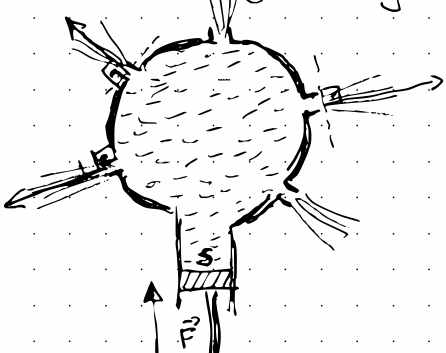
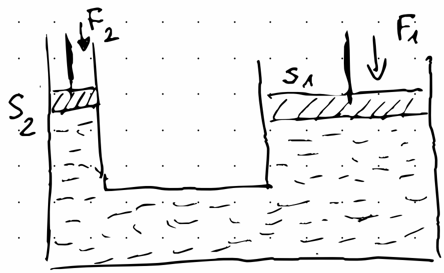
ELEMENTY HYDROSTATYKI, LEPKOŚĆ I NAPIĘCIE POWIERZCHNIOWE

8.02.2020

Prawo Pascala

Ciśnienie w cieczy rozchodzi się jednakowo we wszystkich kierunkach i jest zawsze skierowane prostopadle do powierzchni granicznych cieczy.





$$F_1/S_1 = F_2/S_2$$

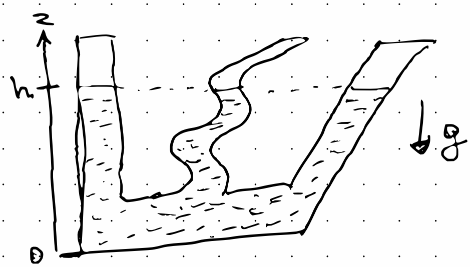
Ciśnienie hydrostatyczne, Paradoks hydrostatyczny.

Dla cieczy nieściśliwej mamy:

$$p = p_0 + \rho g (h - z)$$

wysokość słupa cieczy

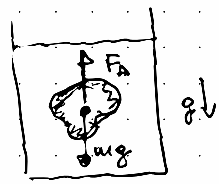
gęstość cieczy



Ciśnienie hydrostatyczne zależy od wysokości słupa cieczy, a nie zależy od kształtu naczynia (paradoks hydrostatyczny).

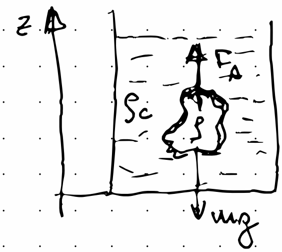
Prawo Archimedesa

Na ciało zanurzone w cieczy działa parcie do góry, które jest równe ciężarowi cieczy wypartej przez to ciało.



$$F_A = m_{\text{wypartej cieczy}}\, g =$$

$$= \rho_c V_{\text{zanurzone}}\, g$$



$$F_g = \rho V_{\text{ciała}}\, g$$

Ciało tonie, gdy $\rho V_{\text{ciała}} > \rho V_{\text{zanurzone}}$

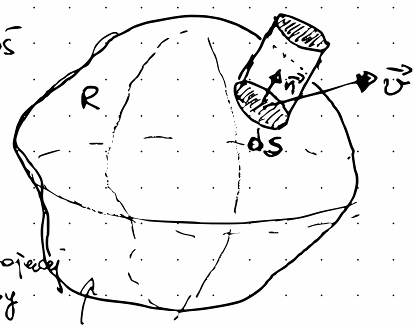
Ciało wypływa, gdy $\rho V_{\text{ciała}} < \rho V_{\text{zanurzone}}$

Jest w równowadze, gdy $\rho V_{\text{ciała}} = \rho V_{\text{zanurzone}}$

Równanie ciągłości. Prawo zachowania strumienia

Dla cieczy przepływającej przez rurkę masa przepływającej cieczy jest ustalona (pod warunkiem, że po drodze nie znajduje się jakieś źródło).

