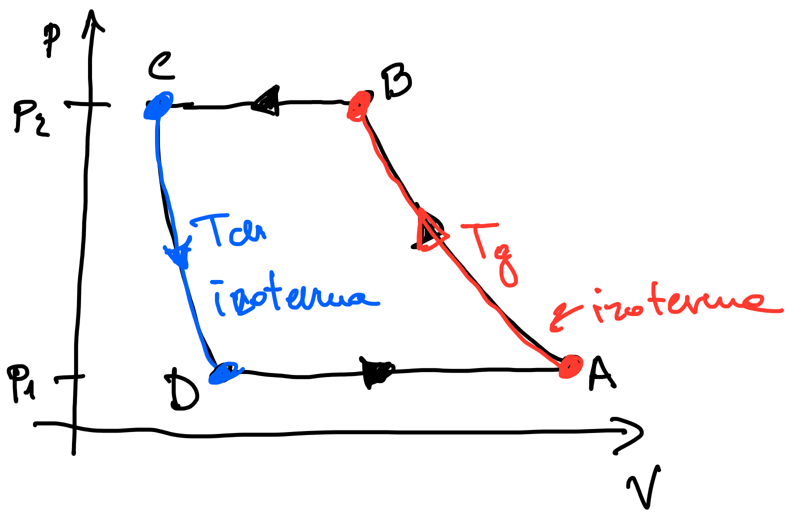
Koło olimpijskie - klasa III 19.12.2020

8. Termodynamika fenomenologiczna



Znaleźć sprawność lodówki $\eta_L = ?$

Dla ustalonych p_1, p_2, T_g obliczyć do jakiej najniższej temperatury T_{ch} lodówka będzie działać, tzn. pobierać ciepło ze swego wnętrza. Ciałem roboczym jest gaz doskonały.

Obliczamy pobrane i oddane ciepła w tym procesie:

1°) Dla gazu doskonałego $c_p = c_v + R$

Izobary:

- $B \to C$: $Q_{B\to C} = n c_p (T_{ch} - T_g) < 0$ – ciepło pobierane z lodówki
- $D \to A$: $Q_{D\to A} = n c_p (T_g - T_{ch}) > 0$ – ciepło jest pobierane z otoczenia

Izotermy: (tutaj $\Delta U = 0$, bo $T = \text{const} \Rightarrow Q = -W$)

$A \to B$: $Q_{A\to B} = -W_{A\to B} = \int_{V_A}^{V_B} p\,dV = nRT_g \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) =$

$p = \frac{nRT_g}{V}$; $p(V) \sim \frac{1}{V}$

$= nRT_g \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) < 0$ – ciepło oddawane do otoczenia

$C \to D$: $Q_{C\to D} = -W_{C\to D} = \int_{V_C}^{V_D} p(V)\,dV = nRT_{ch} \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) =$

$= nRT_{ch} \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) > 0$ – ciepło pobierane z lodówki

Ciepło efektywnie pobierane z lodówki wynosi:

$$Q_{pob}(T_{ch}) = Q_{C\to D} + Q_{B\to C} = nRT_{ch}\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) - nc_p\left(T_g - T_{ch}\right)$$

Teraz obniżamy temp. wnętrza lodówki: $T_{ch}\searrow$;

$-|Q_{C\to D}|$ maleje wraz z T_{ch} malejącym

$-|Q_{B\to C}|$ rośnie wraz z T_{ch} malejącym

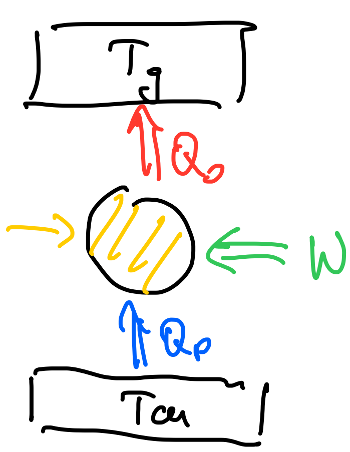
$$Q_{pob} = 0 \Rightarrow nRT_{ch}^{min}\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) - nc_p\left(T_g - T_{ch}^{min}\right) = 0$$

$$nRT_{ch}^{min}\left(\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \frac{c_p}{R}\right) = nc_pT_g$$

$$\boxed{T_{ch}^{min} = \frac{T_g}{\frac{R}{c_p}\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + 1}}$$

