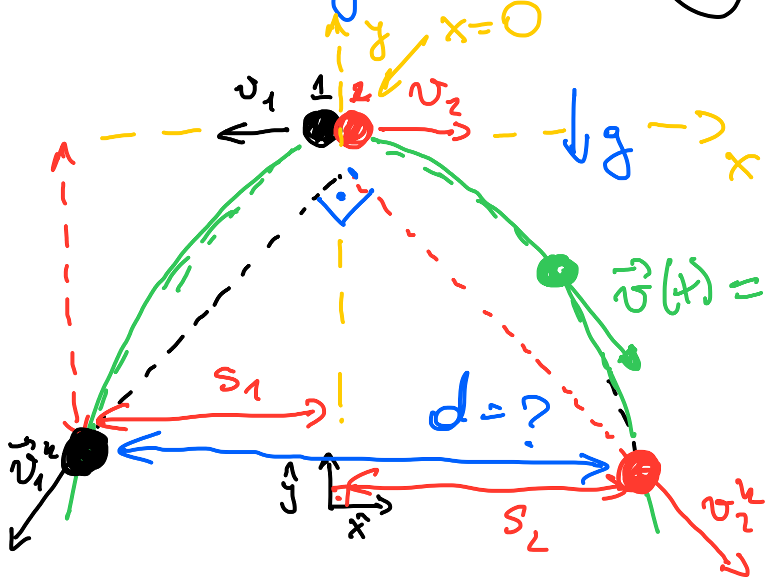
#7. Kinematyka



① Należy wyznaczyć d, gdy $\vec v_1 \perp \vec v_2$?

Równania kinematyki:

$$v_i(t) = v_{i0} + a_i t$$

$$\vec v_1(t) = -v_1\,\hat x - gt\,\hat y$$

$$\vec v_2(t) = v_2\,\hat x - gt\,\hat y$$

$|\hat y| = |\hat x| = 1$ $\qquad \hat x\cdot\hat y = 0$

$\hat x\cdot\hat x = \hat y\cdot\hat y = 1$

Wiemy, że wektory są prostopadłe, gdy ich iloczyn skalarny jest równy zero.

$$\vec v_1\cdot\vec v_2 = \left(-v_1\,\hat x - gt\,\hat y\right)\cdot\left(v_2\,\hat x - gt\,\hat y\right) =$$

$$= -v_1 v_2 \underbrace{\hat x\cdot\hat x}_{1} + v_1 gt \underbrace{\hat x\cdot\hat y}_{0} - gt v_2 \underbrace{\hat y\cdot\hat x}_{0} + g^2t^2 \underbrace{\hat y\cdot\hat y}_{1} =$$

$$= -v_1 v_2 + g^2 t^2 = 0$$

to jest spełnione, gdy $\vec v_1 \perp \vec v_2$

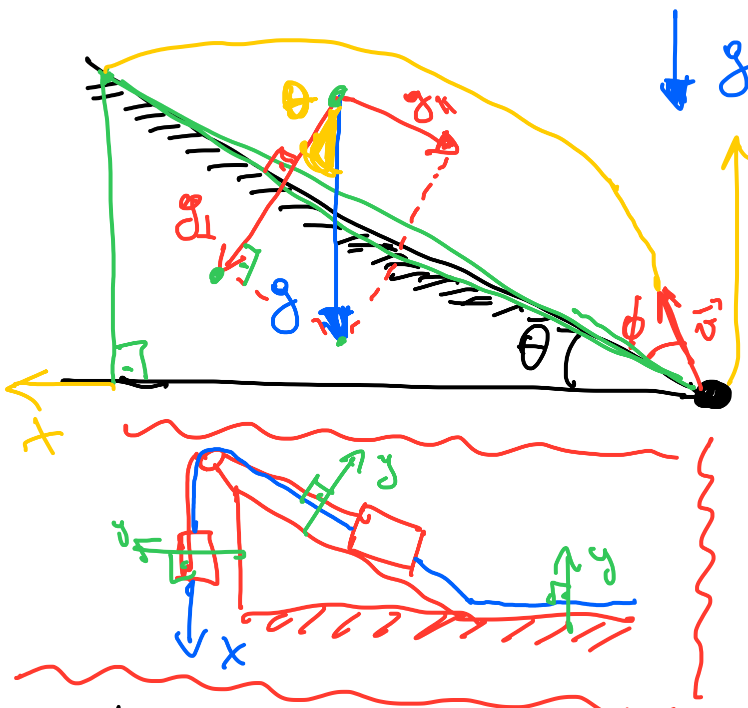
$$\Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{v_1 v_2}{g^2}} = \frac{1}{g}\sqrt{v_1 v_2}$$