Jeżeli ciecz odpływa z jakiegoś zamkniętego obszaru R, wtedy ubytek masy cieczy wynosi



strumień wypływającej masy

$$\Delta M = \oint_S \rho\, \vec{v} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} M =$$

obszar zamknięty o powierzchni S

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_V \rho\, dV\right) = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV$$ (równanie ciągłości),

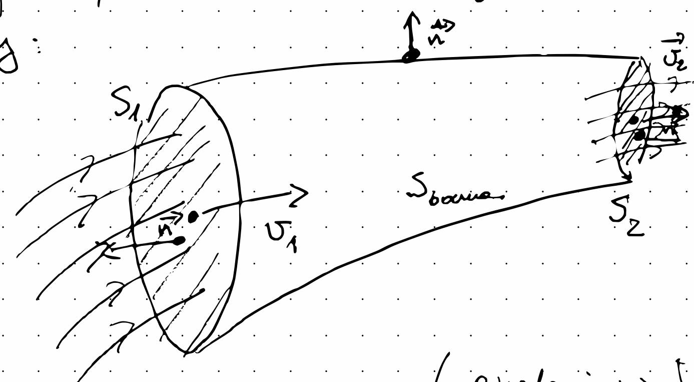
gdy ciecz jest nieściśliwa, czyli ma stałą gęstość $\rho = \text{const}$, wtedy

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, czyli

$$\Delta M = \oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \Phi_v = \oint \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0,$$

czyli strumień prędkości jest znika dla zamkniętej powierzchni S.

Konsekwencją tego jest, że dla przepływu w rurze mamy:



$$\boxed{v_1 S_1 = v_2 S_2},$$

bo

$$\oint_{rura} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\int_{\text{powierzchnia boczna}} \vec{v} \cdot d\vec{S}}_{0,\ \text{bo}\ \vec{v} \perp \vec{n}} + \underbrace{\int_{S_1} \vec{v} \cdot d\vec{S}}_{-v_1 S_1,\ \text{bo}\ \vec{v} \cdot \vec{n} = -v_1} + \underbrace{\int_{S_2} \vec{v} \cdot d\vec{S}}_{v_2 S_2,\ \text{bo}\ \vec{v} \cdot \vec{n} = v_2} = 0$$

(analogicznie jak w prawie Gaussa).

Prawo Bernoulliego

Zakładając, że rozważana ciecz spełnia warunki:

1°) jest nielepka (lub możemy zaniedbać lepkość)

2°) jest nieściśliwa ($\rho = const$)

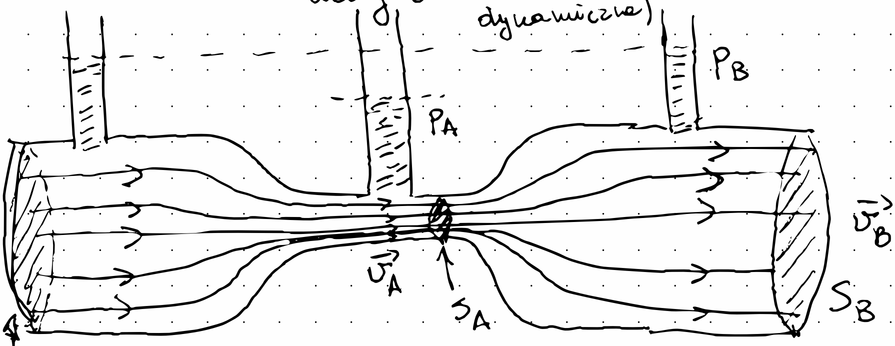
3°) nie powstają w niej żadne wiry

4°) działają na nią tylko siły zachowawcze (np. grawitacja)

5°) ruch cieczy jest stacjonarny, tj. nie zmienia się w czasie.

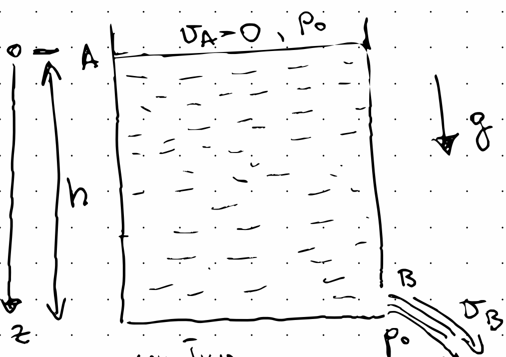
wtedy zasada zachowania energii dla cieczy przyjmuje postać:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\rho v^2}_{\text{energia kinetyczna elementu cieczy (ciśnienie dynamiczne)}} + \underbrace{p + \rho g z}_{\text{energia potencjalna elementu cieczy (ciśnienie hydrostatyczne)}} = const$$



