
Mechanika kwantowa IIB

Egzamin - zadania

29 stycznia 2019

Prosimy o rozwiązanie zadań na osobnych kartkach oraz ich podpisanie. Komentarz jest nieodczynną częścią rozwiązania. Powodzenia!

Zadanie 1

(4 pkt.) Rozważ gaz nieoddziałujących ze sobą N elektronów znajdujących się w objętości V oraz temperaturze $T = 0$, przy czym $n = N/V = \text{const.}$ Wyznacz dla tego układu izotemiczny objętościowy moduł sprężystości zdefiniowany relacją

$$B = -V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T,$$

gdzie p to ciśnienie gazu elektronowego. Wynik wyraż za pomocą energii Fermiego ε_F . Przyjmij, że elektrony mają masę m i spin $\sigma = 1/2$.

Zadanie 2

(6 pkt.) Rozważ uproszczony model molekuly wodoru, który jest opisywany za pomocą hamiltonianu

$$\hat{H} = \varepsilon_0(c_1^\dagger c_1 + c_2^\dagger c_2) + t c_2^\dagger c_1 + t^* c_1^\dagger c_2,$$

gdzie c_1 jest operatorem anihilującym elektron na orbitalu $1s$ pierwszego atomu, a c_2 jest operatorem anihilującym elektron na orbitalu $1s$ drugiego atomu, ε_0 jest energią elektronu na obu orbitalach $1s$, a t jest całką przeskoku między orbitalami.

(a) Definiujemy retardowane funkcje Greena

$$G_{11}^{ret}(t) = -i\theta(t)\langle\{c_1(t), c_1^\dagger\}\rangle \quad \text{oraz} \quad G_{21}^{ret}(t) = -i\theta(t)\langle\{c_2(t), c_1^\dagger\}\rangle,$$

gdzie $\{\cdot, \cdot\}$ to antykomutator. Wyprowadzić równania ruchu dla tak zdefiniowanych funkcji Greena w tym modelu.

(b) Uzyskany układ równań przetransformować korzystając z transformacji Fouriera zdefiniowanej relacją

$$G^{ret}(\omega + i\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega + i\eta)t} G^{ret}(t) \quad (\eta > 0)$$

i na tej podstawie znaleźć postać $G_{11}^{ret}(\omega + i\eta)$. Korzystając z tego wyniku oraz z faktu, że swobodna retardowana funkcja Greena ma w tym przypadku postać $G_0^{ret}(\omega + i\eta) = (\omega + i\eta - \varepsilon_0)^{-1}$ znaleźć selfenergię $\Sigma(\omega + i\eta)$.

Wsk.: Wygodnie jest rozpisać $G_{11}^{ret}(\omega + i\eta)$ jako sumę ułamków prostych.

(c) Korzystając z $G_{11}^{ret}(\omega + i\eta)$ znaleźć funkcję spektralną $A(\omega + i\eta)$, przy czym w wyniku przejść do granicy $\eta \rightarrow 0^+$. Zinterpretować uzyskany wynik.

Wsk.: W podpunkcie tym przydatne mogą okazać się relacje

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{(x - y)^2 + \lambda^2} = \delta(x - y)$$

oraz

$$\delta[g(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|},$$

gdzie x_i są miejscami zerowymi funkcji $g(x)$.