

Podstawą zjawiska nadprzewodnictwa jest kondensacja par Coopera, które zachowują się jak bozony. Układ jest opisany hamiltonianem Bardeena-Coopera-Schrieffer (BCS)

$$\hat{H}_{\text{BCS}} - \mu \hat{N} = \sum_{\vec{k}\sigma} \sum_{\vec{k}} \xi_{\vec{k}}^{\sigma} c_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} c_{\vec{k}\sigma} - \frac{g}{\Omega} \sum_{\vec{k}\vec{k}'} c_{\vec{k}\uparrow}^{\dagger} c_{-\vec{k}}^{\dagger} c_{-\vec{k}'\downarrow} c_{\vec{k}'\uparrow},$$

przy czym  $\xi_{\vec{k}}^{\sigma} = \epsilon_{\vec{k}} - \mu$  stała  $g$  jest mierzona,

gdzie  $\epsilon_F - \hbar\omega_D \leq \epsilon_{\vec{k}} \leq \epsilon_F + \hbar\omega_D$ .

Hamiltonian ten będziemy rozwiązywać przy pomocy przybliżenia średniego pola.

Niech  $\langle \hat{A} \rangle$  jest wartość średnią operatora  $\hat{A}$ , a  $\langle \hat{B} \rangle$  jest wartość średnią operatora  $\hat{B}$ . Natomiast

$\delta \hat{A} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle$  i  $\delta \hat{B} = \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle$  opisuje fluktuacje.

Prybliżenie pola średniego zaniedbuje fluktuacje, czyli

$$\delta \hat{A} \cdot \delta \hat{B} = (\hat{A} - \langle A \rangle)(\hat{B} - \langle B \rangle) = \\ = \hat{A} \hat{B} - \hat{A} \langle B \rangle - \langle A \rangle \hat{B} + \langle A \rangle \langle B \rangle \approx 0,$$

czyli  $\hat{A} \hat{B} = \hat{A} \langle B \rangle + \langle A \rangle \hat{B} - \langle A \rangle \langle B \rangle$

w naszym przypadku operatorem  $\hat{A}$  będzie operator kreacji pary Coopera, tj.  $\hat{A} = b_k^+ = c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+$ , a operatorem  $\hat{B}$  operator anihilacji pary Coopera, tj.  $\hat{B} = b_k = c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow}$ .

① Hamiltonian Bogolubowa-de Gennesa  
Zastosować przybliżenie średniego pola do efektywnego hamiltonianu BCS, a następnie uzyskany hamiltonian przepisać przy wykorzystaniu notacji Nambu, tj. wykorzystując spinor:

$$\psi_k^+ = (c_{k\uparrow}^+, c_{-k\downarrow}) \text{ oraz jego sprzężenie hermitowskie.}$$

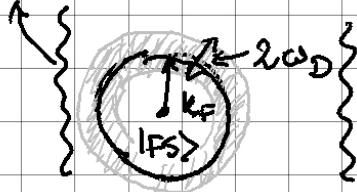
### Rozwiązanie:

$$c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow} \approx c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ \langle c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow} \rangle + \\ + c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow} \langle c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ \rangle - \langle c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow} \rangle \langle c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ \rangle$$

cykli

$$\hat{H}_{\text{BCS}} - \mu \hat{N} = \sum_{\vec{k}\sigma} \xi_{\vec{k}\sigma} c_{k\sigma}^+ c_{k\sigma} - \frac{g}{\Omega} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \left\{ \langle c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ \rangle c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow} + \right. \\ \left. + \langle c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow} \rangle c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ - \langle c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ \rangle \langle c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow} \rangle \right\} = \\ = \left\{ \begin{array}{l} \text{wprowadzamy oznaczenie} \\ \Delta = \frac{g}{\Omega} \sum_{\vec{k}} \langle c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} \rangle \end{array} \right\} =$$

$$= \sum_{\vec{k}\sigma} \xi_{\vec{k}\sigma} c_{k\sigma}^+ c_{k\sigma} - \sum_{\vec{k}} (\Delta^* c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} + \Delta c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+) + \frac{\Omega |\Delta|^2}{g}$$



