

1 (a) Obliczamy:

$$\begin{aligned} 1 &= [a_1, a_1^\dagger] = [u b_1 - v b_2^\dagger, u b_1^\dagger - v b_2] = \\ &= u^2 \underbrace{[b_1, b_1^\dagger]}_1 + v^2 \underbrace{[b_2^\dagger, b_2]}_{-1} = u^2 - v^2 \end{aligned}$$

(b) Mamy:

$$\begin{aligned} a_1^\dagger a_1 &= (u b_1^\dagger - v b_2)(u b_1 - v b_2^\dagger) = \\ &= u^2 b_1^\dagger b_1 + v^2 b_2^\dagger b_2 - uv(b_1 b_2 + \text{h.c.}) + v^2 \end{aligned}$$

Ze względu na symetrię wyrażen dla $a_2^\dagger a_2$
wynik dostajemy zmieniając $1 \leftrightarrow 2$:

$$a_2^\dagger a_2 = u^2 b_2^\dagger b_2 + v^2 b_1^\dagger b_1 - uv(b_1 b_2 + \text{h.c.}) + v^2$$

Zatem

$$\begin{aligned} \varepsilon(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2) &= \varepsilon(u^2 + v^2)(b_1^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_2) + \\ &\quad - 2\varepsilon uv(b_1 b_2 + \text{h.c.}) + 2\varepsilon v^2 \end{aligned}$$

co więc

$$\begin{aligned} a_1 a_2 &= (u b_1 - v b_2^\dagger)(u b_2 - v b_1^\dagger) = \\ &= u^2 b_1 b_2 + v^2 b_2^\dagger b_1^\dagger - uv \underbrace{(b_1 b_1^\dagger + b_2^\dagger b_2)}_{b_1^\dagger b_1 + 1} = \end{aligned}$$

$$= u^2 b_1 b_2 + v^2 b_2^+ b_1^+ - uv (b_1 b_1^2 + b_2^+ b_2) - uv$$

Zatem

$$\Delta(a_1 a_2 + h.c.) = \Delta(u^2 + v^2)(b_1 b_2 + h.c.) + \\ - 2\Delta uv (b_1^+ b_1 + b_2^+ b_2) - 2\Delta uv$$

Co po wstawieniu do $\hat{H}$ daje:

$$\hat{H} = \varepsilon(a_1^+ a_1 + a_2^+ a_2) + \Delta(a_1 a_2 + h.c.) = \\ = [\varepsilon(u^2 + v^2) - \Delta \cdot 2uv] (b_1^+ b_1 + b_2^+ b_2) + \\ + [\Delta(u^2 + v^2) - \varepsilon \cdot 2uv] (b_1 b_2 + h.c.) + \\ + (\varepsilon \cdot 2v^2 - \Delta \cdot 2uv)$$

Wyrażenie to jest diagonalne w operatorach b , gdyż znika współczynnik przy $(b_1 b_2 + h.c.)$:

$$\Delta(u^2 + v^2) = \varepsilon 2uv$$

Wstawiając $u = \cosh \eta$ i $v = \sinh \eta$, mamy:

$$\Delta \cosh 2\eta = \varepsilon \sinh 2\eta \Rightarrow \tanh 2\eta = \frac{\Delta}{\varepsilon},$$

co daje

$$\hat{H} = F(b_1^+ b_1 + b_2^+ b_2) + G, \quad \text{gdzie} \quad (*)$$

$$\begin{aligned}
F &= \varepsilon(u^2 + v^2) - \Delta \cdot 2uv = \varepsilon \cosh 2\eta - \Delta \sinh 2\eta = \\
&= \cosh 2\eta \left(\varepsilon - \Delta \tanh 2\eta \right) = \frac{\cosh 2\eta}{\varepsilon} (\varepsilon^2 - \Delta^2) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \cosh^2 x = (1 - \tanh^2 x)^{-1} \\ \cosh^2 2\eta = (1 - \tanh^2 2\eta)^{-1} = \left(1 - \left(\frac{\Delta}{\varepsilon}\right)^2\right)^{-1} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \Delta^2} \end{array} \right\} = \\
&= \sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \varepsilon \cdot 2v^2 - \Delta \cdot 2uv = \varepsilon(u^2 + v^2 - 1) - \Delta \cdot 2uv = \\
&= \varepsilon(u^2 + v^2) - \Delta \cdot 2uv - \varepsilon = F - \varepsilon = \sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2} - \varepsilon
\end{aligned}$$

