

Kwantowanie pola elektromagnetycznego:

$$\hat{\vec{A}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_{\vec{k}}}} \left[a_{\vec{k}\lambda} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_{\vec{k}}t)} + a_{\vec{k}\lambda}^{\dagger} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_{\vec{k}}t)} \right] \vec{e}_{\lambda}$$

$\vec{e}_{\lambda}$
↑ wektor polaryzacji

Hamiltonian dla fotonów:

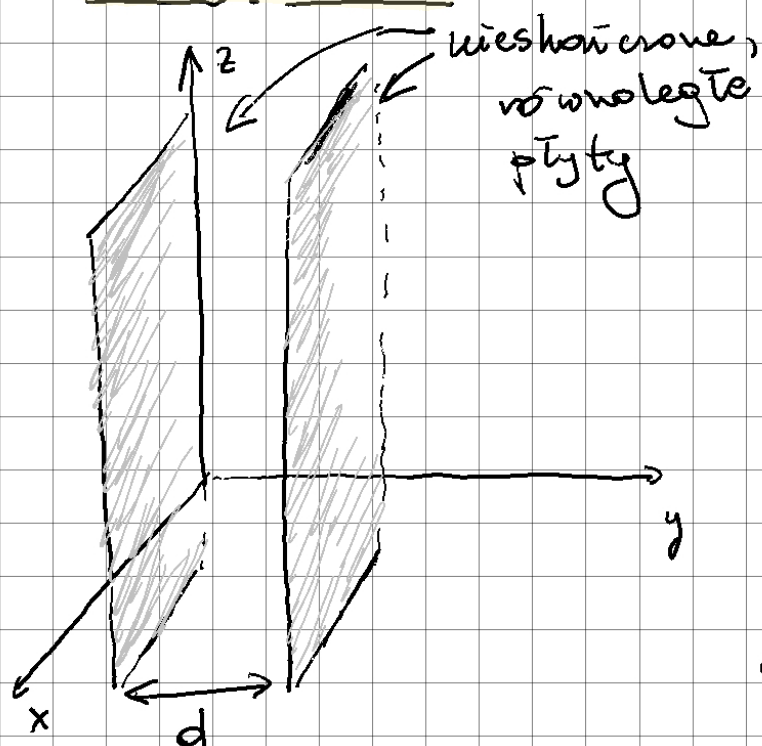
$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}\lambda} \hbar \omega_{\vec{k}} \left(a_{\vec{k}\lambda}^{\dagger} a_{\vec{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right)$$

① Efekt Casimira

Wyprowadzić wyrażenie na siłę działającą pomiędzy dwoma nieskończonymi i równoległymi płytami, które są wykonane z przewodzącego materiału.

W rozwiązaniu należy wypisać wyrażenie na gęstość energii próżni elektromagnetycznej pomiędzy nimi oraz wykonać stosowne sumowanie postępując się metodą regularizacji funkcją ζ Riemanna.

Rozwiązanie:



Klasycznie:

Nakładamy

periodyczne warunki

brzegowe na

kierunkach x i y .

Ponadto chcemy,

aby składowa

styczna pola

elektrycznego i normalna pola

magnetycznego zniknęły na powierzchni

przewodzących płyt.

Potencjał wektorowy dla $k_z \neq 0$:

$$\vec{A} = \vec{e} e^{ik_x x} e^{ik_y y} \sin(k_z z) e^{-i\omega t},$$

gdzie $k_i = \frac{2\pi}{L_i} n_i$, $i \in \{x, y\}$, $n_i \in \mathbb{Z}$

$$k_z = n_z \frac{\pi}{d}, \quad n_z \in \mathbb{Z}_+$$

$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$, $\vec{e}$ - wektor polaryzacji

ponieważ $\varphi = \text{const}$ oraz $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$,

czyli
$$\vec{E} = i\omega_n \vec{E} e^{ik_x x} e^{ik_y y} \sin(k_z z) e^{-i\omega_n t}$$

natomiast korzystając z $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

dobędziemy, że

$$\vec{B} = \vec{k} \times \vec{E} e^{ik_x x} e^{ik_y y} \cos(k_z z) e^{-i\omega_n t}$$

Znikanie składowej stycznej pola elektrycznego jest zapewnione przez $\sin(k_z z)$ w wyrażeniu na $\vec{E}$, natomiast

znikanie składowej normalnej pola magnetycznego wymaga, aby:

$$\vec{e}_z \cdot (\vec{k} \times \vec{E}) = 0, \text{ czyli } \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

Korzystając z prawa Gaussa dostajemy ponadto:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \begin{cases} k_x \varepsilon_y - k_y \varepsilon_x = 0 \\ k_x \varepsilon_x + k_y \varepsilon_y + k_z \varepsilon_z = 0 \end{cases} \quad \forall \vec{k} \quad z \quad k_z \neq 0$$