Spinory Nambu:

$$\Psi_{\vec{k}}^+ = (c_{k\uparrow}^+, c_{-k\downarrow})$$

$$\Psi_{\vec{k}} = \begin{pmatrix} c_{k\uparrow} \\ c_{-k\downarrow}^+ \end{pmatrix}$$

$$\hat{H}_{\text{BCS}} - \mu \hat{N} = \sum_{\vec{k}} \Psi_{\vec{k}}^+ \begin{pmatrix} \xi_{\vec{k}} & -\Delta \\ -\Delta^* & -\xi_{\vec{k}} \end{pmatrix} \Psi_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}} \xi_{\vec{k}} + \frac{\Omega |\Delta|^2}{g}$$

$$\left\{ \sum_{\vec{k}} \xi_{\vec{k}} c_{k\downarrow}^+ c_{k\downarrow} = \sum_{\vec{k}} \xi_{\vec{k}} c_{-k\downarrow}^+ c_{-k\downarrow} = \sum_{\vec{k}} \xi_{\vec{k}} - \sum_{\vec{k}} \xi_{\vec{k}} c_{-k\downarrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ \right\}$$

② Transformacja Bogolubowa - Valatina  
 Zdiagonalizować hamiltonian Bogolubowa -  
 de Gennesa z poprzedniego zadania  
 wykorzystując transformację Bogolubowa -  
 Valatina:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{k\uparrow} \\ \alpha_{-k\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k^* & -v_k \\ v_k^* & u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{k\uparrow} \\ c_{-k\downarrow}^\dagger \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:

Transformacja Bogolubowa - Valatina jest  
 transformacją kanoniczną, czyli  
 musi zachowywać relacje komutacyjne  
 w tym przypadku:

$$\begin{aligned} \{\alpha_{k\uparrow}, \alpha_{k\uparrow}^\dagger\} &= \alpha_{k\uparrow} \alpha_{k\uparrow}^\dagger + \alpha_{k\uparrow}^\dagger \alpha_{k\uparrow} = \\ &= \{(u_k^* c_{k\uparrow} - v_k c_{-k\downarrow}^\dagger), (u_k c_{k\uparrow}^\dagger - v_k^* c_{-k\downarrow})\} = \\ &= |u_k|^2 \overset{1}{\{c_{k\uparrow}, c_{k\uparrow}^\dagger\}} - u_k^* v_k^* \overset{0}{\{c_{k\uparrow}, c_{-k\downarrow}\}} + \\ &\quad - v_k u_k \overset{0}{\{c_{-k\downarrow}^\dagger, c_{k\uparrow}^\dagger\}} + |v_k|^2 \overset{1}{\{c_{-k\downarrow}^\dagger, c_{-k\downarrow}\}} = \end{aligned}$$

$$= |v_k|^2 + |u_k|^2 \stackrel{!}{=} 1$$

Oznacza to, że transformacja Bogolubowa jest transformacją unitarną.

Szukamy wartości własnych hamiltonianu:

$$\begin{vmatrix} \xi_k - E & -\Delta \\ -\Delta^* & -\xi_k - E \end{vmatrix} = -(\xi_k - E)(\xi_k + E) - \Delta^2 = 0$$

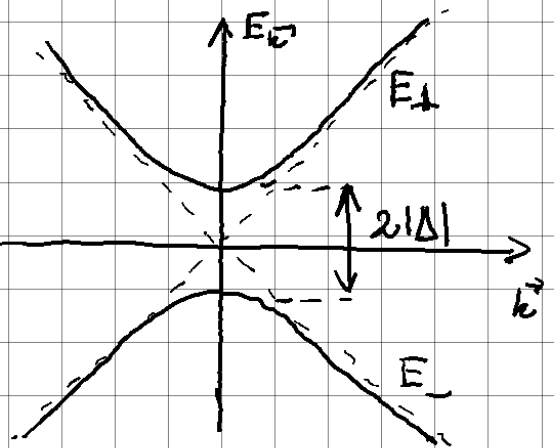
$$\Rightarrow E^2 = \xi_k^2 + |\Delta|^2 \Rightarrow E_{\pm} = \pm \sqrt{\xi_k^2 + |\Delta|^2} = \pm E_k$$