(c) Ponieważ (*) wyraża hamiltonian jako liniową kombinację operatorów liczby obsadzeń dla „ b_1 ” i „ b_2 ” - bozonów, czyli stan własny hamiltonianu $\hat{H}$ można wyrazić przez podanie liczby bozonów n_{b_1} i n_{b_2} , tj. za pomocą stanu $|n_{b_1}, n_{b_2}\rangle$. Energia własna w takim stanie wynosi:

$$E(n_{b_1}, n_{b_2}) = F(n_{b_1} + n_{b_2}) + G$$

ponieważ ε i Δ są stałymi dodatnimi
 takimi, że $\varepsilon > \Delta$, czyli $F > 0$. Oznacza
 to, że najniższa energia odpowiada
 sytuacji $n_{b_1} = n_{b_2} = 0$, czyli $|\Psi_0\rangle = |0, 0\rangle$
 jest stanem podstawowym, a więc

$$b_i |\Psi_0\rangle = 0 \quad (i=1, 2),$$

czyli stan podstawowy jest stanem
 próżni dla bozonów b i odpowiada
 mu energia $E(n_{b_1}=0, n_{b_2}=0) = G = \sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2} - \varepsilon$.

(d) Mamy dwa najniższe stany
 wzbucone 2 jedynym bozonem b :

$$|n_{b_1}=1, n_{b_2}=0\rangle \quad \text{lub} \quad |n_{b_1}=0, n_{b_2}=1\rangle,$$

odpowiada im energia $E_{wzb} = F + G$.

(e) Wprowadzamy oznaczenie $\lambda = \tanh \eta$, wtedy

$$b_1 |\Psi_0\rangle = C (u a_1 + v a_2^+) \exp(-\lambda a_1^+ a_2^+) |0\rangle,$$

będziemy chcieli wykonywać, że $a_1 |0\rangle = 0$.

$$a_1 \exp(-\lambda a_1^\dagger a_2^\dagger) |0\rangle =$$

$$\underbrace{\exp(-\lambda a_1^\dagger a_2^\dagger)}_1 \cdot \underbrace{\exp(+\lambda a_1^\dagger a_2^\dagger) a_1 \cdot \exp(-\lambda a_1^\dagger a_2^\dagger)}_{\text{wzór Baker-Hausdorffa}} |0\rangle$$

$$\left\{ e^{iG\lambda} A e^{-iG\lambda} = A + i\lambda [G, A] + \frac{(i\lambda)^2}{2!} [G, [G, A]] + \dots \right\}$$

Pierwszy wyraz we wzorze Baker-Hausdorffa to po prostu a_1 . Drugi wynosi

$$[a_1, -\lambda a_1^\dagger a_2^\dagger] = -\lambda a_2^\dagger [a_1, a_1^\dagger] = -\lambda a_2^\dagger$$

Ponieważ to wyrażenie komutuje

z $-\lambda a_1^\dagger a_2^\dagger$ wyższe człony rozwinięcia znikają, czyli

$$\exp(\lambda a_1^\dagger a_2^\dagger) a_1 (-\lambda a_1^\dagger a_2^\dagger) = a_1 - \lambda a_2^\dagger, \text{ więc}$$

$$a_1 \exp(-\lambda a_1^\dagger a_2^\dagger) |0\rangle = \exp(-\lambda a_1^\dagger a_2^\dagger) (a_1 - \lambda a_2^\dagger) |0\rangle$$

wykorzystując fakt, że

$$a_2^\dagger \exp(-\lambda a_1^\dagger a_2^\dagger) |0\rangle = \exp(-\lambda a_1^\dagger a_2^\dagger) a_2^\dagger |0\rangle,$$

