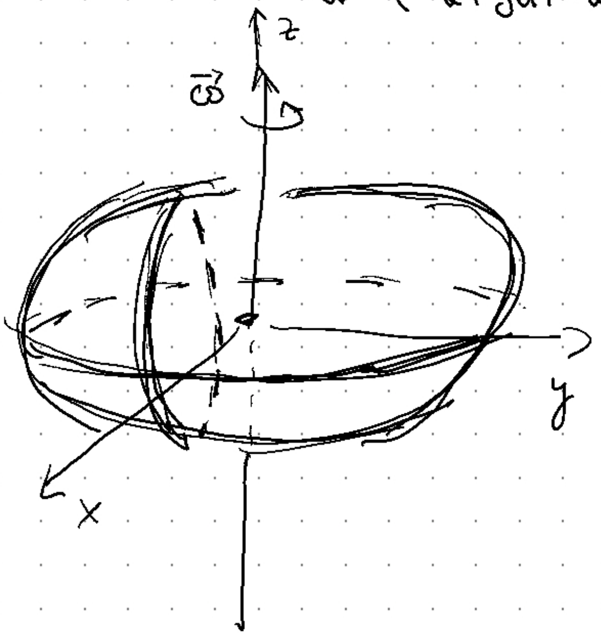
(patrz rys. obok)

$$|\vec{v}| = \omega \cdot r$$



Niech $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$, a także

$\vec{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$



$$\vec{v}_\alpha = \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha =$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_\alpha & y_\alpha & z_\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= -\hat{x}\,\omega y_\alpha + \hat{y}\,\omega x_\alpha + \hat{z} \cdot 0 =$$

$$= (-\omega y_\alpha, \omega x_\alpha, 0)$$

Korzystając z tego wyniku możemy obliczyć:

$$\vec{l}_\alpha = m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{v}_\alpha = m_\alpha \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x_\alpha & y_\alpha & z_\alpha \\ -\omega y_\alpha, & \omega x_\alpha, & 0 \end{vmatrix} = \omega m_\alpha \Big[-\hat{x} z_\alpha x_\alpha - \hat{y} z_\alpha y_\alpha + \hat{z}(x_\alpha^2 + y_\alpha^2) \Big] =$$

$$= m_\alpha \omega \begin{bmatrix} -x_\alpha z_\alpha \\ -y_\alpha z_\alpha \\ x_\alpha^2 + y_\alpha^2 \end{bmatrix}$$

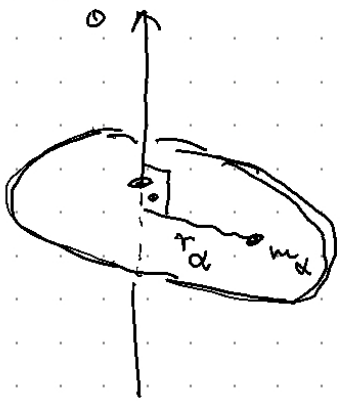
Przyjrzyjmy się z-owej składowej momentu pędu, bo jest ona szczególna ponieważ oś z jest osią obrotu:

$$L_z = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2)\,\omega = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \rho_\alpha^2\, \omega = I_z\, \omega$$

$\rho_\alpha = \sqrt{x_\alpha^2 + y_\alpha^2}$ — odległość masy m_α od osi z

I_z — moment bezwładności wzgl. osi z

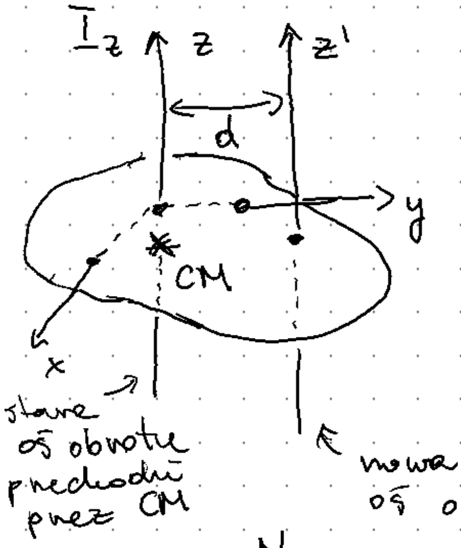
Jest to definicja momentu bezwładności względem dowolnej osi:



$$I_O = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha r_\alpha^2$$

r_α — odległość masy m_α od osi obrotu O.