2°) Sprawność lodówki:

$$\eta_L = \frac{\text{„zysk''}}{\text{„koszt''}} = \frac{|Q_p|}{|W|} = \frac{|Q_p|}{|Q_o| - |Q_p|} =$$



$$= \frac{nRT_{ch}\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) - nc_p\left(T_g - T_{ch}\right)}{nR\left(T_g - T_{ch}\right)\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)} =$$

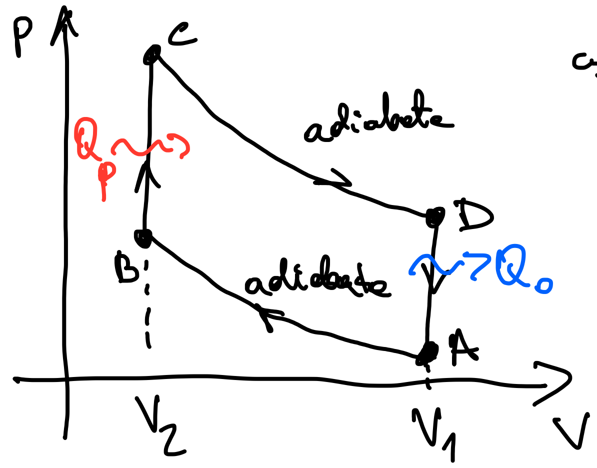
$$\left\{ |Q_o| = \left| nRT_g\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) + nc_p\left(T_g - T_{ch}\right)\right| \right\}$$

$$\Delta U = 0 \Rightarrow |W| + |Q_p| - |Q_o| = 0 \Rightarrow |W| = |Q_o| - |Q_p|$$

$$= \frac{T_{ch}}{T_g - T_{ch}} - \frac{c_p}{R\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)} = \eta_L^{carnot} - \frac{c_p}{R\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}$$

$$\eta_L < \eta_L^{carnot}$$

cykl Otto



Znaleźć sprawność silnika Otto

$$\eta = ?$$

wyrazić ją za pomocą stopnia sprężania $r_c = \dfrac{V_1}{V_2}$:

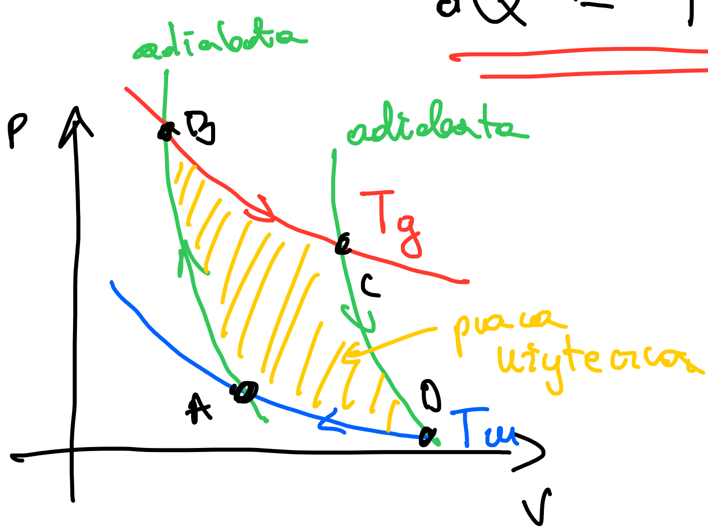
$$\eta = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{R/c_V} = 1 - r_c^{-\frac{R}{c_V}}$$

„Dowód" tego, że cykl Carnota osiąga maksymalną sprawność.

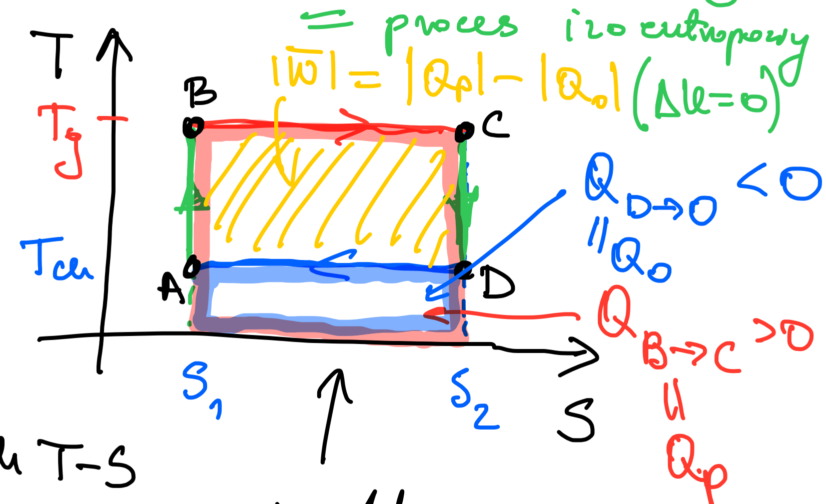
$$\underline{dQ = T\,dS} \quad \text{entropia} \quad \Longrightarrow \quad dQ = 0 \iff dS = 0$$