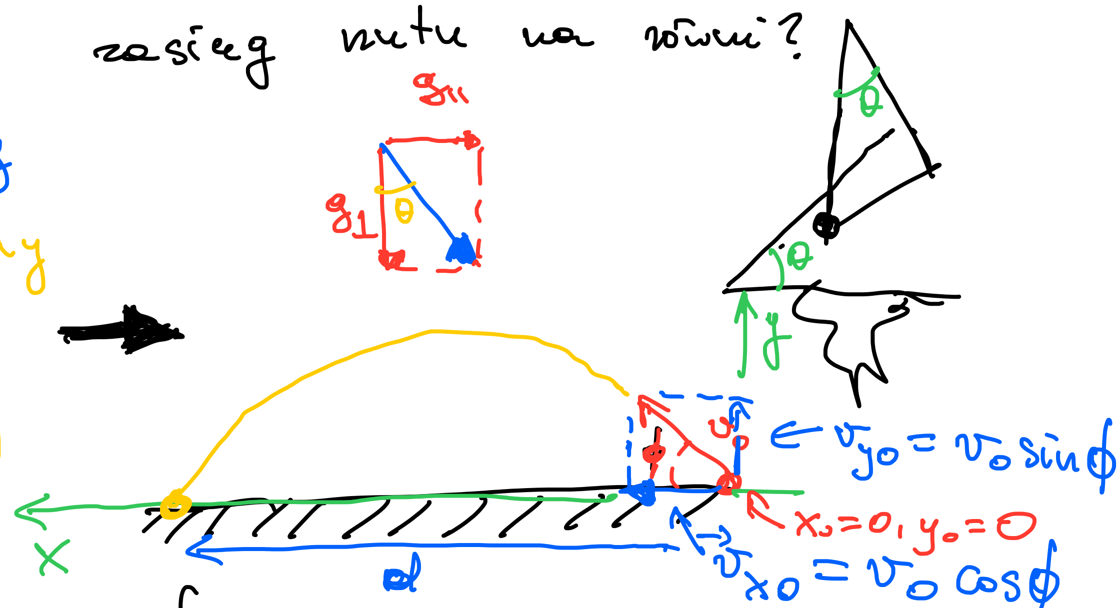
$$s_1 = v_1 t = \frac{1}{g}\sqrt{v_1 v_2}\, v_1$$

$$s_2 = v_2 t = \frac{1}{g}\sqrt{v_1 v_2}\, v_2$$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{1}{g}(v_1 + v_2)\sqrt{v_1 v_2}$$

② Znajdź maksymalny zasięg rzutu na równi?





$$\begin{cases} g_\perp = -g\cos\theta \\ g_\parallel = -g\sin\theta \end{cases}$$

