Koło olimpijskie – klasy II 19.12.2020

#8. Wprowadzenie do rachunku całkowego

Funkcja pierwotna

Funkcja pierwotna funkcji $f(x)$ w przedziale $a<x<b$ nazywamy każdą funkcję $F(x)$, której pochodna $F'(x)$ jest równa funkcji $f(x)$ na przedziale $a<x<b$.

Przykład:

$$f(x) = x^2 \qquad F_1(x) = \frac{x^3}{3} + 15 \rightarrow F_1'(x) = x^2 = f(x)$$

$$F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 4 \rightarrow F_2'(x) = x^2 = f(x)$$

Funkcja pierwotna jest „odwrotnością" pochodnej.

Całka nieoznaczona funkcji $f(x)$:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad \text{gdzie } F'(x) = f(x).$$

miara całki mówi po jakiej zmiennej wykonuje całkowanie

stała

$$\begin{tikzcd} \boxed{f(x)} \arrow[r, bend right, "\int(\dots)dx"'] & \boxed{F(x)+C} \arrow[l, bend right, "\frac{d}{dx}(\dots)"'] \end{tikzcd}$$

W ogólności liczenie całek jest dużo trudniejsze od liczenia pochodnej

$$F(x) = x^n \qquad F'(x) = n x^{n-1}$$

$$\frac{dF}{dx} = F'(x) = n x^{n-1} \implies dF = n x^{n-1} dx$$

$$F(x) + C = \int dF = \int n x^{n-1} dx \implies \int n x^{n-1} dx = x^n + C$$

$$\boxed{\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C} \qquad n-1 = m$$

Najważniejsze wzory:

1°) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \, , \quad a \neq -1 \, , \; x > 0$

2°) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \, , \quad x \neq 0$

3°) $\int e^x dx = e^x + C$

4°) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

5°) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

to odzyskujemy z naszej wiedzy o pochodnych

Szczególnie przydatne wzory przy liczeniu bardziej skomplikowanych całek:

1°) Całkowanie jest operacją liniową

$$\int \left(\underset{\text{stałe}}{\alpha_1} f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) \right) dx = \alpha_1 \int f_1(x) dx + \alpha_2 \int f_2(x) dx$$

stałe $(\alpha_1 \neq 0, \; \alpha_2 \neq 0)$

2°) Całkowanie przez części

$$\frac{d}{dx}\left(u(x) v(x) \right) = \underbrace{\frac{du}{dx}}_{u'} v(x) + u(x) \underbrace{\frac{dv}{dx}}_{v'} \quad \Big/ dx$$

$$d\left(u(x) v(x) \right) = u'(x) v(x) \, dx + u(x) v'(x) \, dx$$

$$\int d\left(u(x) v(x) \right) = u(x) v(x)$$

$$u(x) v(x) = \int u'(x) v(x) \, dx + \int u(x) v'(x) \, dx$$

$$\boxed{\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx}$$

3°) całkowanie przez podstawienie

$$f(g(x)) \longrightarrow \frac{d}{dx}\big(f(g(x))\big) = \frac{df}{dg}\underbrace{\frac{dg}{dx}}_{\text{pochodna f. wewnętrznej}}$$

przykład: $\sin(x^2)$

$f(g(x))$ stosuję podstawienie:

$$u = g(x)$$ ← tą funkcję musi mieć ciągłą pochodną w interesującym nas przedziale

$$\frac{du}{dx} = \frac{dg(x)}{dx} \Rightarrow du = g'(x)\,dx$$

$$\boxed{\int f(u)\,du = \int f(g(x))\,g'(x)\,dx}$$

Przykład:

1°) $\int \ln|x|\,dx = \int 1\cdot \underbrace{\ln|x|}_{(\ln|x|)' = \frac{1}{x}}\,dx =$

całkuję przez części:

$$\boxed{\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx}$$

$u' = 1 \longrightarrow \frac{du}{dx} = 1$

$v = \ln|x| \longrightarrow v' = \frac{1}{x}$

$u = \int du = \int 1\cdot dx = x + C_1$

$$= \overbrace{(x+C_1)\ln|x|}^{uv} - \int (x+C_1)\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= (x+C_1)\ln|x| - \underbrace{\int 1\cdot dx}_{x+C_2} - \underbrace{\int C_1\frac{1}{x}\,dx}_{C_1\cdot\ln|x| + C_3} = (x+C_1)\frac{1}{x} - x - C_2 - C_1\ln|x| - C_3 =$$

$$= x\ln|x| + C_1 \cancel{\ln|x|} - x - C_2 - C_1 \cancel{\ln|x|} - C_3 =$$

$$= x\ln|x| - x + C$$

2°) $$\int \sin x \underbrace{\cos x}_{(\sin x)' = \cos x} dx = \int \underbrace{\sin x}_{f(\sin x)} \underbrace{\frac{d \sin x}{dx}}_{(\sin x)'} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{całkowanie przez podstawienie} \\ \int f(g)\, g' dx = \int f(u) du \\ g = \sin x = u \end{array} \right\}$$

$$= \int u\, du = \frac{u^2}{2} + C \underset{u = \sin x}{=} \frac{\sin^2 x}{2} + C$$