proces adiabatyczny = proces izoentropowy

$$|W| = |Q_p| - |Q_o| \quad (\Delta U = 0)$$

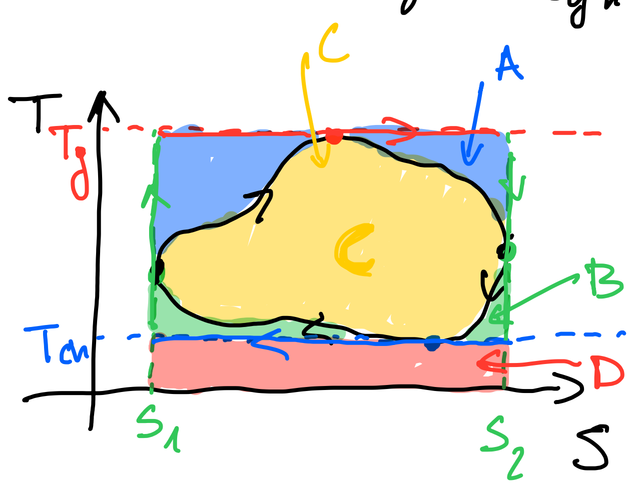


$\Longrightarrow$ możemy użyć takie zmiennych T–S



cykl Carnota w zmiennych T-S

Na dowolnym cyklu można opisać prostokąt odpowiadający cyklowi Carnota.



$$\eta = 1 - \frac{|Q_o|}{|Q_p|} \underset{dQ = T dS}{=} 1 - \frac{B+D}{C+B+D} =$$

$$= \frac{C}{C+B+D}$$

$$\eta_{carnota} = 1 - \frac{|Q_o|}{|Q_p|} = 1 - \frac{D}{A+B+C+D} = \frac{A+B+C}{A+B+C+D}$$

Jeżeli chcemy pokazać, że $\eta_{carnota} > \eta$:

muszę pokazać, że jest to spełnione zawsze

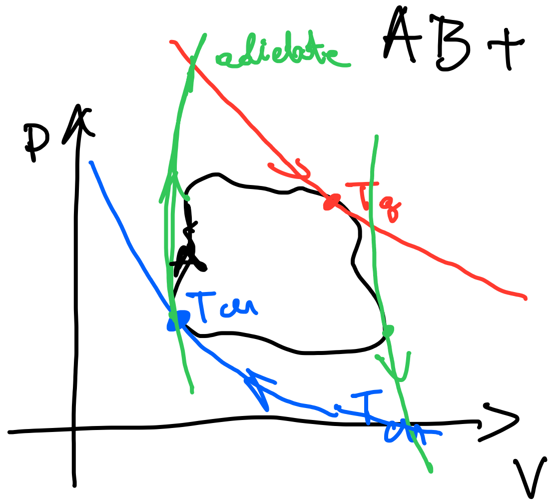
$$\frac{A+B+C}{A+B+C+D} > \frac{C}{C+B+D}$$

mnożę na krzyż

$$\Rightarrow AB + \cancel{AC} + AD + B^2 + BC + BD + \cancel{BC} + \cancel{C^2} + \cancel{CD} >$$

$$> \cancel{AC} + \cancel{BC} + \cancel{C^2} + \cancel{DC}$$

$$AB + AD + B^2 + BC + BD > 0$$ jest spełnione zawsze

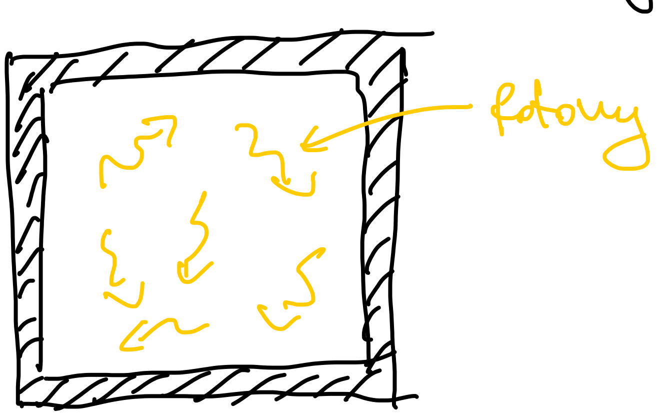


Wniosek:

$$\boxed{\eta < \eta_{Carnot}}$$

Promieniowanie termiczne

Promieniowanie = gaz fotonów = gaz fotonowy



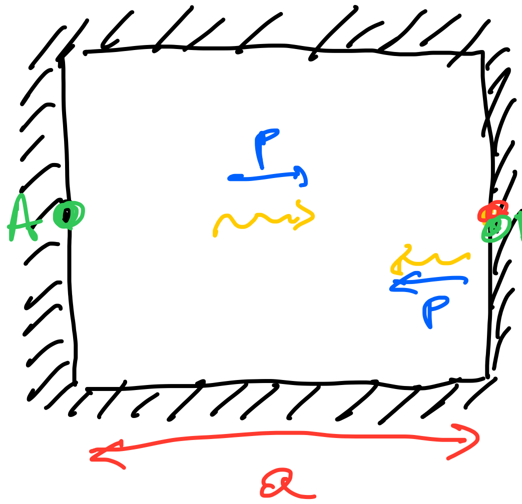
Foton to cząstka bezmasowa, która porusza się z prędkością światła c, a jego energia jest związana z pędem:

$$\boxed{E = cp} \qquad \left(E_{kin} = \frac{p^2}{2m} \right)$$

cząstki masywne

Fotony nie oddziałują ze sobą.

Weźmy pojedynczy foton w pudle:



następuje przekaz pędu ściance w trakcie zderzenia wynoszący

$$\Delta p = 2p$$

Czas potrzebny fotonowi na przebycie wnęki od A do B i spowrotem wynosi:

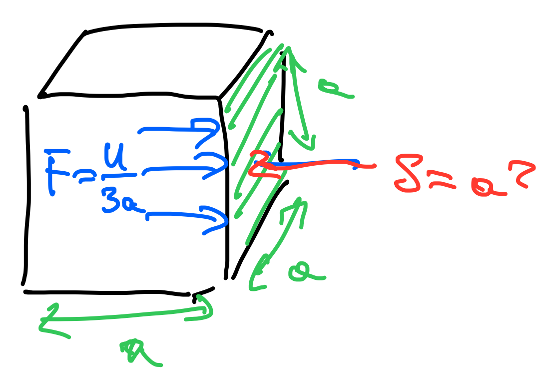
$$\Delta t = \frac{2a}{c}$$

Siła wywierana na ściankę przez pojedynczy foton wynosi:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2pc}{2a} = \frac{pc}{a} = \frac{E}{a}$$

Niech U będzie energią wewnętrzną wszystkich fotonów zamkniętych we wnęce. Fotony poruszają się niezależnie w losowych kierunkach (x, y, z), czyli $\frac{1}{3}$ całkowitej energii przypada na każdy z kierunków, czyli

$$F = \frac{U}{3a}$$



Ciśnienie gazu wynosi:

$$P = \frac{U}{3a^3} = \frac{U}{3V} \Rightarrow \boxed{PV = \frac{U}{3}}$$

← coś innego niż gaz doskonały

$$u = \frac{U}{V}$$ – gęstość energii

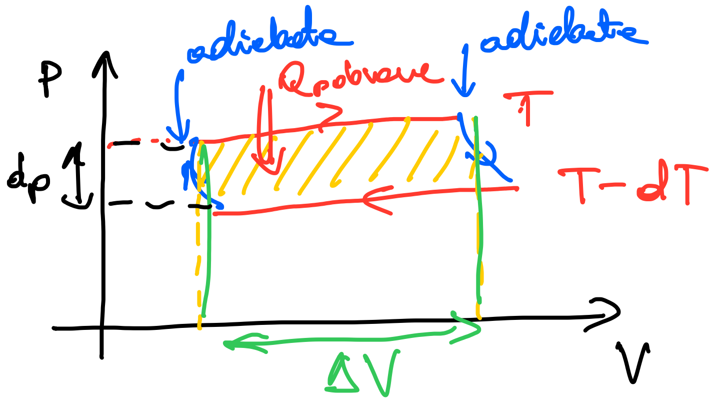
jest funkcją tylko temperatury!