Twierdzenie Steinera o osiach równoległych:



Znamy moment bezwładności względem osi z. Ile będzie wynosić moment bezwładności względem równoległej osi do osi z odległej o d?

np. $y_\alpha \longmapsto y_\alpha + d$, wtedy

$$I_z = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) \longmapsto I_{z'} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(x_\alpha^2 + [y_\alpha + d]^2\right) =$$

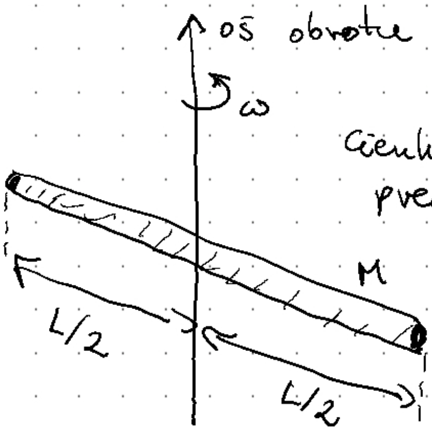
$$= \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(x_\alpha^2 + 2 y_\alpha d + y_\alpha^2 + d^2\right) = \left\{ \sum_{\alpha=1}^{N} y_\alpha m_\alpha = 0 \right\} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) + d^2 \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha = I_z + Md^2,$$

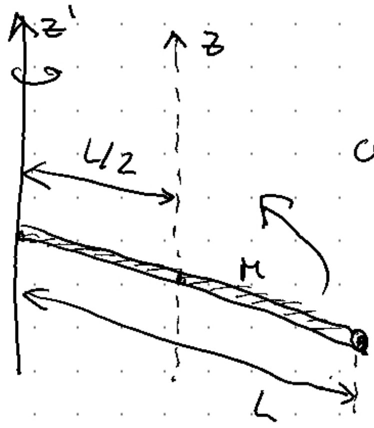
czyli $I_{z'} = I_z + Md^2$

przy czym oś z przechodzi przez środek masy (CM)

Kilka szczególnie ważnych momentów bezwładności:

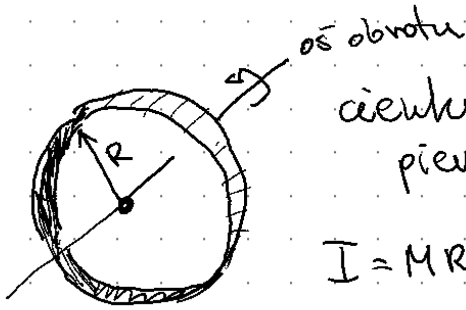


$I_0 = \frac{1}{12} ML^2$



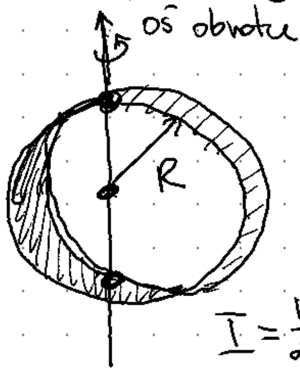
$I_{z'} = I_z + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 =$