Wypisujemy równania ruchu dla kierunku x i y:

$$x: \begin{cases} x(t) = v_0\cos\phi\, t - \dfrac{g\sin\theta}{2} t^2 \\ v_x(t) = v_0\cos\phi - g\sin\theta\, t \end{cases}$$

$$y: \begin{cases} y(t) = v_0\sin\phi\, t - \dfrac{g\cos\theta}{2} t^2 \\ v_y(t) = v_0\sin\phi - g\cos\theta\, t \end{cases}$$

$$y(t_{max}) = 0 = \underbrace{\left(v_0\sin\phi - \frac{g\cos\theta}{2} t\right)}\, t \implies t = 0$$

zerowanie tego daje czas po którym ciało molena ponownie w równię

$$t_{max} = \frac{2v_0\sin\phi}{g\cos\theta}$$

Wstawiamy to do wyrażenia na x(t):

$$d = v_0\cos\phi\, t_{max} - \frac{g\sin\theta}{2} t_{max}^2 =$$

$$= v_0\cos\phi \, \frac{2v_0\sin\phi}{g\cos\theta} - \frac{\cancel{g}}{\cancel{2}}\sin\theta \, \frac{\cancel{4}^{\,2}\, v_0^2\sin^2\phi}{g^{\cancel{2}}\cos^2\theta} =$$

$$= \frac{2v_0^2}{g\cos\theta}\left[\cos\phi\sin\phi - \sin^2\phi \,\mathrm{tg}\,\theta\right]$$

policzyć pochodną wyrażenia wzgl. ϕ i przyrównać do zera

Stosujemy tożsamości trygonometryczne:

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B \quad (*)$$

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B) \quad (**)$$

$$d = \frac{2v_0^2}{g\cos\theta}\sin\phi\left[\cos\phi - \underbrace{\sin\phi\,\mathrm{tg}\,\theta}_{\frac{\sin\phi\sin\theta}{\cos\theta}}\right] =$$

$$= \frac{2v_0^2}{g\cos^2\theta}\left[\cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta\right]\sin\phi \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{2v_0^2}{g\cos^2\theta}\cos(\phi+\theta)\sin\phi \overset{(**)}{=} \frac{v_0^2}{g\cos^2\theta}\left[\sin(2\phi+\theta) - \sin\theta\right],$$

całość będzie maksymalna, gdy ten sinus będzie maksymalny

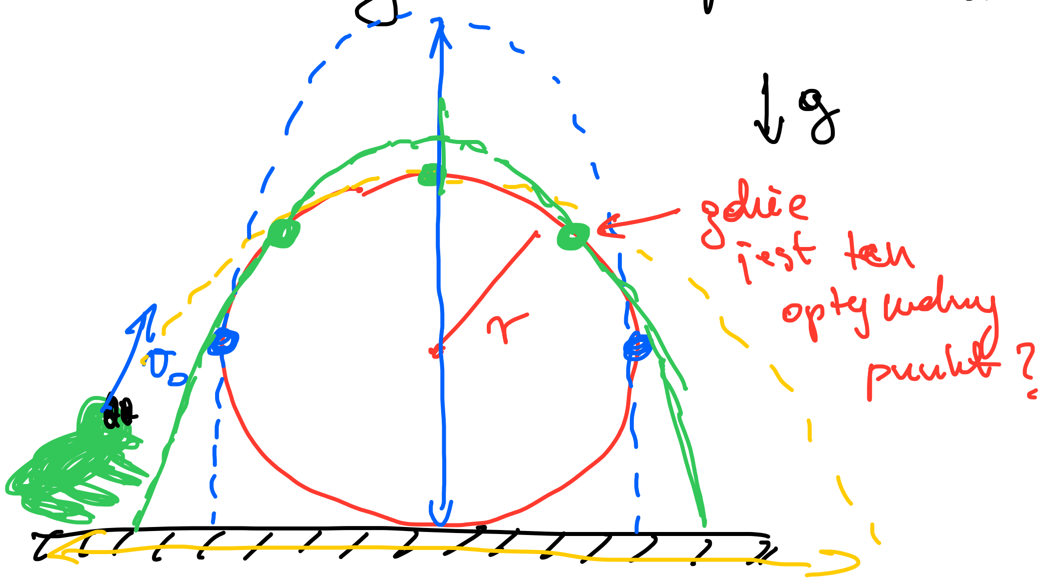
czyli $2\phi + \theta = \frac{\pi}{2}$, bo wtedy $\sin(2\phi+\theta) = 1$