Wykorzystujemy:

$$\begin{pmatrix} c_{k\uparrow} \\ c_{-k\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k & v_k \\ -v_k^* & u_k^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{k\uparrow} \\ \alpha_{-k\downarrow}^\dagger \end{pmatrix}$$

$$\text{bo } U^\dagger = U^{-1}$$

dla unitarnej  $U$



$$\hat{H}_{\text{BCS}} - \mu \hat{N} = \sum_{\vec{k}} (\alpha_{k\uparrow}^\dagger, \alpha_{-k\downarrow}) \begin{pmatrix} u_k^* & -v_k \\ v_k^* & u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_k & -\Delta \\ -\Delta^* & -\xi_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k & v_k \\ -v_k^* & u_k^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{k\uparrow} \\ \alpha_{-k\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{\vec{k}} \xi_k + \frac{Q|\Delta|^2}{g} =$$

$$= \sum_{\vec{k}} (\alpha_{k\uparrow}^\dagger, \alpha_{-k\downarrow}) \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & -E_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{k\uparrow} \\ \alpha_{-k\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} + \sum_{\vec{k}} \xi_k + \frac{Q|\Delta|^2}{g}$$

przy czym

$$\begin{cases} |u_k|^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\xi_k}{E_k} \right) \\ |v_k|^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\xi_k}{E_k} \right) \end{cases}$$

→ patrz  
praca domowa  
(seria V)

$$\hat{H}_{BCS} - \mu \hat{N} = \sum_{\vec{k}} \left( E_k \alpha_{\vec{k}\uparrow}^\dagger \alpha_{\vec{k}\uparrow} - E_k \alpha_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \alpha_{-\vec{k}\downarrow} \right) + \sum_{\vec{k}} \xi_k + \frac{\Omega |\Delta|^2}{g} =$$

$\underbrace{\alpha_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \alpha_{-\vec{k}\downarrow}}_{1 - \alpha_{\vec{k}\uparrow}^\dagger \alpha_{\vec{k}\uparrow}}$

$$\stackrel{\uparrow}{=} \sum_{\vec{k}\sigma} E_k \alpha_{\vec{k}\sigma}^\dagger \alpha_{\vec{k}\sigma} + \sum_{\vec{k}} (\xi_k - E_k) + \frac{\Omega |\Delta|^2}{g} =$$

$$E_n = E_{-k}$$

$$= E_{BCS} + \sum_{\vec{k}\sigma} E_k \alpha_{\vec{k}\sigma}^\dagger \alpha_{\vec{k}\sigma}$$

kwantizacja - Boglubony -

superpozycja elektronów

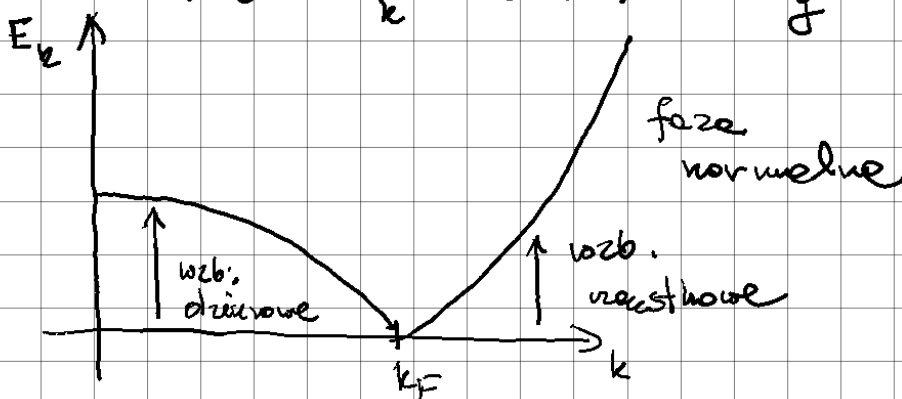
powyżej  $\epsilon_F$  i dziur

poniżej  $\epsilon_F$ .