$= \frac{1}{12} ML^2 + \frac{1}{4} ML^2 = \frac{1}{3} ML^2$

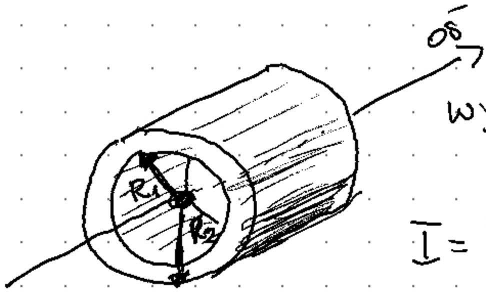


cienki pierścień

$I = MR^2$

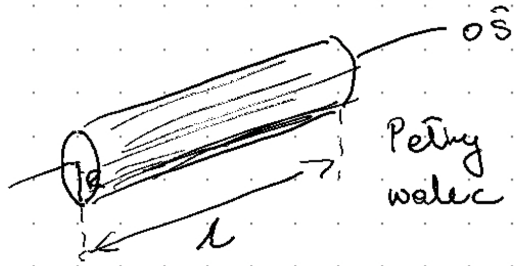


$I = \frac{1}{2} MR^2$



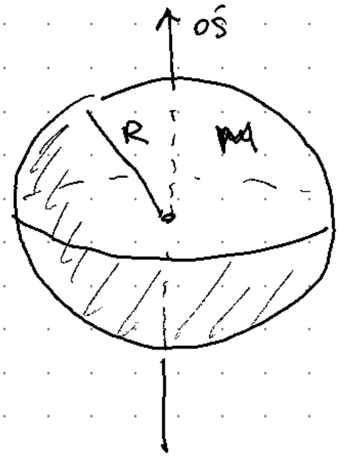
wydrążony walec

$I = \frac{M}{2}\left(R_1^2 + R_2^2\right)$



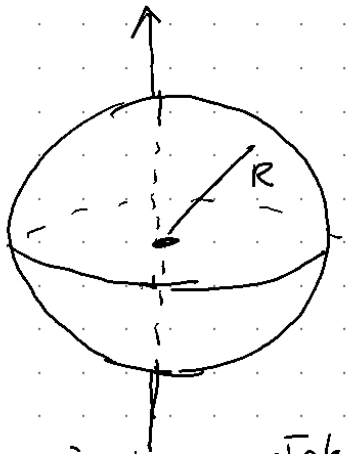
Pełny walec

$I = \frac{1}{2} MR^2$



Jednorodna kula

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$



cienka powłoka sferyczna

$$I = \frac{2}{3} M R^2$$

Zasada zachowania momentu pędu

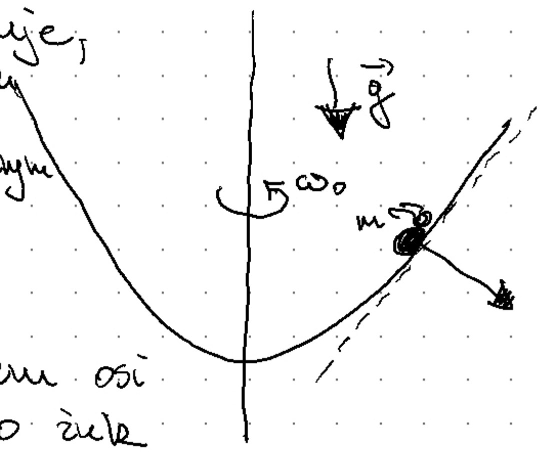
$$\vec{M}_{zew} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad \text{gdy } \vec{M}_{zew} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \overrightarrow{const}$$

Zadania

1 | 430F-I

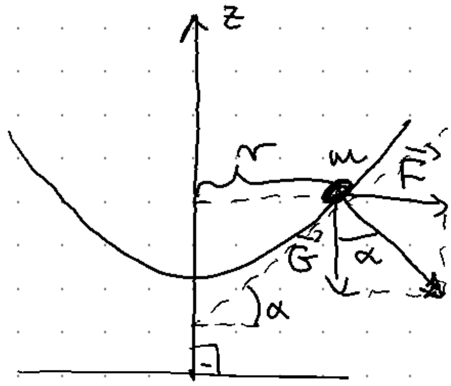
W stałym polu ciężkości, po powierzchni czaszy obracającej się wokół pionowej osi, chodzi mały żuk o masie m.

Gdziekolwiek się zatrzymuje, wypadkowa sił działających na żuka w układzie związanym z czaszą jest prostopadła do powierzchni. Moment bezwładności czaszy względem osi obrotu wynosi I. Początkowo żuk znajdował się na dnie czaszy, czasza



Zaś obracała się z prędkością kątową ω_0. Jaki kształt ma powierzchnia czaszy?