mamy, że

$$\begin{aligned}
& (u a_1 + v a_2^+) \exp(-\lambda a_1^+ a_2^+) |0\rangle = \\
& = \exp(-\lambda a_1^+ a_2^+) [u(a_1 - \lambda a_2^+) + v a_2^+] |0\rangle = \\
& = \exp(-\lambda a_1^+ a_2^+) [-u\lambda + v] a_2^+ |0\rangle = 0, \\
& \text{bo } -u\lambda + v = -\cosh y \tanh y + \sinh y = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \textcircled{2} \text{ (a) } G^>(v; t, t') = -i \langle c_v(t) c_v^+(t') \rangle = \\
& = -i \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n | c_v(t) c_v^+(t') | n \rangle = \left\{ \mathbb{1} = \sum_m |m\rangle \langle m| \right\} \\
& = -\frac{i}{Z} \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} \langle n | e^{iHt} c_v e^{-iHt} | m \rangle \langle m | e^{iHt'} c_v^+ e^{-iHt'} | n \rangle = \\
& = -\frac{i}{Z} \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} e^{i(E_n - E_m)(t-t')} \underbrace{\langle n | c_v | m \rangle \langle m | c_v^+ | n \rangle}_{\langle m | c_v^+ | n \rangle^*} = \\
& = -\frac{i}{Z} \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} e^{i(E_n - E_m)(t-t')} |\langle n | c_v^+ | m \rangle|^2
\end{aligned}$$

Analogicznie rachunki przekięgaję dla $G^<(v; t, t')$
z tym, że $(n \leftrightarrow m)$, czyli

$$\begin{aligned}
G^<(v; t, t') &= i \langle c_v^+(t') c_v(t) \rangle = \\
&= \frac{i}{Z} \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} e^{i(E_m - E_n)(t-t')} |\langle n | c_v^+ | m \rangle|^2 = \\
&= \frac{i}{Z} \sum_{n,m} e^{-\beta E_m} e^{i(E_n - E_m)(t-t')} |\langle m | c_v^+ | n \rangle|^2
\end{aligned}$$

$$(b) \quad G^R(\nu; t-t') = \theta(t-t') [G^>(\nu; t, t') - G^<(\nu; t, t')] =$$

$$= -i\theta(t-t') \frac{1}{2} \sum_{n,m} (e^{-\beta E_n} + e^{-\beta E_m}) e^{i(E_n - E_m)(t-t')} |\langle m | c_\nu^\dagger | n \rangle|^2$$

Wykonujemy transformację Fouriera:

$$G^R(\nu, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} G^R(\nu, t) =$$

$$= -\frac{i}{2} \sum_{n,m} (e^{-\beta E_n} + e^{-\beta E_m}) |\langle m | c_\nu^\dagger | n \rangle|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt \theta(t) e^{i(\omega + E_n - E_m)t} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{i}{2\pi} \frac{e^{-ixt}}{x + i0^+} e^{i(\omega + E_n - E_m)t} =$$

$$= i \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\delta(\omega + E_n - E_m - x)}{x + i0^+} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n,m} \frac{|\langle m | c_\nu^\dagger | n \rangle|^2}{\omega + E_n - E_m + i0^+} (e^{-\beta E_n} + e^{-\beta E_m})$$

$$(c) \quad \text{Ponieważ } \text{Im} \frac{1}{x + i\eta} = -\frac{\eta}{x^2 + \eta^2} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0^+} -\pi \delta(x),$$

wiec

$$A(\nu, \omega) = \frac{1}{2} \sum_{n,m} |\langle m | c_\nu^\dagger | n \rangle|^2 (e^{-\beta E_n} + e^{-\beta E_m}) \delta(\omega + E_n - E_m)$$

wyrażenie to jest zawsze nieujemne,

$$\text{czyli } A(\nu, \omega) \geq 0.$$

$$\textcircled{3} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega A(\nu, \omega) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n,m} |\langle m | c_\nu^\dagger | n \rangle|^2 (e^{-\beta E_n} + e^{-\beta E_m}) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \delta(\omega + E_n - E_m)}_1 =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n,m} \langle m | c_\nu^\dagger | n \rangle \langle n | c_\nu | m \rangle (e^{-\beta E_n} + e^{-\beta E_m}) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n,m} \left[e^{-\beta E_n} \langle n | c_\nu | m \rangle \langle m | c_\nu^\dagger | n \rangle + e^{-\beta E_m} \langle m | c_\nu^\dagger | n \rangle \langle n | c_\nu | m \rangle \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_n e^{-\beta E_n} \langle n | c_\nu c_\nu^\dagger | n \rangle + \sum_m e^{-\beta E_m} \langle m | c_\nu^\dagger c_\nu | m \rangle \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_n e^{-\beta E_n} \underbrace{\langle n | (c_\nu c_\nu^\dagger + c_\nu^\dagger c_\nu) | n \rangle}_{\{c_\nu, c_\nu^\dagger\} = 1} = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_n e^{-\beta E_n}}_Z = 1$$

Reguła sum razem z warunkiem

$A(\nu, \omega) \geq 0$ pozwala nam interpretować funkcję spektralną jako gęstość prawdopodobieństwa, przy czym

$A(\nu, \omega) d\omega$ jest prawdopodobieństwem tego, że fermion w stanie $| \nu \rangle$ jest w przedziale $[\omega, \omega + d\omega]$.