Kwantowo: gęstość energii we wnętrzu
wnetru

Hamiltonian: $\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}} + \frac{1}{2})$

(na razie pomijamy polaryzację,
wrócimy do niej za chwilę)

Stan próżni elektromagnetycznej definiujemy
jako:

$$a_{\vec{k}} |0\rangle = 0,$$

przy czym $|0\rangle$ możemy rozpisać dla
poszczególnych modów:

$$|0\rangle = |0_{\vec{k}_1}\rangle \otimes |0_{\vec{k}_2}\rangle \otimes \dots$$

W związku z tym wartość oczekiwana
energii próżni wynosi:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \langle 0 | \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}} + \frac{1}{2}) | 0 \rangle = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} a_{\vec{k}} | 0 \rangle = 0 \\ \langle 0 | a_{\vec{k}}^{\dagger} = 0 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} \leftarrow \text{energia} \\ &\hspace{15em} \text{próżni} \end{aligned}$$

Zauważmy, że energia próżni jest
nieskończona!

Uwzględnijmy polaryzację w naszym przypadku:

- gdy $k_z = 0$, wtedy mamy jedną możliwą polaryzację $\vec{E} = \vec{e}_z$ (patrz (*))
- gdy $k_z \neq 0$, wtedy mamy dwie możliwe polaryzacje

ponieważ $\omega_{\vec{k}} = c |\vec{k}|$, więc

energia wewnątrz której wynosi:

$$E_{\text{cav}} = \frac{1}{2} \hbar c \sum_{n_x=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_y=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_z=-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{2\pi}{L_x} \right)^2 n_x^2 + \left(\frac{2\pi}{L_y} \right)^2 n_y^2 + \left(\frac{\pi}{d} \right)^2 n_z^2 \right]^{1/2}$$

przechodząc do granicy $L_x, L_y \rightarrow \infty$ mamy:

$$\frac{E_{\text{cav}}}{L_x L_y} = \frac{1}{2} \hbar c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk_y}{2\pi} \left[k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{\pi}{d} n \right)^2 \right]^{1/2}$$

↑ suma ta uwzględnia już polaryzację!

W przypadku swobodnego pola EM analogicznie dostaje się:

$$\frac{E_{\text{free}}}{V} = \frac{1}{2} \frac{\hbar c}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}} dk_x \int_{\mathbb{R}} dk_y \int_{\mathbb{R}} dk_z \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}, \quad V = L_x L_y d$$

$$\frac{\Delta E}{L_x L_y} = \frac{E_{\text{cav}}}{L_x L_y} - \frac{E_{\text{free}}}{L_x L_y}$$

↑

↑

oba wyrażenia są rozbieżne,
ale istniejące szansa, że

rozbieżności te się kasują

Można pokazać to korzystając
z twierdzenia Eulewa-McLaurina (praca
domowa - seria 4) lub regularizacji
funkcji ζ Riemanna.

Procedura regularyzacji funkcji ζ Riemanna

Regularyzacja $\equiv$ procedura usuwania
osobliwości z obserwabli
(głównie w QFT) w
wyniku złego postawienia
problemu.

Energia pola magnetycznego pomiędzy

plytkami: $\langle E \rangle = \frac{\hbar}{2} \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy \frac{L_x L_y}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega_n$

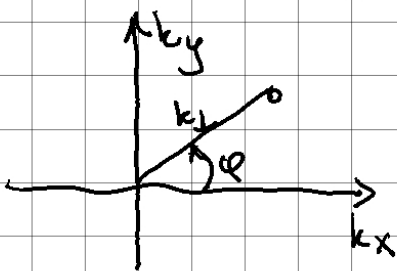
suma po dwóch możliwych polaryzacjach została uwzględniona poprzez rozciągnięcie sumy od $]-\infty, +\infty[$, przy czym $n=0$ wchodzi do sumy tylko raz, więc jest tak jak być powinna!

Jedną z metod regulacji byłoby wprowadzenie obciążenia ze względu na ω , jednak inny postępujemy inaczej: po prostu nasze rozbieżne wyrażenie podcałkowe przez ω^{2s} , gdzie potencjalnie s może być zespolone, wtedy:

$$\langle E(s) \rangle = \frac{\hbar}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \frac{L_x L_y}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega \cdot \omega^{-2s}$$