$\rho = const$: $\quad v_A S_A = v_B S_B \Rightarrow v_A > v_B$, bo $S_A < S_B$

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + p_A = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + p_B \Rightarrow p_B > p_A$$



wypływ cieczy ze zbiornika

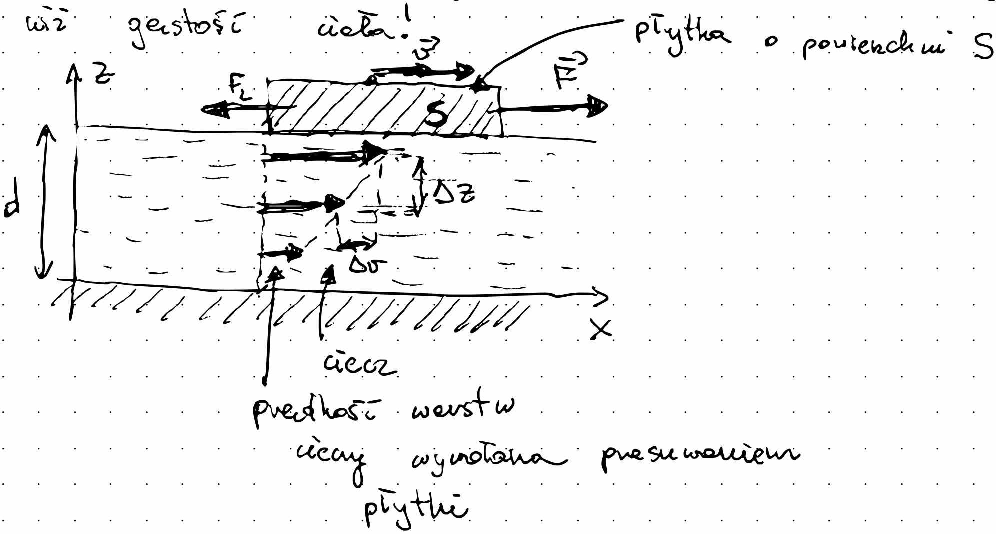
$$\frac{1}{2}\rho \underset{0}{\underbrace{v_A^2}} + p_0 + \rho g h = \frac{1}{2} v_B^2 \rho + p_0$$

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{2gh}$$

prawo Torricellego

Lepkość

Lepkość jest związana z tarciem wewnętrznym w ośrodku (np. cieczy). Lepkość jest czymś innym niż gęstość ciała!



Ciągnąc płytkę z siłą $\vec{F}$ tak iż równoważy ona siłę oporu $\vec{F}_L$, tj. ruch płytki odbywa się ze stałą prędkością, wtedy

$$F_L = \eta S \frac{v}{d}$$

współczynnik lepkości

Siła oporu działająca na płytkę jest proporcjonalna do gradientu prędkości cieczy w kierunku prostopadłym do prędkości płytki, czyli

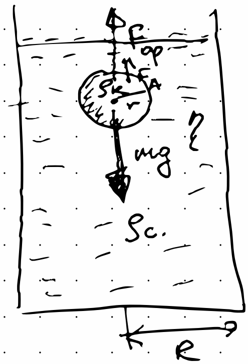
$$F_L \propto \frac{\Delta v}{\Delta z} = \frac{v}{d}$$

proporcjonalne do

Siła oporu działająca na kulkę spadającą w cieczy o lepkości η wynosi:

$$F_{op} = 6\pi\eta r v$$

(wzór Stokesa)



Z warunku równowagi mechanicznej znajdujemy prędkość graniczną kulki

$$F_A = \rho_c \frac{4}{3}\pi r^3 g \qquad F_{op} = 6\pi\eta r v_{gr}$$

$$F_g = \rho_k \frac{4}{3}\pi r^3 g$$

$$\rho_k \frac{4}{3}\pi r^3 g = \rho_c \frac{4}{3}\pi r^3 g + 6\pi\eta r v_{gr}$$

$$\frac{\cancel{4}^{2}}{3}\cancel{\pi}\, r^{\cancel{3}\,2} g(\rho_k-\rho_c) / \cancel{6}^{3}\cancel{\pi}\eta \cancel{r} = v_{gr}$$