4) Typowa postać funkcji spektralnej dla cieczy Fermiego jest postaci:

$$A_{FL}(\vec{k}, \sigma; \omega) = \frac{Z_k}{\pi} \frac{(1/2\tau_k)}{(\omega - \epsilon_k^*)^2 + (1/2\tau_k)^2} + A_{incoh}(\vec{k}, \sigma; \omega)$$

(a) Porównując ją z wyrażeniem

$$A(\vec{k}, \sigma) = Z \delta(\omega - \epsilon_k) + (1-Z) \frac{\Theta(\omega - |\omega|)}{2W}$$

mamy:

- $Z_k \rightarrow Z$, - uproszczenie zaniedbanie zależności od $\vec{k}$

- $\frac{1}{\pi} \frac{1/2\tau_k}{(\omega - \epsilon_k^*)^2 + (1/2\tau_k)^2} \rightarrow \delta(\omega - \epsilon_k)$ - przyjęto,

że kwazicząstki mają nieskończone czas

życia $\tau_k \rightarrow \infty$ oraz renormalizacja

relacji dyspersji kwazicząstek została zaniedbana.

- $A_{incoh} \rightarrow (1-Z) \frac{\Theta(\omega - |\omega|)}{2W}$ - założono, że continuum ma postać rozkładu jednorodnego o szerokości $2W$.

$$\begin{aligned}
 (b) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega A(\vec{k}\sigma, \omega) &= Z \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \delta(\omega - \xi_k)}_{1} + \\
 &+ \frac{1-Z}{2W} \underbrace{\int_{-W}^{+W} d\omega \Theta(W - |\omega|)}_{\int_{-W}^{+W} d\omega = 2W} = Z + 1 - Z = 1
 \end{aligned}$$

$$(c) \quad n_{k\sigma} = \langle c_{k\sigma}^{\dagger} c_{k\sigma} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega A(\vec{k}\sigma, \omega) \underbrace{f(\omega)}_{\text{rozkład Fermiego-Diraca}} =$$

$$\stackrel{T=0}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left[Z \delta(\omega - \xi_k) + \frac{1-Z}{2W} \Theta(W - |\omega|) \right] \Theta(-\omega) =$$

$$= Z \Theta(-\xi_k) + \frac{1}{2}(1-Z), \quad \text{tzn.}$$

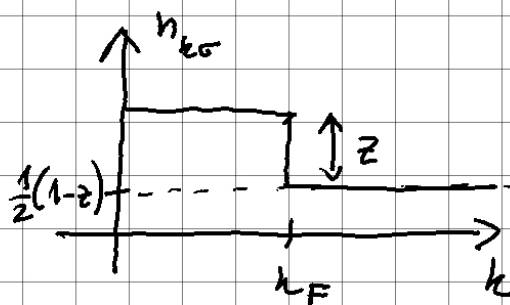
$n_{k\sigma}$ ma skok o Z dla $\xi_k = 0$,
 czyli dla $k = k_F$.

W przypadku $Z = 1$,

czyli nieoddzielających

części odtworzonego rozkładu

Fermiego-Diraca w zerowej temperaturze.



$$\textcircled{5} \quad \hat{H} = -t \sum_{j=1}^N (c_{j+1}^\dagger c_j + \text{h.c.}) = \sum_n \varepsilon_n c_n^\dagger c_n,$$

gdzie $\varepsilon_n = -2t \cos k$, a także

$$c_n^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{ikj} c_j^\dagger, \quad k = \frac{2\pi}{N} m \quad (m \in \{1, 2, \dots, N-1\})$$