<u>Rozwiązanie</u>



W układzie nie działają siły zewnętrzne, więc zachowany jest moment pędu:

$$I\omega_0 = (\underbrace{I + mr^2}_{I_{żuka}})\,\omega(r)$$

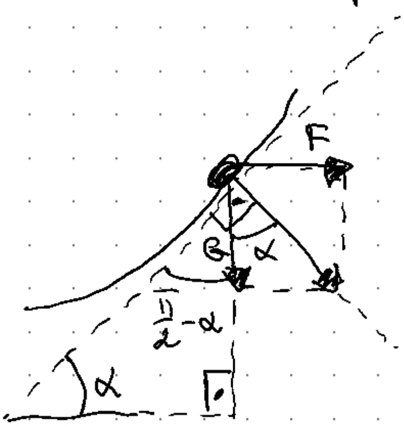
$$\Rightarrow \omega(r) = \frac{I\omega_0}{I + mr^2}$$

W układzie nieinercjalnym na żuka działa siła:

$$F(r) = \frac{mv^2}{r} = \frac{m\omega^2 r^2}{r} = m\omega^2(r)\, r$$

ponadto na żuka działa siła grawitacji

$$G = mg$$



Gdy $tg\,\alpha = \frac{F}{G}$, wtedy siła wypadkowa jest prostopadła do czaszy, co więcej styczna do tej krzywej jest dana przez pochodną w danym punkcie:

$$\frac{dz}{dr} = tg\,\alpha = \frac{F(r)}{G}$$

Dostajemy tzw. równanie różniczkowe o postaci:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{F(r)}{G} = \frac{m\omega^2(r)r}{mg} = \frac{Ar}{(I+mr^2)^2},$$

gdzie $A = \frac{1}{g}I^2\omega_0^2$.

Jest to najprostszy typ równania różniczkowego, którego rozwiązanie można otrzymać za pomocą separacji zmiennych:

$$dz = \frac{Ar\,dr}{(I+mr^2)^2}$$ i wykonujemy całkowanie względem obu stron:

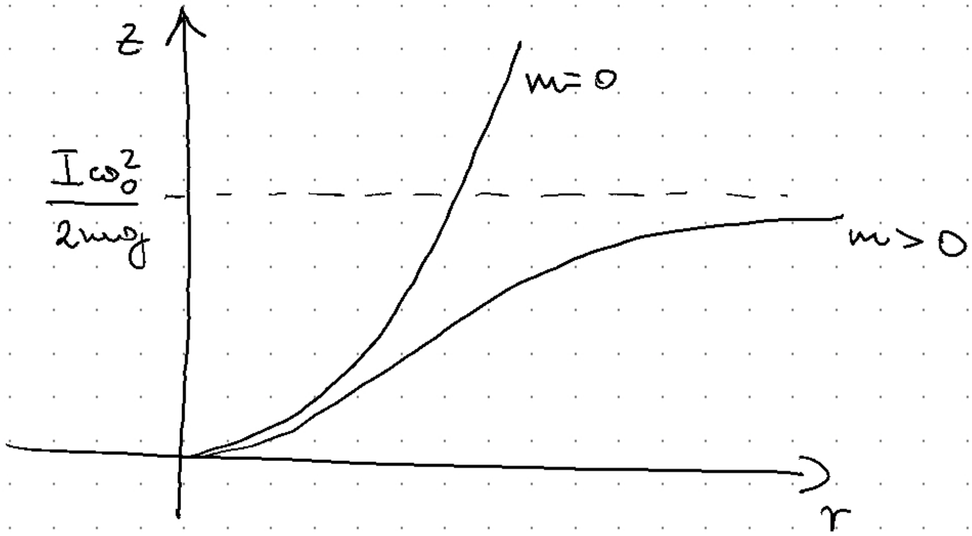
$$z(r) = A\int\frac{r\,dr}{(I+mr^2)^2} = \left\{ \begin{array}{l} t = I+mr^2 \\ \frac{dt}{dr} = 2mr \Rightarrow dt = 2mr\,dr \end{array} \right\}$$

$$= \frac{A}{2m}\int\frac{dt}{t^2} = -\frac{A}{2m}\frac{1}{t} + C = -\frac{A}{2m}\frac{1}{I+mr^2} + C$$