W przypadku gazu doskonałego

$$U = \frac{3}{2}nRT, \quad pV = nRT$$

$$pV = \frac{2}{3}U$$

Dla gazu fotonowego: $p = \frac{1}{3} u(T)$ $\longrightarrow$ izobary = izotermy dla gazu fotonowego



infinitezymalny cykl Carnota

$$\eta = \frac{|W|}{|Q_{pobrane}|} = 1 - \frac{T_{ch}}{T_g}$$

$$|W| = dp\,\Delta V \underset{\substack{\uparrow \\ dp = \frac{1}{3}du}}{=} \frac{1}{3} du\, \Delta V$$

$$|Q_{pobrane}| = p\Delta V + \Delta U = \underbrace{p}_{= \frac{1}{3}u}\Delta V + u\Delta V = \frac{4}{3} u \Delta V$$

$$\eta = \frac{\frac{1}{3} du\, \cancel{\Delta V}}{\frac{4}{3} u\, \cancel{\Delta V}} = 1 - \frac{T - dT}{T} = \frac{T - T + dT}{T} = \frac{dT}{T}$$

$$\frac{1}{4}\frac{du}{u} = \frac{dT}{T} \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int 4 \frac{dT}{T}$$

$$\ln u = 4 \ln T + C$$

CIAŁO DOSKONALE CZARNE $\Rightarrow$ $\boxed{u(T) = A T^4}$

Wnęka ta zachowuje się tak jakby idealnie pochłaniała fotony

moc promieniowania emitowana przez dziurkę jest proporcjonalna do gęstości energii

$$\boxed{\frac{P_{prom.}}{A} = \sigma T^4}\ , \quad \sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$$