(a) Znajdujemy równanie ruchu

dla reterdowanej funkcji Greena:

$$G_0(k, t) = -i\Theta(t) \langle \{c_k(t), c_k^\dagger\} \rangle,$$

czyli

$$\partial_t G_0(k, t) = -i\delta(t) \langle \{c_k(t), c_k^\dagger\} \rangle + \\ -i\Theta(t) \langle \{ \partial_t c_k(t), c_k^\dagger \} \rangle,$$

ponieważ $\delta(t)$ jest uśredniona tylko,

gdy $t=0$, więc $\underbrace{\{c_k(0), c_k^\dagger\}}_1 \delta(t) = \delta(t)$,

ponadto

$$\begin{aligned} \partial_t c_k &= i[\hat{H}, c_k] = i \sum_n \varepsilon_n [c_n^\dagger c_n, c_k] = \\ &= \left\{ [c_n^\dagger c_n, c_k] = c_n^\dagger c_n c_k - c_n^\dagger c_k c_n = \right. \\ &\quad \left. = c_n^\dagger c_n c_k - \delta_{nk} c_k + c_n^\dagger c_k c_k = -\delta_{nk} c_k \right\} = \end{aligned}$$

$$= -i \sum_{k'} \epsilon_{k'} \delta_{kk'} c_k = -i \epsilon_k c_k, \text{ czyli}$$

$$\partial_t G_0(k, t) = -i \delta(t) - i \epsilon_k \underbrace{(-i \theta(t) \langle \{c_k(t), c_k^\dagger\} \rangle)}_{G_0(k, t)}$$

$$[i \partial_t - \epsilon_k] G_0(k, t) = \delta(t)$$

wykonujemy transformację Fouriera

$$G_0(k, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i(\omega + i0^+)t} G(k, t)$$

otrzymujemy

$$[\omega + i0^+ - \epsilon_k] G_0(k, \omega) = 1 \Rightarrow G_0(k, \omega) = \frac{1}{\omega + i0^+ - \epsilon_k}$$

przetwarzamy tenz wynik do
przestrzeni rzeczywistej:

$$G_0(n, m; \omega) = \frac{1}{N} \sum_k \frac{e^{ik(n-m)}}{\omega + i0^+ - \epsilon_k}$$

↑ dyskretna transformata
Fouriera

Alternatywna metoda:

Możemy wykorzystać operator rezolwenty

$$(\partial_t - \hat{H}_0)^{-1}, \text{ wtedy}$$

$$\begin{aligned}
G_0(n, m, \omega) &= \langle n | (\omega + i0^+ - \hat{H}_0)^{-1} | m \rangle = \\
&= \sum_{k, q} \langle n | k \rangle \langle k | (\omega + i0^+ - \hat{H}_0)^{-1} | q \rangle \langle q | m \rangle = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k, q} e^{ikn} \underbrace{\langle k | q \rangle}_{\delta_{k, q}} (\omega + i0^+ - \varepsilon_q)^{-1} e^{iqm} = \\
&= \frac{1}{N} \sum_k \frac{e^{ik(n-m)}}{\omega + i0^+ - \varepsilon_k}
\end{aligned}$$

(b) W granicy termodynamicznej

$$\frac{1}{N} \sum_k (\cdot) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{dk}{2\pi},$$

czyli

$$G_0(n, m, \omega) = \int_0^{2\pi} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ik(n-m)}}{\omega + i0^+ - \varepsilon_k}$$

Wykorzystując niezmienniczość translacji, czyli $G_0(n, m, \omega) = G_0(n-m, 0, \omega)$.

Ponadto mamy, że

$$\begin{aligned}
G_0(n, 0, \omega) &= \int_0^{2\pi} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ikn}}{\omega + i0^+ + 2t \cos k} = \\
&= \frac{1}{t} \int_0^{2\pi} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ikn}}{\omega/t + i0^+ + 2 \cos k} = \frac{1}{t} G(n, 0, \frac{\omega}{t})
\end{aligned}$$

