

Mechanika kwantowa IIB: Ćwiczenia #12

mgr Piotr Zdybel

piotr.zdybel@fuw.edu.pl

www.fuw.edu.pl/~pzdybel/kwant18.html

Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski — 8 stycznia 2019

Zadanie 1: Tunelowanie do zlokalizowanego poziomu fermionowego. Model Fano-Andersona

Rozważmy zlokalizowany poziom fermionowy opisany przez operatory d i $d^\dagger$, które sprzęgają się do fermionowych (nieoddziałujących) stanów w paśmie energetycznym opisanych przy pomocy operatorów pola $\hat{\psi}(x)$ i $\hat{\psi}^\dagger(x)$, przy czym hamiltonian układu ma postać

$$\hat{H} = \sum_k \varepsilon_k c_k^\dagger c_k + \Delta d^\dagger d + \gamma \left[d^\dagger \hat{\psi}(0) + \hat{\psi}^\dagger(0) d \right],$$

gdzie $\hat{\psi}(x) = \sum_k e^{ikx} c_k$. Przyjmujemy, że objętość układu jest jednostkowa.

(a) Znajdź przyczynową funkcję Greena dla swobodnych fermionów dla $x = 0$ zdefiniowaną jako:

$$G_0(x = 0, t) = -i \left\langle \hat{T} \hat{\psi}(0, t) \hat{\psi}^\dagger(x = 0, 0) \right\rangle,$$

gdzie $\hat{T}$ jest operatorem uporządkowania chronologicznego. Zakładamy przy tym, że potencjał chemiczny wynosi $\mu = 0$, temperatura jest równa zero, a lokalna gęstość stanów w $x = 0$ jest stała i wynosi ρ_0 .

(b) Następnie definiujemy przyczynową funkcję Greena dla poziomu fermionowego jako

$$D(t) = -i \left\langle \hat{T} d(t) d^\dagger(0) \right\rangle,$$

a także mieszaną funkcję Greena

$$G_{d\psi}(x, t) = -i \left\langle \hat{T} \hat{\psi}(x, t) d^\dagger(0) \right\rangle.$$

Uwzględniając także oddziaływanie między poziomem fermionowym, a fermionami pasma wyprowadzić dla tych funkcji Greena równania ruchu.

(c) Korzystając z tego, że $D_0(t)$ i $G_0(x, t)$ są propagatorami dla problemu nieoddziałującego (tj. $\gamma = 0$), czyli

$$[\partial_t + i\Delta] D_0(t) = -i\delta(t)$$

$$[\partial_t + iK] G_0(t) = -i\delta(t)\delta(x)$$

wyprowadź przy pomocy powyższych relacji równanie Dysona dla przyczynowej funkcji Greena poziomu fermionowego $D(\omega)$. Następnie rozwiąż je i znajdź $D(\omega)$ wykorzystując wynik z punktu (a).

(d) Wychodząc z przyczynowej funkcji Greena $D(\omega)$ znajdź retardowaną funkcję Greena $D^R(\omega)$ dla zlokalizowanego poziomu fermionowego, a także odpowiadającą jej funkcję spektralną $A(\omega)$. Zinterpretuj uzyskany wynik.

Omawiane zagadnienia

- 1) Pojęcie przyczynowych funkcji Greena.
- 2) Działanie operatora uporządkowania chronologicznego.

- 3) Umiejętność wykorzystanie tożsamości Sochockiego w obliczeniach.
- 4) Wyprowadzenie równań ruchu dla funkcji Greena.
- 5) Swobodne funkcje Greena jako "matematyczne" funkcje Greena, czyli odwrotności operatorów różniczkowych.
- 6) Równanie Dysona i komentarz dotyczący technik diagramatycznych.
- 7) Pojęcie selfenergii.
- 8) Pojęcie retardowanej funkcji Greena i funkcji spektralnej.
- 9) Wyprowadzenie krzywej rezonansowej (krzywej Breita-Wignera) i jej własności.
- 10) Interpretacja części rzeczywistej i urojonej selfenergii.
- 11) Pojęcie atenuacji i czasu życia cząstek.