prawo Stefana-Boltzmanna

– stała Stefana-Boltzmanna

$$\frac{P_{prom.}}{A} = \frac{\Delta E}{\Delta t\, A}$$

ΔE – ilość energii emitowana przez ciało doskonale czarne

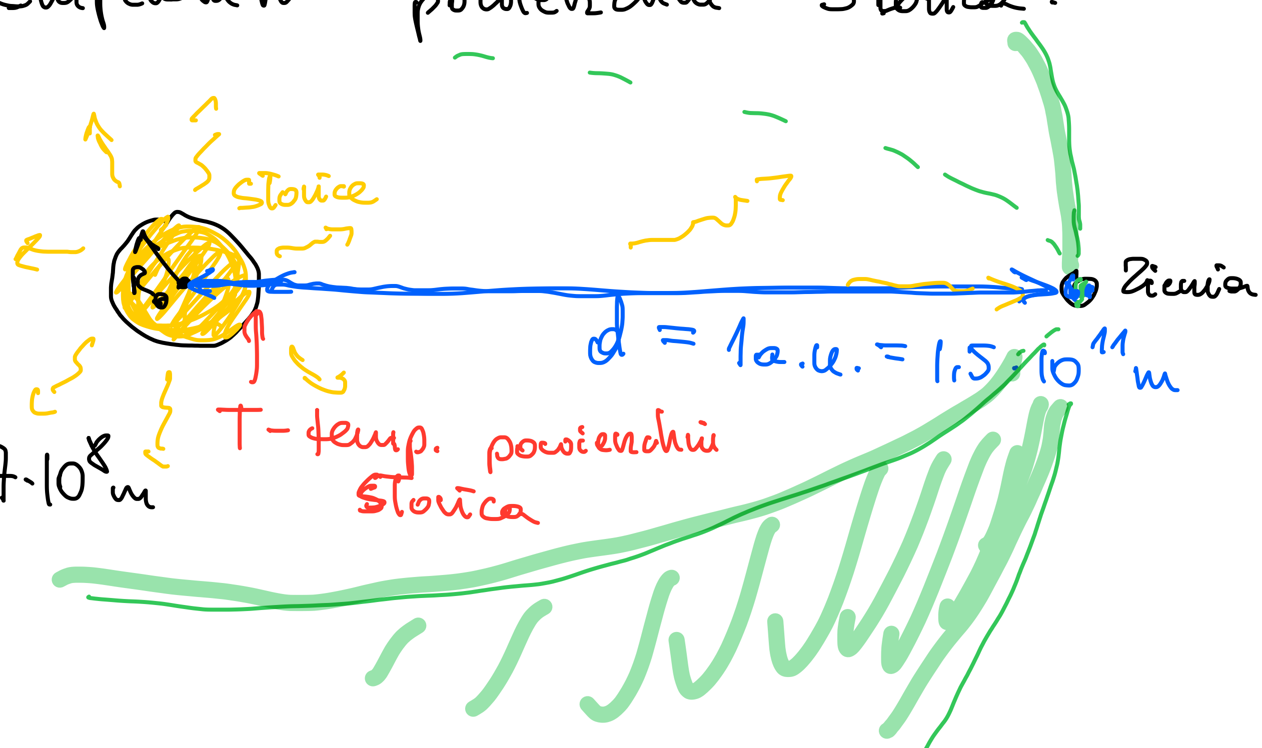
Δt – jednostka czasu

A – pole powierzchni z której jest emitowane

Stała słoneczna $S = 1{,}94 \frac{cal}{cm^2 \cdot min} = 1{,}36 \cdot 10^3 \frac{W}{m^2}$
jest to ilość energii dostarczana w jednostce czasu do jednostki powierzchni Ziemi ze Słońca.

Słońce można traktować jak ciało doskonale czarne.

Temperatura powierzchni Słońca:



$R_\odot = 7 \cdot 10^8 m$

Moc emitowana przez Słońce:

$$P_{tot} = \sigma T_\odot^4 \cdot A = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4$$

$T_\odot$ – temp. pow. Słońca

A – pow. Słońca

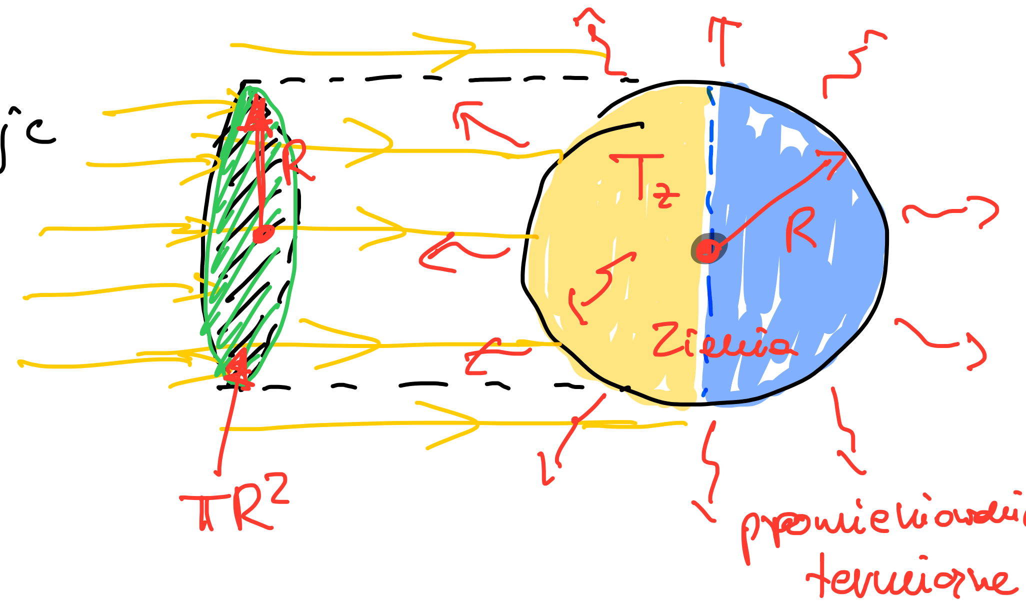
jest ona równa mocy przechodzącej przez sferę o promieniu orbity Ziemi:

$$P_{tot} = 4\pi d^2 \cdot S$$

$$4\pi d^2 S = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4 \Rightarrow T_\odot = \sqrt[4]{\frac{S}{\sigma}\left(\frac{d}{R_\odot}\right)^2} = 5760\,K$$

Temperatura na powierzchni Ziemi

1°) Ziemia to ciało doskonale czarne



Ziemia wypromieniowuje energię termiczną:

$$P_{wyp.} = 4\pi R^2 \sigma T_Z^4$$

Ziemia pochłania energię słoneczną:

$$P_{poch.} = \pi R^2 S$$

W sytuacji równowagi termicznej $P_{wyp} = P_{poch.}$

$$4\pi R^2 \sigma T_Z^4 = \pi R^2 S$$

$$\Rightarrow T_Z = \left(\frac{S}{4\sigma}\right)^{1/4} = 5{,}8\,°C$$

α – albedo – mówi o tym jaka część energii docierającej do ciała niebieskiego jest odbijana