3°) $$\int e^x x^2 dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{całkowanie przez części:} \\ \int u' v\, dx = uv - \int u v' dx \\ u' = e^x \to u = \int e^x dx = e^x \\ v = x^2 \to v' = 2x \end{array} \right\} =$$

$$= e^x x^2 - \int 2x e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{przez części:} \\ u' = e^x \to u = e^x \\ v = 2x \to v' = 2 \end{array} \right\}$$

$$= e^x x^2 - \left(e^x 2x - \int 2 e^x dx \right) =$$

$$e^x x^2 - e^x 2x + 2 e^x + C = e^x (x^2 - 2x + 2) + C$$

4°) $$\underbrace{\int e^x \cos\left(\tfrac{2}{3}x\right) dx}_{I} = \left\{ \begin{array}{l} \text{przez części:} \\ \int u' v\, dx = uv - \int u v' dx \\ u' = e^x \to u = e^x \\ v = \cos\left(\tfrac{2}{3}x\right) \to v' = -\sin\left(\tfrac{2}{3}x\right) \tfrac{2}{3} \end{array} \right\} =$$

$$= e^x \cos\left(\tfrac{2}{3}x\right) + \int e^x \sin\left(\tfrac{2}{3}x\right) \tfrac{2}{3} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{przez części:} \\ u' = e^x \longrightarrow u = e^x \\ v = \frac{2}{3}\sin\left(\frac{2}{3}x\right) \longrightarrow v' = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{2}{3}x\right)\cdot\frac{2}{3} \end{array} \right\}$$

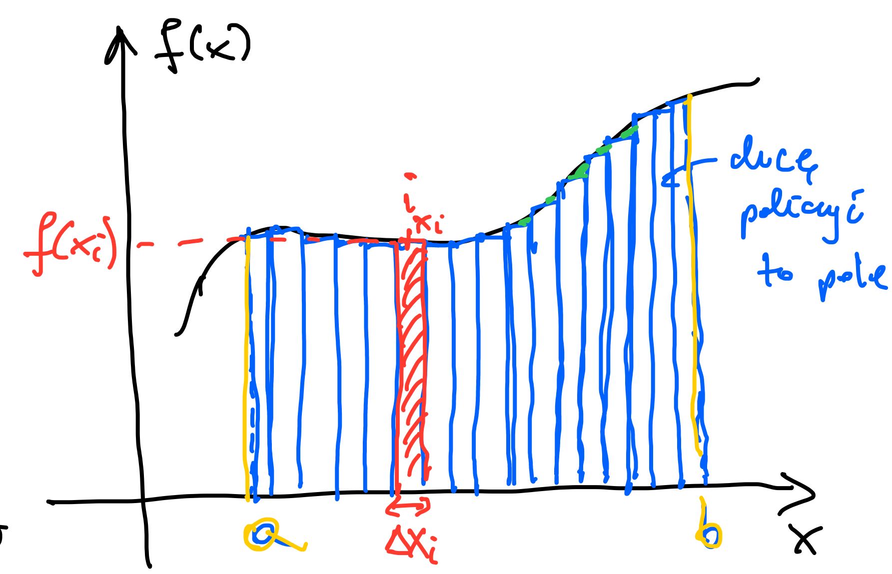
$$= e^x \cos\left(\frac{2}{3}x\right) + \left(e^x \cdot \frac{2}{3}\sin\left(\frac{2}{3}x\right) - \frac{4}{9}\underbrace{\int e^x \cos\left(\frac{2}{3}x\right)dx}_{I} \right)$$

$$I = e^x \cos\left(\frac{2}{3}x\right) + \frac{2}{3}e^x \sin\left(\frac{2}{3}x\right) - \frac{4}{9}I$$

$$\frac{13}{9}I = e^x \cos\left(\frac{2}{3}x\right) + \frac{2}{3}e^x \sin\left(\frac{2}{3}x\right)$$

$$I = \int e^x \cos\left(\frac{2}{3}x\right)dx = \frac{9}{13}e^x \cos\left(\frac{2}{3}x\right) + \frac{6}{13}e^x \sin\left(\frac{2}{3}x\right) + C$$