$$\Rightarrow \quad v_{gr} = \frac{2g}{9\eta}(\rho_k-\rho_c)r^2$$

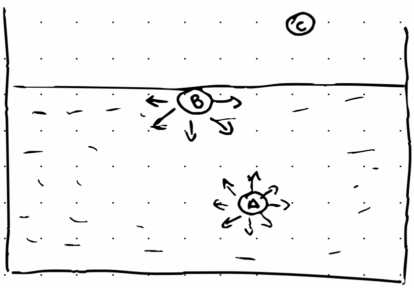
W rzeczywistości ścianki naczynia mają także wpływ na ruch kulki, co prowadzi do poprawionej zależności (wzór Landberga):

$$v_{gr} = \frac{2g}{9\eta}(\rho_k-\rho_c)\frac{r^2}{1+2{,}4\frac{r}{R}}$$

, gdzie R – to promień cylindra w którym znajduje się ciecz

Mierząc prędkość graniczną dla różnych rozmiarów kulki możemy wyznaczyć lepkość cieczy.

■ Napięcie powierzchniowe



Siła wypadkowa dochodząca od innych cząstek cieczy dla:

- A: wynosi 0,
- B jest niezerowa i próbuje wciągnąć cząsteczkę B do wnętrza cieczy.

Nieobowiązkowe:

Niech grubość warstwy powierzchniowej wynosi d (jest to odległość charakteryzująca zasięg przyciągania między cząsteczkami). Aby zwiększyć powierzchnię o jednostkę cieczy trzeba z jej głębi przenieść cząstki na jej powierzchnię: $nd = \frac{\rho}{m} d$ (n – liczba cząstek w jednostce objętości), ponieważ w warstwie powierzchniowej cząstki są odległe o $d/2$ od powierzchni i doznają średniej siły $\bar{f}$, więc praca wykonana na powiększenie powierzchni cieczy o jednostkę wynosi:

$$W = \frac{\rho d}{m} \bar{f} d/2 = \frac{\rho \bar{f} d^2}{2m} = \sigma$$ – napięcie powierzchniowe

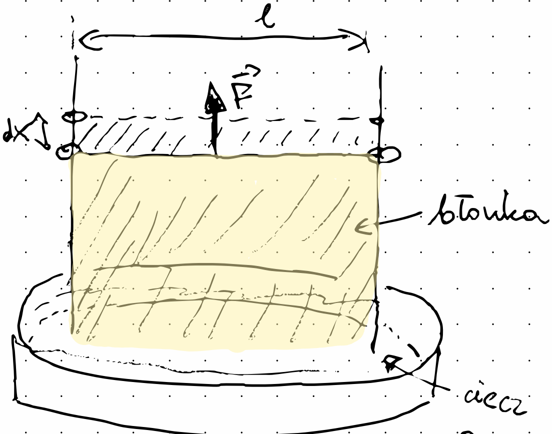
Gdy cząstka uwalnia się z cieczy musi średnio pokonać siłę $\bar{f}$ na odległości $2d$, czyli ciepło parowania $Q_{par} = \frac{2\bar{f}d}{m}$

czyli $d = \frac{4\sigma}{\rho\, Q_{par}}$, co dla wody w 100°C daje $d \simeq 1{,}1\cdot 10^{-10}\,m$.

Praca wykonywana przez siły zewnętrzne, aby rozciągnąć powierzchnię A wynosi

$$W_{zew.} = \sigma A \qquad \left(dW_{zew.} = \vec{\sigma}\cdot d\vec{A} \right)$$

Na przykład:



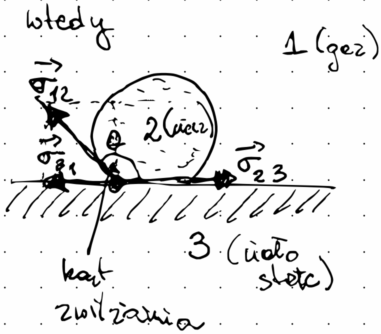
Zwiększam rozmiar błonki o dx, wtedy

$$dW = F\,dx = \sigma\, dA = \sigma\, 2l\, dx$$

$$\Rightarrow \quad \sigma = \frac{F}{2l}$$

(2 bierze się stąd, że błonka ma dwie strony)