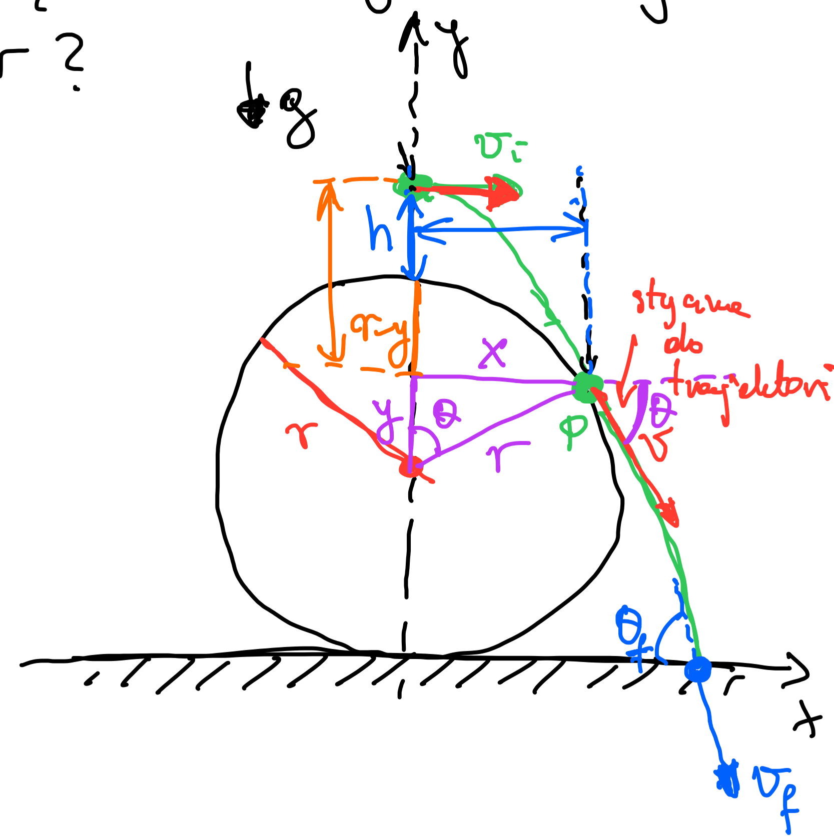
$$\Rightarrow \phi_{max} = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$$

$$d_{max} = d(\phi_{max}) = \frac{v_0^2}{g\cos^2\theta}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) - \sin\theta\right] \overset{\text{wzory redukcyjne}}{=}$$

$$= \frac{v_0^2}{g\cos^2\theta}\left[1 - \sin\theta\right]$$

③ Jaka jest minimalna prędkość żaby, aby przeskoczyła ona nad rurą o kolistym przekroju poprzecznym o promieniu r?

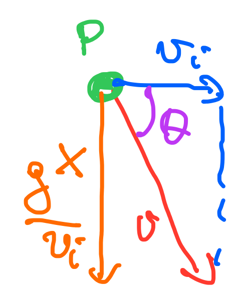




$$x = v_i t \Rightarrow t = \frac{x}{v_i}$$

$$r - y + h = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_i}\right)^2 \quad (*)$$

W trakcie całego ruchu $v_x = v_i$, bo nie ma przyspieszeń wzdłuż tego kierunku.