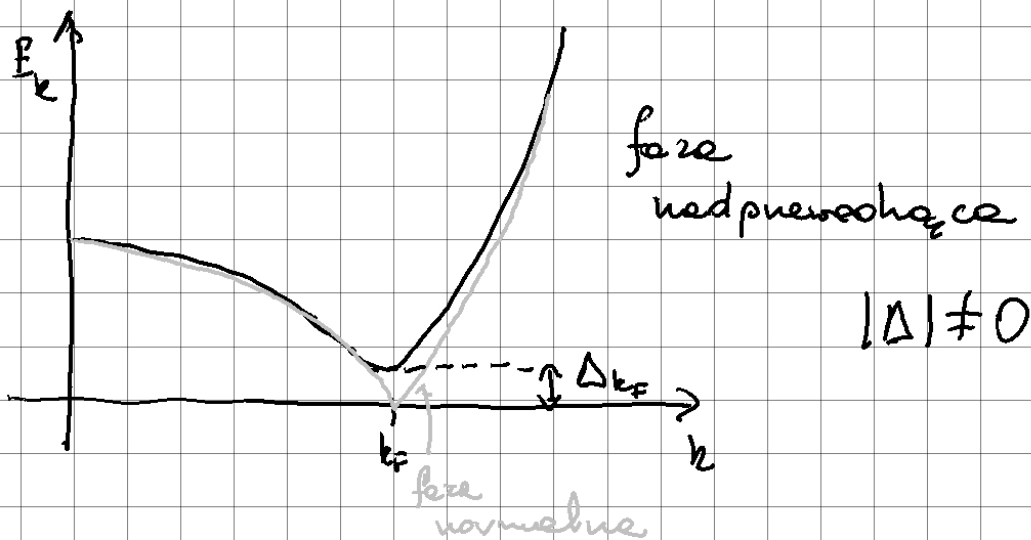
Energia stanu podstawowego:

$$E_{BCS} = \sum_{\vec{k}} (E_k - \xi_k) + \frac{\Omega |\Delta|^2}{g}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \xi_k &= \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \\ \mu &= \epsilon_F + O(T^2) \end{aligned} \right.$$



$$|\Delta| = 0$$



W stanie nadprzewodzącym otwiera się przerwa energetyczna.

W ogólnym przypadku para Coopera tworzące kondensat posiadające pewien wypadkowy pęd  $\hbar \vec{K}$  związany z przepływem prądu w naszym układzie.

W takim przypadku pędy stanów par mają postać:

$$\left| \vec{k}_i + \frac{\vec{K}}{2}, \uparrow; -\vec{k}_i + \frac{\vec{K}}{2}, \downarrow \right\rangle_{\text{Cooper}}$$

dla  $i$ -tej pary Coopera. Elektrony mogą brać w tym przypadku udział w wielu procesach rozpraszania,

które zachowują całkowity sumaryczny pęd. W trakcie rozproszeń mamy:

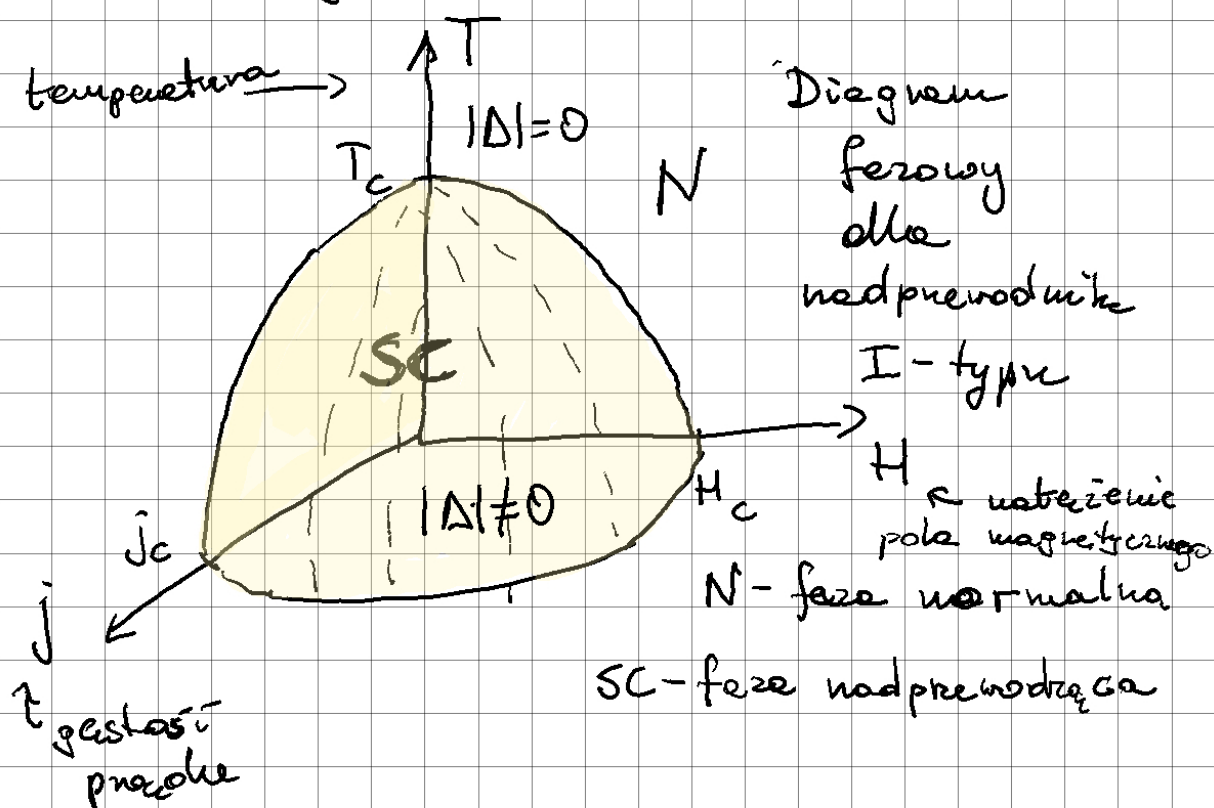
$$|\vec{k}_i + \frac{\vec{K}}{2}, \uparrow; -\vec{k}_i + \frac{\vec{K}}{2}, \downarrow\rangle_{\text{Cooper}} \longrightarrow |\vec{k}_i' + \frac{\vec{K}}{2}, \uparrow; -\vec{k}_i' + \frac{\vec{K}}{2}, \downarrow\rangle_{\text{Cooper}}$$

W przypadku normalnego przewodnika procesy rozpraszeniowe np. na domieszce powodują zmianę pędu nośników, co powoduje wystąpienie oporu elektrycznego w skali makroskopowej.

W nadprzewodniku elektrony tworzą pary Coopera i też ulegają rozproszeniom, ale sumaryczny pęd pary jest zachowany. Zmiana pędu może nastąpić dopiero po wznowieniu pary do czego potrzebna jest energia  $2|\Delta|$ , stąd także wystąpienie temperatury krytycznej,



prądu krytycznego i krytycznego pola magnetycznego, które wiążą się ze skalą energii przy której pary Coopera ulegają rozwarciu.



### 3) Równanie pierwszy

Wyprosić równanie pierwszy energetycznej, a następnie za jej pomocą obliczyć jej wartość dla  $T=0$ .