Przyjmijmy, że mamy kroplę rozlaną na stole; wtedy



Napięcie powierzchniowe jest „siłą" działającą stycznie do powierzchni swobodnej. Z warunku równowagi sił mamy:

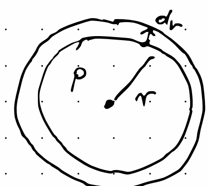
$$\sigma_{31} = \sigma_{23} + \sigma_{12}\cos\theta$$

θ jest to tak zwany kąt zwilżania, gdy $\theta > \frac{\pi}{2}$ dana ciecz nie zwilża powierzchni ciała stałego. Gdy $\theta < \pi/2$, wtedy ciecz zwilża powierzchnię ciała stałego.

Napięcie powierzchniowe powoduje, że we wnętrzu kropli pojawia się nadmiarowe ciśnienie. Zmniejszając izotermicznie kroplę o dr mamy:

$$|dW| = p\,dV = p\,4\pi r^2 dr = \sigma\, dA = \sigma\, 8\pi r\, dr$$

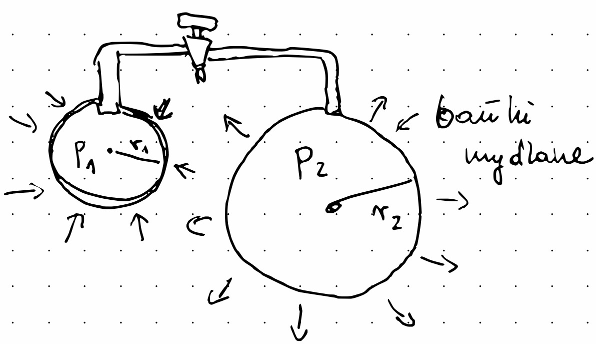
$$\Rightarrow \quad p = \frac{2\sigma}{r}$$



Dla bańki mydlanej mamy

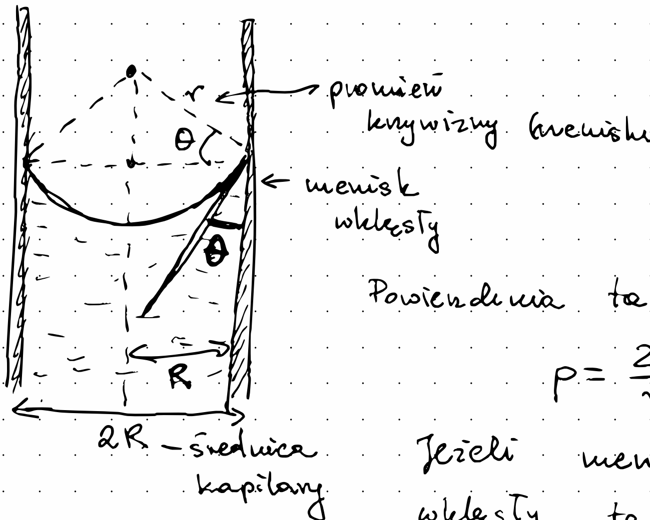
$$p = \frac{4\sigma}{r}$$

, bo bańka ma dwie powierzchnie (błonka).



$P_1 > P_2$, bo $r_2 > r_1$, czyli duża bańka się powiększa, a mała się kurczy.

Kapilary

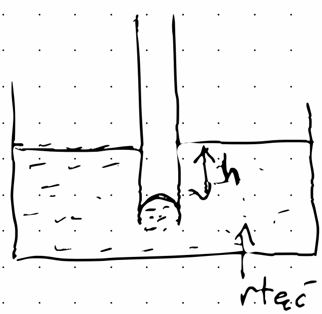


$$R = r\cos\theta$$

Powierzchnia ta wywiera ciśnienie

$$p = \frac{2\sigma}{r} = \frac{2\sigma\cos\theta}{R}$$

Jeżeli menisk cieczy jest wklęsły to ciśnienie skierowane jest ku górze, jeżeli menisk jest wklęsły to ciśnienie jest skierowane w głąb cieczy, czyli



zachodzi równowagę między ciśnieniem hydrostatycznym i tym wywieranym przez powierzchnię:

$$\rho g h = p = \frac{2\sigma\cos\theta}{R} \Rightarrow h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g R}$$