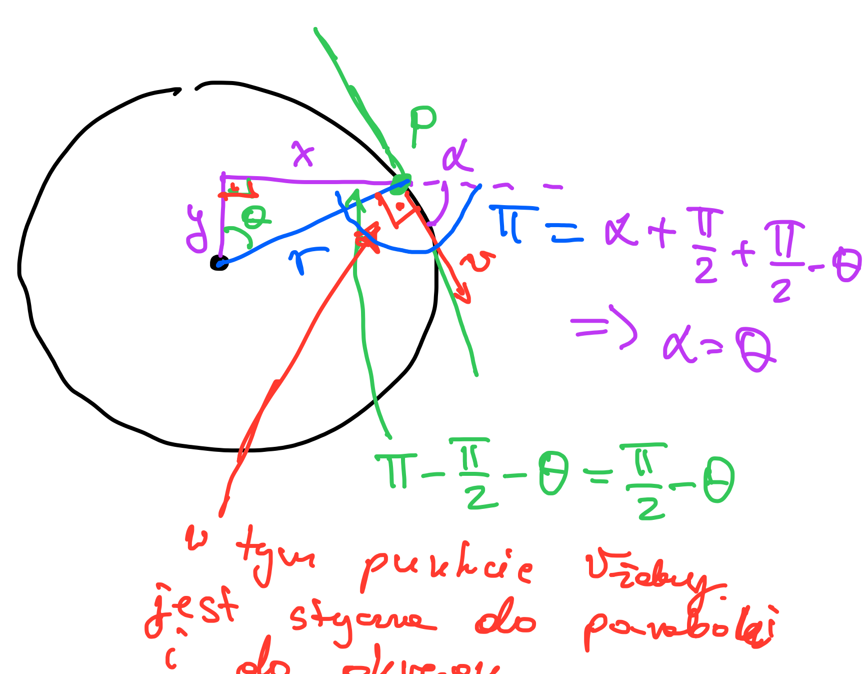


$$|v_y| = g t = \frac{g x}{v_i}$$

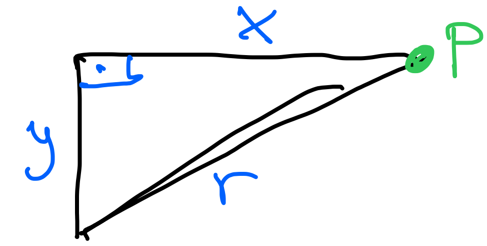
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{g x}{v_i^2}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{y} = \frac{g x}{v_i^2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{v_i^2}{g}$$



Korzystam z tw. Pitagorasa:



$$x^2+y^2=r^2 \Rightarrow x^2 = r^2-y^2 = r^2 - \frac{v_i^4}{g^2}$$

Wstawiamy do równania (*) ze strony 4:

$$r - y + h = \frac{g}{2}\,\frac{x^2}{v_i^2}$$

$$r - \frac{v_i^2}{g} + h = \frac{g}{2}\left(r^2 - \frac{v_i^4}{g^2}\right)\frac{1}{v_i^2} = \frac{g}{2}\,\frac{r^2}{v_i^2} - \frac{1}{2}\,\frac{v_i^2}{g}$$

Wprowadzamy zmienne bezwymiarowe:

$H = \frac{h}{r}$ ↑ bezwymiarowe , $V = \frac{v}{\sqrt{gr}}$ ↑ bezwymiarowa prędkość

$$1 - \frac{v_i^2}{gr} + \frac{h}{r} = \frac{gr}{2v_i^2} - \frac{1}{2}\,\frac{v_i^2}{gr}$$

$$1 - V_i^2 + H = \frac{1}{2V_i^2} - \frac{1}{2}V_i^2 \quad \Big| \cdot V_i^2$$

$$V_i^2 - V_i^4 + HV_i^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}V_i^4$$