$\uparrow$
 $E_{\text{car}} - E_{\text{free}}$

Wprowadzamy zmienne $k_{\perp} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ i $\varphi \in [0, 2\pi]$



$$\langle E(s) \rangle = \frac{L_x L_y}{(2\pi)^2} \frac{\hbar}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dk_{\perp} k_{\perp} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(k_{\perp}^2 + \left(\frac{\pi}{a} n \right)^2 \right)^{\frac{1-2s}{2}} =$$

$$= \frac{L_x L_y}{2\pi} \frac{\hbar}{2} c^{1-2s} \int_0^\infty dk_\perp k_\perp \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(k_\perp^2 + \left(\frac{\pi}{d} n \right)^2 \right)^{\frac{1-2s}{2}}$$

wprowadzamy zmienne:

$$y = \frac{k_\perp d}{n\pi} \Rightarrow k_\perp = y \frac{n\pi}{d}, \text{ wtedy}$$

$$\langle E(s) \rangle = \frac{L_x L_y}{2\pi} \frac{\hbar}{2} c^{1-2s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty \frac{n\pi}{d} dy \frac{n\pi}{d} y \cdot$$

$$\cdot \left(\left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 y^2 + \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}-s} =$$

$$\stackrel{A=L_x L_y}{=} \frac{A}{2\pi} \hbar c^{1-2s} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^\infty dy y (y^2 + 1) \left(\frac{n\pi}{d} \right)^{3-2s} + E_{n=0}$$

Dla $n=0$ $\frac{L^2}{2\pi} \frac{\hbar}{2} c^{1-2s} \int_0^\infty dk_\perp k_\perp k_\perp^{\frac{1}{2}-s} = E_{n=0}$ jest rozbieżny dla każdego s , ale jest nieistotny, bo $\frac{\partial}{\partial d} E_{n=0} = 0$.

Powyższe wyrażenie jest rozbieżne

dla $s \rightarrow 0$, ale jest zbieżne dla

$\text{Re } s \geq \frac{3}{2}$. Możemy więc wykonać

sumę w domenie jej zbieżności,

a następnie uzyskany wynik

analitycznie przedłużyć dla $s=0$:

Cot h i można w prosty sposób obliczyć:

$$\int_0^{\infty} y (y^2 + 1)^{\frac{1}{2}-s} dy = \left\{ \begin{array}{l} u = y^2 \\ du = 2y dy \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (u+1)^{\frac{1}{2}-s} du = \left\{ \begin{array}{l} w = u+1 \\ dw = du \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} w^{\frac{1}{2}-s} dw =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{3}{2}-s} \right) w^{\frac{3}{2}-s} \Big|_1^{\infty} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{3}{2}-s} \right) \Big|_{s=0} = -\frac{1}{3}$$

$$\langle E(d, s) \rangle = - \frac{A \hbar c^{1-2s}}{4\pi \left(\frac{3}{2}-s\right)} \left(\frac{\pi}{d}\right)^{3-2s} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2s-3}} + E_{n=0} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{funkcja } \zeta \text{ Riemanna} \\ \zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \quad \operatorname{Re}(z) > 1 \end{array} \right\} =$$

$$= E_{n=0} - \frac{A \hbar c^{1-2s}}{4\pi \left(\frac{3}{2}-s\right)} \left(\frac{\pi}{d}\right)^{3-2s} \zeta(2s-3) \Big|_{s=0} =$$

$$= E_{n=0} - \frac{A \pi^2 \hbar c}{6 d^3} \zeta(-3) = - \frac{A \pi^2 \hbar c}{720} \frac{1}{d^3} + E_{n=0}$$

predkierunek
analityczny

$$\zeta(-3) = \frac{1}{120}$$

użył

$$\frac{\langle E(d) \rangle}{V} = - \frac{\hbar c \pi^2}{720} \frac{1}{d^4} + \frac{E_{n=0}}{V}$$