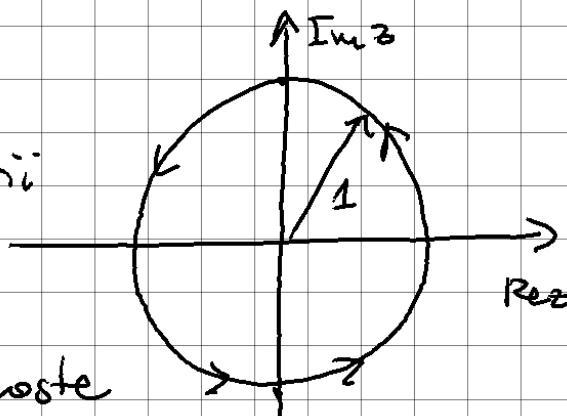
Możemy położyć $t=1$ bez utraty ogólności. Mamy, więc $(w = \omega + i\eta \in \mathbb{C})$

$$G_0(n, 0, w) = \int_0^{2\pi} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ikn}}{w + 2\cos k} = \left\{ z = e^{ik} \right\}$$

$$= \int_{C_0} \frac{dz}{2\pi i} \frac{z^{n-1}}{w + z + z^{-1}} = \int_{C_0} \frac{dz}{2\pi i} \frac{z^n}{wz + z^2 + 1}$$

Zakładamy, że $n \geq 0$,

bo z powodu symetrii inwersji $f_n(w) = f_{-n}(w)$.



Wtedy mamy dwie proste

bieżące $z = \frac{1}{2}(-w \pm \sqrt{w^2 - 4})$.

Jesteśmy zainteresowani dwoma sytuacjami:

- $w = \omega + i\eta$, $-2 \leq \omega \leq 2$, co można sparametryzować $\omega = -2 \cos \theta$
- $w = \omega + i\eta$, $\omega \geq 2$, co można sparametryzować $\omega = 2 \cosh \theta$, $\theta \geq 0$.

W pierwszym przypadku bieguny wynoszą

$$\begin{aligned}\pm \sqrt{\omega^2 - 4} &= \pm \sqrt{(-2\cos\theta + i\eta)^2 - 4} \stackrel{\eta \rightarrow 0^+}{=} \\&= \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4i\eta\cos\theta - 4 + \mathcal{O}(\eta^2)} = \\&= \pm \sqrt{-4\sin^2\theta - 4i\eta\cos\theta} = \pm 2i\sin\theta \sqrt{1 + i\eta \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}} = \\&= \pm 2i\sin\theta \left(1 + i\eta \frac{\cos\theta}{2\sin^2\theta} + \mathcal{O}(\eta^2)\right)\end{aligned}$$

zatem

$$\begin{aligned}z_{\pm} &\doteq \frac{1}{2}(-\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4}) = \cos\theta - i\frac{\eta}{2} \pm i\sin\theta \left(1 + i\eta \frac{\cos\theta}{2\sin^2\theta} + \dots\right) \\&= e^{\pm i\theta} - \eta \frac{i \pm \cot\theta}{2} + \mathcal{O}(\eta^2),\end{aligned}$$

czyli

$$|z_{\pm}|^2 = 1 \mp \frac{\eta}{\sin\theta} + \mathcal{O}(\eta^2)$$

Zależnie od znaku $\sin\theta$ jest on wewnętrznie lub na zewnętrznej konturze. Dla $\theta = \pi/2$

mamy $\omega = 0$, wtedy z dwóch biegunów

$\pm i - \eta \frac{i}{2}$ wewnątrz konturu jest tylko $i - i\eta/2$.

Polsumowując jesteśmy biegun wewnątrz

kontura jest zlokalizowany w z_0 :

$$z_0 = \begin{cases} e^{i\theta} - \eta \frac{i + \cot \theta}{2} + \mathcal{O}(\eta^2) & \text{dla } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ e^{i\theta} - \eta \frac{i - \cot \theta}{2} + \mathcal{O}(\eta^2) & \text{dla } \theta \in]\frac{\pi}{2}, 0] \\ i - \frac{i\eta}{2} + \mathcal{O}(\eta^2) & \text{dla } \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Niech $z_1 = w - z_0$, wtedy $z^2 + wz + 1 = (z - z_0)(z - z_1)$.