Całka oznaczona



Pole powierzchni i-tego słupka wynosi:

$$P_i = f(x_i)\cdot\Delta x_i$$

Dzielę przedział $\langle a, b\rangle$ na n jednakowych kawałków

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$$

Pole figury pod wykresem wynosi:

$$P \simeq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x_i$$

Dokładna wartość P wynosi

górna granica całki

$$P=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

dolna granica całki

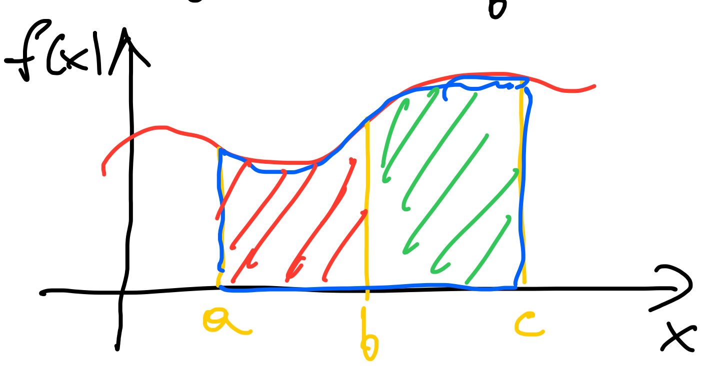
$$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \left(F(x)+C\right)\Big|_{x=b} - \left(F(x)+C\right)\Big|_{x=a} = F(b)-F(a)}$$

Daje to związek pomiędzy całką oznaczoną i nieoznaczoną.

Własności całek oznaczonych:

1°) $a \leq b \leq c$, wtedy $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$



2°) całka oznaczona jest operacją liniową:

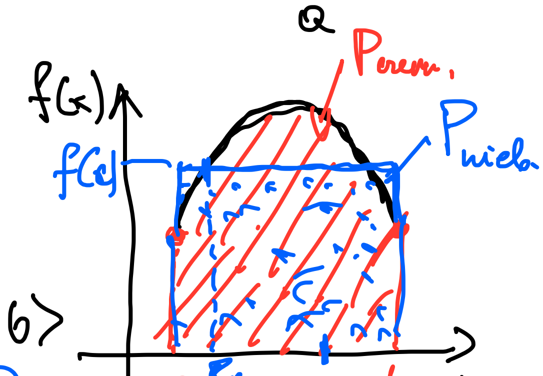
$$\int_a^b \left(\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)\right)dx = \alpha_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + \alpha_2 \int_a^b f_2(x)\,dx$$

stałe

3°) Własność Darboux

Gdy $f(x)$ – f. ciągła na przedziale $\langle a,b\rangle$, wtedy

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a), \quad \text{gdzie } c\in\langle a,b\rangle$$



$P_{prost.} = P_{nieb.}$

4°) Całkowanie przez części

$$\int_a^b u v' \, dx = \underbrace{uv\Big|_a^b}_{} - \int_a^b u' v \, dx$$

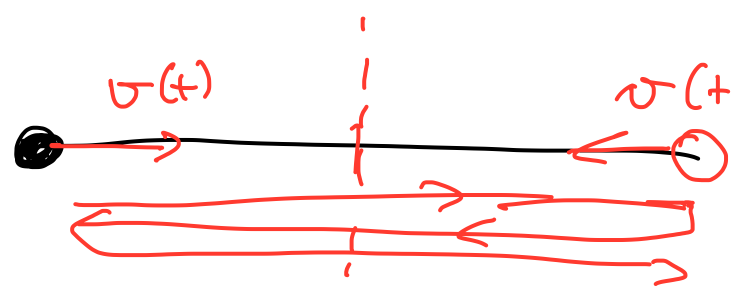
$$u(x)v(x)\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

5°) Całkowanie przez podstawienie

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx \underset{u=g(x)}{=} \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

Całki oznaczone często pojawiają się w fizyce:

1°)

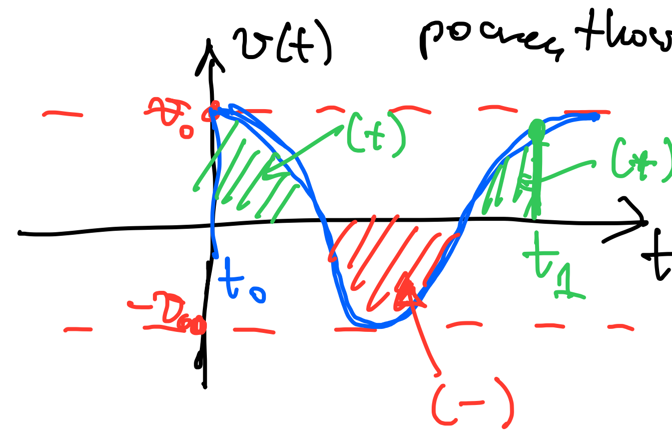


$v(t) = v_0 \cos(2\pi f t)$

f – ilość wahnięć na sek.