minus z tego wynika, że ten składnik jest nie istotny

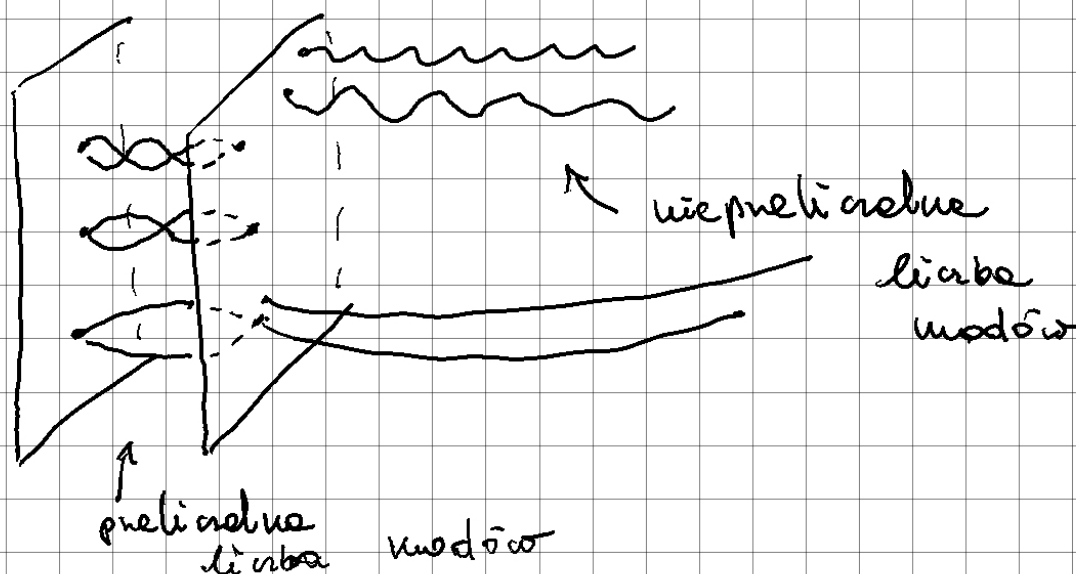
wynik ten odpowiada wartości
 uzyskanej przez odjęcie wkładów
 $E_{\text{cav}} - E_{\text{free}}$ i zastosowanie twierdzenia
 Eulera-McLaurina, czyli metoda
 ta jest pewnym efektywnym sposobem
 na odjęcie od siebie dwóch
 rozbieżnych wyrażen.

Policzmy teraz ciśnienie działające
 na płytce:

$$p = - \frac{1}{L_x L_y} \frac{\partial \langle E(d) \rangle}{\partial d} = - \frac{\hbar c}{240} \frac{\pi^2}{d^4}$$

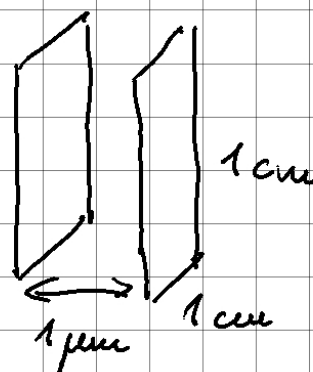
pływanie!

Intuicyjna interpretacja:



Experymentalnie udało się
potwierdzić ten wynik:

$$\begin{aligned} F &= -0,013 \text{ dyng} = \\ &= -0,013 \cdot 10^{-5} \text{ N} = \\ &= -1,3 \cdot 10^{-7} \text{ N} \end{aligned}$$



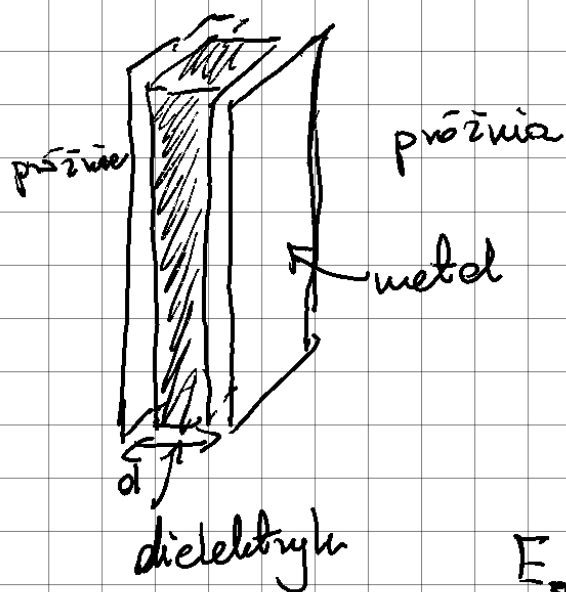
Krytyczne siły Casimira

W pobliżu punktu krytycznego dla
cieczy / gazów występuje tzw.

krytyczny efekt Casimira ze który
odpowiadają fluktuacje gęstości
osnowka, a nie pola elektromag.

Podejrzewa się, że efekt ten może
być istotny dla błon biologicznych
w których może prowadzić do
przyciągania i odpychania białek
znajdujących się w tych błonach.

SiTy Casimira - Lifszyc



Powstające na powierzchni plazmowy powodujące odpychanie się płyt.

$$E_0(d) = \frac{1}{2} \left(\frac{L_x L_y}{(2\pi)^2} \right) \int d^2 k \left[\left(\omega_+(k) - \frac{\omega_p}{\sqrt{\epsilon}} \right) + \left(\omega_-(k) - \frac{\omega_p}{\sqrt{\epsilon}} \right) \right]$$

$$\omega_{\pm}(k) = \frac{\omega_p}{\sqrt{\epsilon}} \sqrt{1 \mp e^{-kd}}$$

stała $\rightarrow \epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ $\leftarrow$ wartość plazmowa dielektryczna

wtedy $p(d) = - \frac{1}{L_x L_y} \frac{\partial}{\partial d} E_0(d) = 0.078 \frac{\hbar \omega_p}{d^3}$