Mamy, więc

$$G_0(n, 0, w) = \frac{z_0^n}{z_0 - z_1} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0^+} \begin{cases} \frac{e^{in\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} & \text{dla } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ \frac{e^{-in\theta}}{e^{-i\theta} - e^{i\theta}} & \text{dla } \theta \in]\frac{\pi}{2}, 0] \\ \frac{i^n}{2i} & \text{dla } \theta = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

Ostatecznie

$$G_0(n, 0, w) = \begin{cases} \frac{e^{in\theta}}{2i \sin \theta} & \text{dla } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ -\frac{e^{-in\theta}}{2i \sin \theta} & \text{dla } \theta \in]\frac{\pi}{2}, 0] \\ \frac{i^{n-1}}{2} & \text{dla } \theta = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$(c) \quad G_0 = (\omega + i0^+ - \hat{H}_0)^{-1}$$

$$G = (\omega + i0^+ - \hat{H}_0 - V)^{-1},$$

wtedy

$$G = \underbrace{(\omega + i0^+ - \hat{H}_0)^{-1}}_{G_0^{-1}} - V = [G_0^{-1} (1 - G_0 V)]^{-1} =$$

$$= \frac{G_0}{1 - G_0 V}, \quad \text{konstancja z tego, że}$$

$$(1 - G_0 V)^{-1} = \sum_n (G_0 V)^n,$$

maemy

$$G = G_0 + G_0 V G_0 + G_0 V G_0 V G_0 + \dots = G_0 + G_0 T G_0,$$

gdzie $T = V + V G_0 V + V G_0 V G_0 V + \dots =$

$$= V (1 - G_0 V)^{-1}$$

(d) Konstancja z tego, że

$$V = v |0\rangle\langle 0| \Leftrightarrow \langle n | V | m \rangle = v \delta_{n,0} \delta_{m,0},$$

wtedy

$$\langle n | T | m \rangle = v \delta_{n,0} \delta_{m,0} (1 + v G_0(0,0,\omega) +$$

$$+ v^2 G_0^2(0,0,\omega) + \dots) = \frac{v \delta_{n,0} \delta_{m,0}}{1 - v G_0(0,0,\omega)},$$

czyli $T = \frac{\nu}{1 - \nu G_0(0,0,\omega)} |0 \times 0|$,

⑥ $\hat{H}_0 = \sum_{\vec{k}\sigma} (\epsilon_{\vec{k}} - \mu) a_{\vec{k}\sigma}^\dagger a_{\vec{k}\sigma}$

obliczamy:

$$[a_{\vec{k}\sigma}, \hat{H}_0]_- = \sum_{\vec{k}'\sigma'} (\epsilon_{\vec{k}'} - \mu) [a_{\vec{k}\sigma}, a_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger a_{\vec{k}'\sigma'}] =$$

$$= \sum_{\vec{k}'\sigma'} (\epsilon_{\vec{k}'} - \mu) \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\sigma\sigma'} a_{\vec{k}'\sigma'} = (\epsilon_{\vec{k}} - \mu) a_{\vec{k}\sigma}$$

teraz zwróćmy się do członu oddziaływania:

$$[a_{\vec{k}\sigma}, \hat{H} - \hat{H}_0] = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\vec{k}', p, q \\ \sigma'', \sigma'}} v_{\vec{k}', p, q}(\vec{q}) (\delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'+\vec{q}} a_{\vec{p}-\vec{q}\sigma'}^\dagger a_{\vec{p}\sigma'} a_{\vec{k}'\sigma''}^\dagger$$

$$- \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\vec{k}, \vec{p}-\vec{q}} a_{\vec{k}'+\vec{q}\sigma''}^\dagger a_{\vec{p}\sigma'} a_{\vec{k}'\sigma''}) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\vec{p}, \vec{q}, \sigma'} v_{\vec{k}-\vec{q}, \vec{p}}(\vec{q}) a_{\vec{p}-\vec{q}\sigma}^\dagger a_{\vec{p}\sigma} a_{\vec{k}-\vec{q}\sigma} +$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}', \vec{q}, \sigma''} v_{\vec{k}', \vec{k}+\vec{q}}(\vec{q}) a_{\vec{k}'+\vec{q}, \sigma''}^\dagger a_{\vec{k}+\vec{q}, \sigma} a_{\vec{k}'\sigma''}$$

W pierwszym członie $\vec{q} \rightarrow -\vec{q}$;

$$v_{\vec{k}+\vec{q}, \vec{p}}(-\vec{q}) = v_{\vec{p}, \vec{k}+\vec{q}}(\vec{q})$$

W drugim członie: $\vec{k}' \rightarrow \vec{p}$; $\sigma'' \rightarrow \sigma'$

Obe te strony składają się do:

$$[a_{k\sigma}, \hat{H} - \hat{H}_0] = \sum_{p,q\sigma'} v_{p,k+q}(q) a_{p+q,\sigma'}^\dagger a_{p\sigma'} a_{k+q\sigma}$$