Jakie będzie przemieszczenie ciała po czasie t_1?

$t_0 = 0$ – chwila początkowa



$$x(t) = \int_0^{t_1} v(t)\, dt =$$

$$= v_0 \int_0^{t_1} \cos(2\pi f t)\, dt =$$

$$= \left\{ \text{przez podstawienie: } u = 2\pi f t, \ \frac{du}{dt} = 2\pi f \Rightarrow dt = \frac{du}{2\pi f} \right\} =$$

$$= \frac{v_0}{2\pi f} \int_0^{2\pi f t_1} \cos(u)\, du = \frac{v_0}{2\pi f} \sin(u)\Big|_0^{2\pi f t_1} =$$

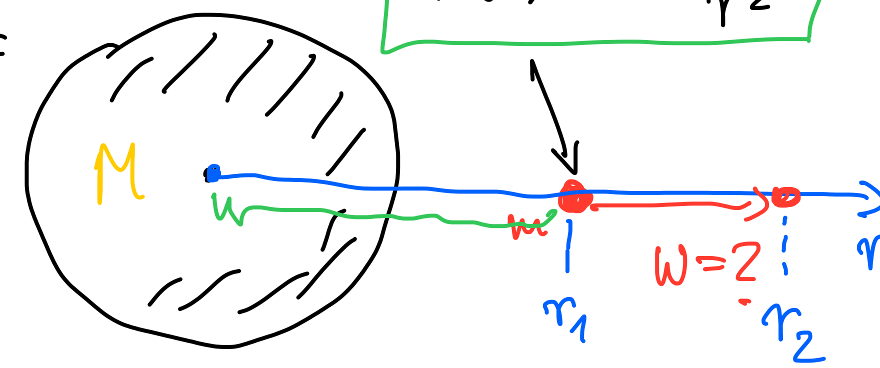
$$= \frac{v_0}{2\pi f} \sin(2\pi f t_1) - 0 = \frac{v_0}{2\pi f} \sin(2\pi f t_1)$$

2°) Wykonywana praca

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \frac{GMm}{r^2} = GMm \int_{r_1}^{r_2} r^{-2} dr =$$

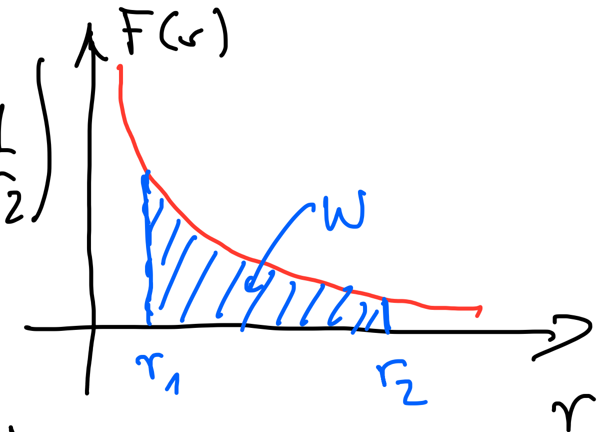
W: $-\frac{1}{r}\Big|_{r_1}^{r_2}$

$$F(r) = \frac{GMm}{r^2}$$



$$= -GMm \frac{1}{r}\Big|_{r_1}^{r_2} =$$

$$= GMm\left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right) = GMm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$



$W > 0$, bo $r_2 > r_1$

$$\underset{\substack{\| \\ E_{końc.} - E_{pocz.}}}{\Delta E} = W = GMm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \rightsquigarrow E_{pot.} = -\frac{GMm}{r}$$

układ związany

Separowalne równania różniczkowe:

$f(x)$ $$\frac{df}{dx} = 2f(x) \Rightarrow \frac{df}{dx} - 2f(x) = 0$$

$x(t)$ $$F\left(\frac{dx}{dt}, x(t)\right) = 0 \leftarrow$$ wyrażenie o tej postaci to równanie różniczkowe

W ruchu jednostajnie przyspieszonym:

$a = a_0 = const$ $$\frac{dv}{dt} = a_0$$

$$dv = a_0 dt \Rightarrow \int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = \int_{t_0=0}^{t} a_0 dt$$