$$\frac{1}{2}V_i^4 - (1+H)V_i^2 + \frac{1}{2} = 0$$

$$(1+H)^2 = 1 + H^2 + 2H$$

$$V_i^4 - 2(1+H)V_i^2 + 1 = 0$$

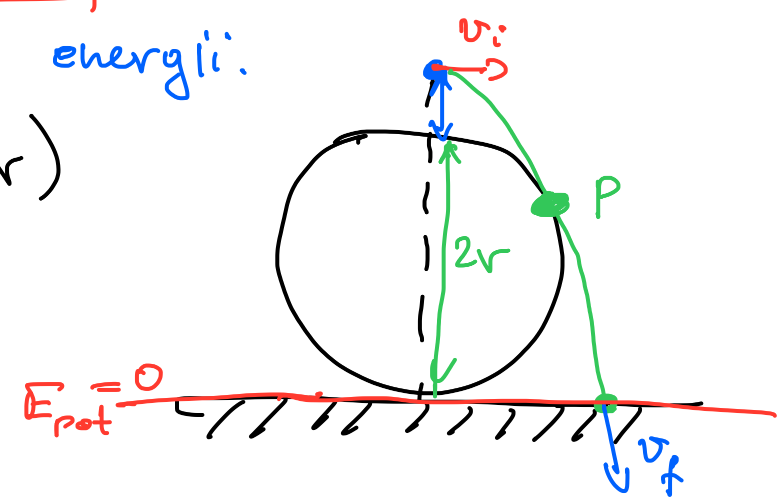
$$V_i^2 = \frac{\cancel{2}(1+H) \pm \sqrt{\cancel{4}(1+H)^2 - \cancel{4}\cdot 1}}{\cancel{2}} =$$

$$V_i^2 = 1+H \pm \sqrt{H^2+2H}$$

pierwiastek z „+" prowadzi do niefizycznego wyniku, bo wtedy $y = \frac{v_i^2}{g} > r$.

$$\boxed{V_i^2 = 1+H - \sqrt{H^2+2H}}$$

Stosujemy zasadę zachowania energii.



$$E_{pocz.} = \frac{mv_i^2}{2} + mg(h+2r)$$

$$E_{końc.} = \frac{mv_f^2}{2}$$

$$\frac{\cancel{m}v_i^2}{2} + \cancel{m}g(h+2r) = \frac{\cancel{m}v_f^2}{2}$$

$$v_f^2 = v_i^2 + 2g(h+2r) =$$

$$V = \frac{v}{\sqrt{gr}}$$

$$H = \frac{h}{r}$$

$$\frac{v_f^2}{gr} = \frac{v_i^2}{gr} + 2\frac{gr}{gr}\left(\frac{h}{r}+2\right)$$

$$V_f^2 = V_i^2 + 2(H+2)$$

$$V_f^2 = 1+H-\sqrt{H^2+2H} + 2H+4 =$$

$$= 3H+5-\sqrt{H^2+2H}$$ ← prędkość końcowa jest sparametryzowana tylko przez H

$V_f^2 = f(H)$ – musimy znaleźć minimum tej funkcji względem H

Korzystając z odwracalności ruchu w rzucie ukośnym prędkość końcowa co do wartości jest równa energii początkowej.

Szukamy minimum V_f^2 względem H: $\left(V_f^2 = f(H)\right)$

$$\frac{df}{dH} = \frac{d}{dH}\left(3H+5-\sqrt{H^2+2H}\right) = \frac{d}{dH}\left(3H+5\right) - \frac{d}{dH}\left(\left(H^2+2H\right)^{1/2}\right) =$$

$$= 3 + \underbrace{\frac{1}{2}\left(H^2+2H\right)^{\frac{1}{2}-1}}_{\text{pochodna } \sqrt{x}} \underbrace{\frac{d}{dH}\left(H^2+2H\right)}_{\text{pochodna f. wewnętrznej}} = 3 + \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}H+\cancel{2}^{\,1}}{\sqrt{H^2+2H}} = 0$$

warunek na minimum

$$\frac{3\sqrt{H^2+2H} + H+1}{\sqrt{H^2+2H}} = 0 \Rightarrow H+1 = -3\sqrt{H^2+2H}$$

Obustronnie podnosimy równanie do kwadratu:

$$(H+1)^2 = 9\left(H^2+2H\right) \Rightarrow H^2+2H+1 = 9H^2+18H$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{8H^2+16H-1=0}}$$

Rozwiązania równania:

$$H_\pm = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2+4\cdot 8}}{2\cdot 8} = \frac{-\cancel{16} \pm \cancel{16}\sqrt{1+\frac{4\cdot 8}{16^2}}}{\cancel{16}} = -1 \pm \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$\frac{1}{8}$

Tylko rozwiązanie z „+" jest sensowne, bo H nie może być ujemne!