2°) Ziemia to ciało doskonale czarne o albedo $\alpha = 30\% = 0{,}3$

Tym razem ilość pochłanianego promieniowania będzie mniejsza:

$$P_{poch} = (1-\alpha)\pi R^2 S$$

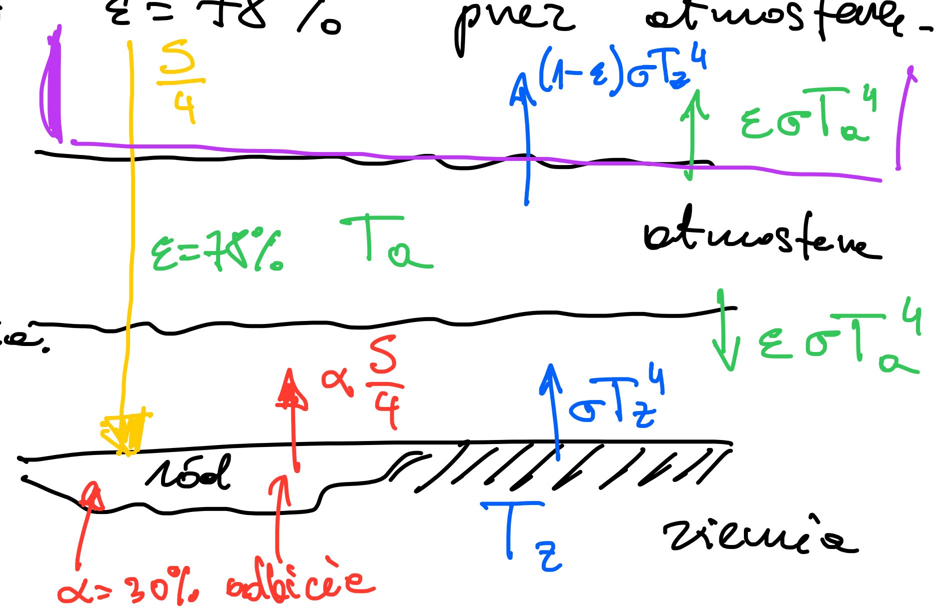
$$P_{poch} = P_{wyp} \Longrightarrow T_z = \left(\frac{(1-\alpha)S}{4\sigma}\right)^{1/4} \approx -18°C$$

3°) Efekt cieplarniany

Mniej więcej 78% promieniowania podczerwonego jest pochłaniane przez gazy cieplarniane w atmosferze.

Ziemia to ciało doskonale czarne o albedo $\alpha = 30\%$ oraz promieniowanie podczerwone jest pochłaniane w $\varepsilon = 78\%$ przez atmosferę.

Traktując atmosferę jak ciało doskonale szare, tj. pochłaniające część promieniowania.



Równowaga promienista nad atmosferą ze dwóch góry

$$S(1-\alpha)\pi R^2 = 4\pi R^2\left[(1-\varepsilon)\sigma T_z^4 + \varepsilon\sigma T_a^4\right] \quad (*)$$

Równowaga promienista przy powierzchni Ziemii

$$-S(1-\alpha)\pi R^2 = 4\pi R^2\left[-\sigma T_z^4 + \varepsilon\sigma T_a^4\right]$$

Jeżeli dodamy to stronami:

$$0 = 4\pi R^2 \left[(1-\varepsilon)\sigma T_z^4 + \varepsilon\sigma T_a^4 - \sigma T_z^4 + \varepsilon\sigma T_a^4 \right] =$$

$$= 4\pi R^2 \left[-\varepsilon\sigma T_z^4 + 2\varepsilon\sigma T_a^4 \right] = 0 \Rightarrow T_a = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} T_z$$

Wstawiając to do (*):

$$\frac{S(1-\alpha)}{4} = (1-\varepsilon)\sigma T_z^4 + \varepsilon\sigma \frac{T_z^4}{2} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\sigma T_z^4$$

$$T_z = \sqrt[4]{\frac{S(1-\alpha)}{4\sigma\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}} = 15{,}4^\circ C$$