Separacja zmiennych

$$v(t) - v(t_0) = a_0(t - t_0) \Rightarrow v(t) = v(t_0) + a_0(t - t_0)$$

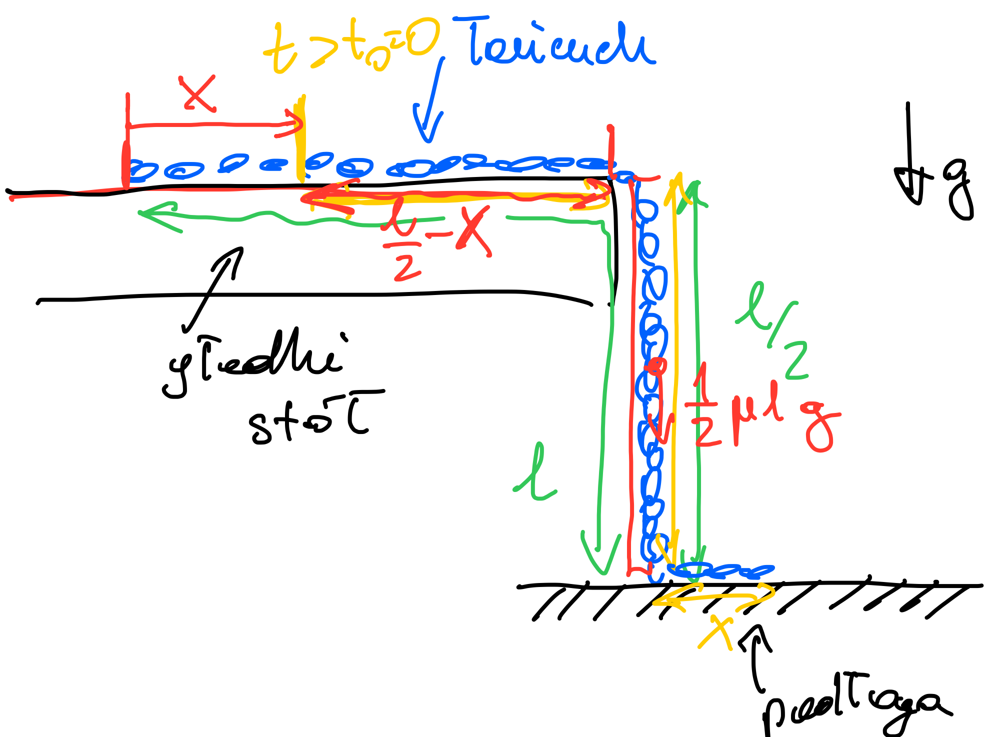
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 + a_0 t \implies dx = (v_0 + a_0 t)\,dt$$

$t_0 = 0$

$$\int_{x(0)}^{x(t)} dx = \int_0^t (v_0 + a_0 t)\,dt$$

$$x(t) - x_0 = v_0 \int_0^t dt + a_0 \int_0^t t\,dt = v_0 t + \frac{a_0 t^2}{2}$$

$$\implies x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a_0 t^2}{2}$$



Znaleźć jaka będzie prędkość łańcuszka, gdy jego koniec dotrze do krawędzi stołu?

Masa ruchomej części łańcuszka wynosi:

$$M = \mu(l - x)$$

μ – masa jednostki długości łańcuszka

W ruchu znajduje się $l - x$ łańcucha.

II zasada dynamiki Newtona:

$$F_{wyp} = ma \implies \frac{1}{2}\mu l g = (l - x)\mu a$$

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v}=v\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{\mu} l g=\cancel{\mu}(l-\cancel{x})\,v\,\frac{dv}{d\cancel{x}}$$

$$\frac{1}{2}g\frac{l\,dx}{l-x}=v\,dv$$ ← seperacje zmiennych

$$\int_0^{v(x=0)} v\,dv=\int_0^{l/2}\frac{1}{2}gl\frac{dx}{l-x}$$

$$\left.\frac{v^2}{2}\right|_0^{v(x=0)}=\frac{1}{2}gl\int_0^{l/2}\frac{dx}{l-x}=\left\{\begin{array}{l}\text{podstawienie}\\ u=l-x\\ \frac{du}{dx}=-1\Rightarrow du=-dx\end{array}\right\}$$

$$=+\frac{1}{2}gl\int_l^{l/2}\frac{du}{u}=\frac{1}{2}gl\ln\left(\frac{l}{l/2}\right)=\frac{1}{2}gl\ln 2$$

$$v^2=gl\ln 2\Longrightarrow \underline{\underline{v_{konc.}=\sqrt{gl\ln 2}}}$$