Rozwiązanie: ( $\hbar=1$ )

Wiemy, że

$$\Delta = - \frac{g}{\Omega} \sum_k \langle c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} \rangle$$

$\nwarrow |\vec{k}| < \omega_D$

W celu znalezienia równania pierwszy wykorzystamy operatory zdefiniowane przy transformacji Bogolubowa-Valatinie

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{g}{\Omega} \sum_k \langle (-v_k \alpha_{k\uparrow}^\dagger + u_k \alpha_{-k\downarrow}) (u_k \alpha_{k\uparrow} + v_k \alpha_{-k\downarrow}^\dagger) \rangle = \\ &= \frac{g}{\Omega} \sum_k \left\{ -u_k v_k \langle \alpha_{k\uparrow}^\dagger \alpha_{k\uparrow} \rangle - v_k^2 \langle \alpha_{k\uparrow}^\dagger \alpha_{-k\downarrow}^\dagger \rangle \right. \\ &\quad \left. + u_k^2 \langle \alpha_{-k\downarrow} \alpha_{k\uparrow} \rangle + u_k v_k \langle \alpha_{-k\downarrow} \alpha_{-k\downarrow}^\dagger \rangle \right\} \end{aligned}$$

Operatory  $\alpha$  opisujące termiczne wzbudzenia fermionowe w nadprzewodniku, stąd możemy wyznaczyć warunki samozgodności:

$$\langle \alpha_{k\uparrow}^\dagger \alpha_{-k\downarrow}^\dagger \rangle = 0, \quad \langle \alpha_{k\downarrow} \alpha_{k\uparrow} \rangle = 0$$

$$\langle \alpha_{k\uparrow}^\dagger \alpha_{k\uparrow} \rangle = f(E_k) = \frac{1}{e^{\beta E_k} + 1}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

$\uparrow$  rozkład Fermiego

$$\langle a_{k\downarrow} a_{k\downarrow}^\dagger \rangle = 1 - \langle a_{k\downarrow}^\dagger a_{k\downarrow} \rangle = 1 - f(E_k),$$

$\nwarrow$   
 $1 - a_{k\downarrow}^\dagger a_{k\downarrow}$

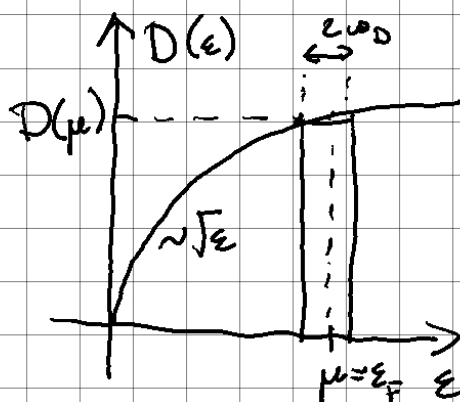
czyli

$$\Delta = \frac{g}{\Omega} \sum_k \underbrace{u_k v_k}_{\frac{\Delta}{2E_k}} \underbrace{\left[ 1 - 2f(E_k) \right]}_{\tanh\left(\frac{\beta}{2} E_k\right)} = \frac{g}{\Omega} \sum_k \frac{\Delta}{2E_k} \tanh\left(\frac{\beta}{2} E_k\right)$$

Pierwsza energetyczna dla  $T=0$ :

$$1 = g \int_{-\omega_D}^{\omega_D} D(\mu + \xi) \frac{\tanh\left(\frac{\beta}{2} \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}\right)}{2 \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} d\xi =$$

$\omega_D \leftarrow$  gęstość stanów



$$= g D(\mu) \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi \frac{\tanh\left(\frac{\beta}{2} \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}\right)}{2 \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}$$

$\downarrow T \rightarrow 0$

$$g D(\mu) \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi \frac{1}{2 \sqrt{\xi^2 + \Delta_0^2}} = 1$$

$$1 = g D(\epsilon_F) \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi \frac{1}{2 \sqrt{\xi^2 + \Delta_0^2}} = g D(\epsilon_F) \operatorname{arsinh}\left(\frac{\omega_D}{\Delta_0}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta_0 = \frac{\omega_D}{\sinh\left(\frac{1}{g D(\epsilon_F)}\right)} \xrightarrow{g \rightarrow 0} 2\omega_D \exp\left(-\frac{1}{g D(\epsilon_F)}\right)$$