Dostajemy zatem, że $H_{min} = \frac{3\sqrt{2}}{4} - 1$ minimalizuje V_f^2, które wynosi wtedy

$$V_f^2 = 3H_{min} - 5 - \sqrt{H_{min}^2 + 2H_{min}} = 2+2\sqrt{2} \simeq 4{,}83,$$

czyli minimalna prędkość początkowa żaby wynosi:

$$V_0 = \sqrt{gr}\cdot\sqrt{2+2\sqrt{2}} \simeq 2{,}2\sqrt{gr}$$

Dla tej wartości H_{min} dostajemy, że

$$V_i^2 = 1+H_{min} - \sqrt{H_{min}^2+2H_{min}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71,$$

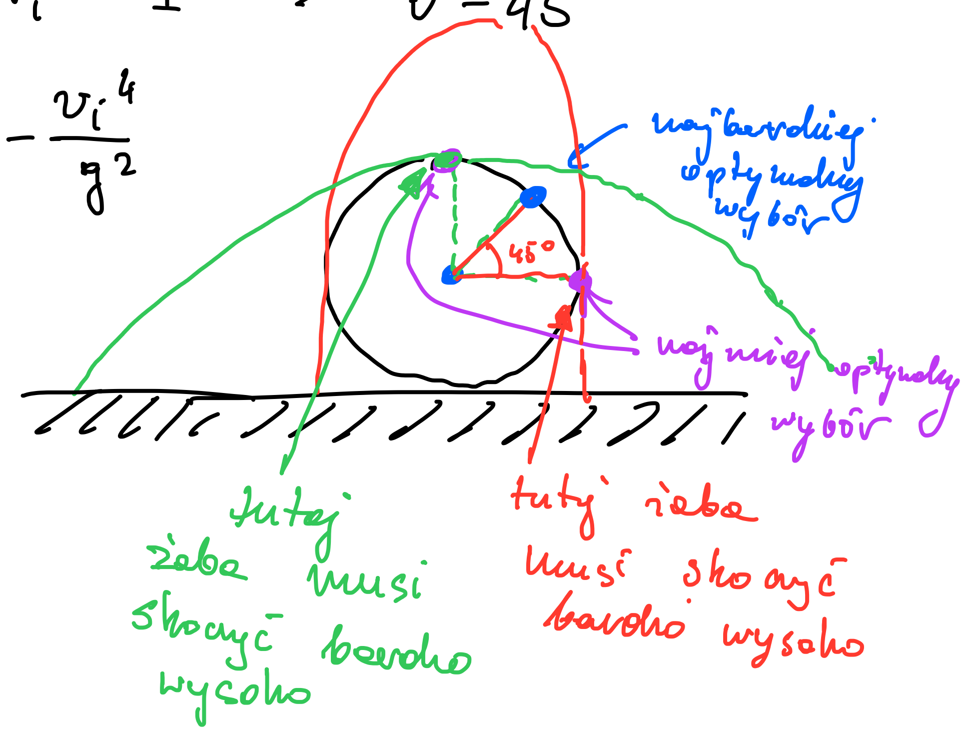
czyli $$v_i = \sqrt{gr}\,\frac{1}{\sqrt[4]{2}} = 0{,}84\cdot\sqrt{gr}$$

Możemy zatem sprawdzić dla jakiego kąta θ żaba ociera się o rurę:

wstawiając $V_i^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$tg\,\theta = \frac{gx}{v_i^2} = \frac{x}{V_i^2 r} = \sqrt{V_i^{-4}-1} \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

$$x^2 = r^2 - \frac{v_i^4}{g^2}$$



Zadanie:

Znaleźć minimalną wartość prędkości, aby przerzucić kamień nad ogrodzeniem o wysokości h odległym o x_0 od punktu z którego rzucamy tak, aby kamień upadł w punkt $R > x_0$. (Patrz rys.)