Wybierając $z(r=\sqrt{x^2+y^2}=0)=0$ mamy, że $C = I\omega_0^2/2mg$, wtedy

$$z(x,y) = -\frac{I\omega_0^2}{2mg}\left(\frac{1}{1+\frac{m}{I}(x^2+y^2)} - 1\right) = +\frac{I\omega_0^2}{2mg}\left(\frac{x^2+y^2}{1+\frac{m}{I}(x^2+y^2)}\right)$$

Gdy stosunek $\frac{m}{I} \to 0$, wtedy masyw kształtem jest paraboloida obrotowa.

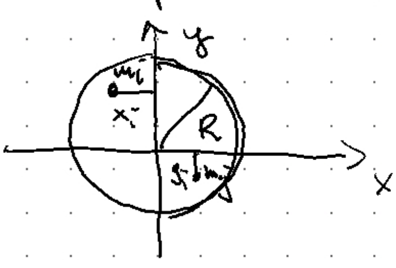


$\boxed{2}$ 440F–W

Oblicz moment bezwładności jednorodnego walca o masie m, promieniu R i wysokości L względem osi przechodzącej przez jego środek i prostopadłej do osi symetrii walca.

Rozwiązania:

Zaczynamy od obliczenia momentu bezwładności cienkiego krążka o masie Δm i promieniu r względem jego średnicy.

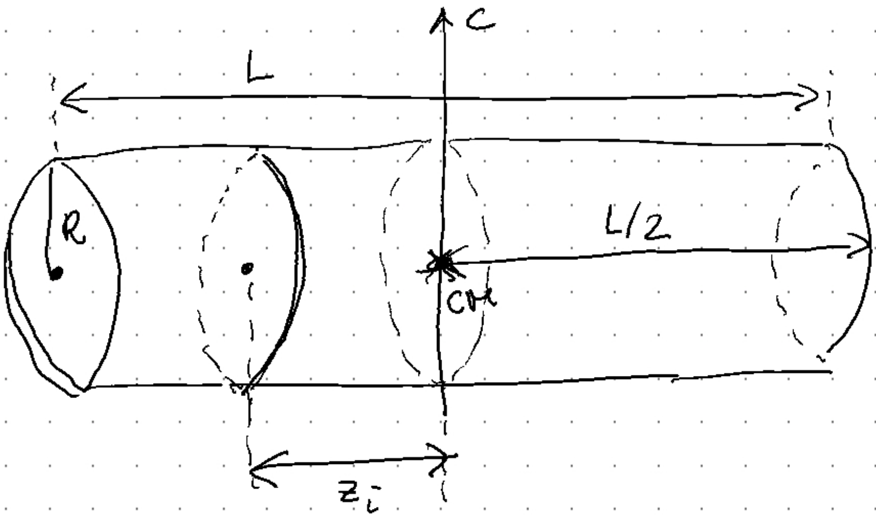


$$I_{\Delta m} = \sum_i m_i x_i^2 \quad \text{wzgl. osi } y$$

$$I_{\Delta m} = \sum_i m_i y_i^2 \quad \text{wzgl. osi } x$$

czyli $$2I_{\Delta m} = \sum_i (x_i^2 + y_i^2) m_i = \underbrace{\sum_i m_i r_i^2}_{\text{moment bezwładności prostopadły do pow. krążka.}} = \frac{1}{2} \Delta m R^2$$

$$\Rightarrow I_{\Delta m} = \frac{1}{4} \Delta m R^2$$



Korzystamy z twierdzenia Steinera

$$I = \sum_i \left(I_{\Delta m_i} + \Delta m_i z_i^2 \right) = \sum_i \frac{1}{4} \Delta m_i R^2 + \sum_i \Delta m_i z_i^2 =$$

$$= \frac{1}{4} m R^2 + \alpha m L^2$$

czynnik geometryczny

Gdy $R \to 0$ dostajemy cienki jednorodny pręt czyli

$$\frac{1}{12} m L^2 = \alpha m L^2 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{12},$$

czyli ostatecznie

$$I = \frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{12} m L^2$$