
Mechanika kwantowa IIB

Kolokwium - zadania

7 stycznia 2019

Prosimy o rozwiązanie zadań na osobnych kartkach oraz ich podpisanie. Komentarz jest nieodczynną częścią rozwiązania. Powodzenia!

Zadanie 1

(4 pkt.) Rozważ ferromagnetyk Heisenberga składający się z N spinów znajdujących się w węzłach jednowymiarowego łańcucha. Załóż, że spiny są uporządkowane tak, że magnetyzacja układu jest skierowana wzdłuż osi z . Niech układ znajduje się w stanie $|k\rangle = a_k^\dagger|0\rangle$, gdzie $|0\rangle$ jest stanem podstawowym tego ferromagnetyka, czyli stan $|k\rangle$ zawiera jeden magnon, którego pęd wynosi $\hbar k \neq 0$ (mówiąc inaczej stan $|0\rangle$ to stan próżni dla magnonów). Znajdź wartość poprzecznej spinowej funkcji korelacji zdefiniowanej równaniem

$$C_{ij}^\perp(k) = \langle k | \hat{\mathbf{S}}_i^\perp \cdot \hat{\mathbf{S}}_j^\perp | k \rangle,$$

gdzie $\hat{\mathbf{S}}_i^\perp = \hat{S}_i^x \mathbf{e}_x + \hat{S}_i^y \mathbf{e}_y$. W rachunkach wykorzystaj transformację Holsteina-Primakoffa

$$\hat{S}_i^- = a_i^\dagger (2S - a_i^\dagger a_i)^{1/2}, \quad \hat{S}_i^+ = (2S - a_i^\dagger a_i)^{1/2} a_i, \quad \hat{S}_i^z = S - a_i^\dagger a_i,$$

gdzie a_i są bozonowymi operatorami anihilacji w węźle i . Załóż przy tym, że $S \gg 1$ i rozwiń powyższe wyrażenia pozostawiając tylko dominujące wkłady. Skomentuj uzyskany wynik.

Wsk.: Transformaty Fouriera będą przydatne w tym zadaniu, a ponadto $\hat{S}_j^\pm = \hat{S}_j^x \pm i\hat{S}_j^y$.

Zadanie 2

(6 pkt.) Rozważ hamiltonian ciasnego wiązania dla elektronów znajdujących się na dwuwymiarowej sieci regularnej (komórka elementarna jest kwadratem) dany wyrażeniem

$$\hat{H} = -t \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{\sigma} (c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma} + \text{h.c.}),$$

gdzie $t > 0$ to stała przeskoku, $\langle i,j \rangle$ oznacz, że węzły i i j są najbliższymi sąsiadami, a h.c. oznacza sprzężenie hermitowskie. Przyjmij, że stała sieci $\mathbf{a} = 1$, a kryształ ma wymiary $L_x \times L_y = N_x \mathbf{a} \times N_y \mathbf{a}$, przy czym $L_x, L_y \gg \mathbf{a}$.

(a) Znajdź relację dyspersji $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ dla tego hamiltonianu i zapisz go w postaci diagonalnej. Ile pasm energetycznych posiada ten model?

(b) Rozważ parametr gęstości $n = N_e/N$, gdzie N_e jest liczbą elektronów w układzie, a N jest ilością dostępnych węzłów. Pokaż, że w stanie podstawowym dla zadanej liczby N_e wielkość n jest proporcjonalna do powierzchni w przestrzeni pędowej ograniczanej przez powierzchnię Fermiego. Znajdź wartość stałej proporcjonalności.

(c) Naszkicuj powierzchnię Fermiego dla (i) $n \ll 1$, (ii) $n = 1$ oraz (iii) $n = 2$.

Wsk.: Wykorzystaj otrzymaną w podpunkcie (a) relację dyspersji.