Postępując się równaniami z wykładu dostajemy:

$$(\omega - \varepsilon_k + \mu) G_{k\sigma}^{\text{ret}}(\omega) = 1 + \sum_{p,q\sigma'} v_{p,k+q}(q) \langle\langle a_{p+q,\sigma'}^\dagger a_{p\sigma'} a_{k+q\sigma} ; a_{k\sigma}^\dagger \rangle\rangle_\omega^{\text{ret}}$$

$$\textcircled{7} \quad G_{k\sigma}^{\text{ret}}(\omega) = (\omega - \varepsilon_k + \mu - \Sigma_\sigma(\vec{k}, \omega))^{-1}$$

$$(a) \quad \omega - \varepsilon_k + \mu - \Sigma_\sigma(\vec{k}, \omega) \stackrel{!}{=} \omega - 2\varepsilon_k + \frac{\omega^2}{\varepsilon_k} + i\gamma|\omega|$$

$$\Rightarrow \Sigma_\sigma(\vec{k}, \omega) = R_\sigma(\vec{k}, \omega) + i\gamma I_\sigma(\vec{k}, \omega),$$

$$\text{gdzie} \quad R_\sigma(\vec{k}, \omega) = \varepsilon_k + \mu - \frac{\omega^2}{\varepsilon_k}$$

$$I_\sigma(\vec{k}, \omega) = -\gamma|\omega|$$

$$(b) \quad \omega_{i\sigma}(k) = \varepsilon_k - \mu + R_\sigma(k, \omega_{i\sigma}) = 2\varepsilon_k - \frac{\omega_{i\sigma}^2(k)}{\varepsilon_k}$$

$$\Rightarrow \omega_{i\sigma}^2 + \varepsilon_k \omega_{i\sigma} = 2\varepsilon_k^2$$

$$\left(\omega_{i\sigma} + \frac{1}{2}\varepsilon_k\right)^2 = \frac{9}{4}\varepsilon_k^2$$

Dostajemy dwie kwazicząstki o energiach

$$\omega_{1\sigma} = -2\varepsilon_k \quad , \quad \omega_{2\sigma} = \varepsilon_k .$$

Wyznaczymy dla nich wagi spektralne:

$$\alpha_{i\sigma}(k) = \left| 1 - \frac{\partial}{\partial \omega} R_{\sigma}(\vec{k}, \omega) \right|_{\omega=\omega_{i\sigma}}^{-1} = \left| 1 + 2 \frac{\omega_{i\sigma}}{\varepsilon_k} \right|^{-1}$$

$$\Rightarrow \alpha_{1\sigma}(\vec{k}) = \alpha_{2\sigma}(\vec{k}) = \frac{1}{3}$$

Czas życia kwezirozestek:

$$I_{\sigma}(\vec{k}, \omega_{1\sigma}) = -2\gamma |\varepsilon_k| = I_{1\sigma}$$

$$I_{\sigma}(\vec{k}, \omega_{2\sigma}) = -\gamma |\varepsilon_k| = I_{2\sigma} \quad , \quad \text{przy czym}$$

$$\tau_{i\sigma} = \frac{1}{|\alpha_{i\sigma}(\vec{k}) \cdot I_{i\sigma}(\vec{k})|} \quad , \quad \text{więc}$$

$$\tau_{1\sigma} = \frac{3}{2\gamma |\varepsilon_k|} \quad , \quad \tau_{2\sigma} = \frac{3}{\gamma |\varepsilon_k|}$$

(c) Kwezirozestki są dobre określone,

$$\text{gdzie} \quad |I_{\sigma}(\vec{k}, \omega)| \ll |\varepsilon_k - \mu + R_{\sigma}(\vec{k}, \omega)|$$

$$\Leftrightarrow |I_{\sigma}(\vec{k}, \omega)| \ll |\omega_{i\sigma}(\vec{k})| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma |\omega_{i\sigma}(\vec{k})| \ll |\omega_{i\sigma}(\vec{k})| \Leftrightarrow \gamma \ll 1$$

$$(d) \quad \left(\frac{\partial R_{\sigma}}{\partial \omega} \right)_{\varepsilon_k} = - \frac{2\omega}{\varepsilon_k}$$

$$\left(\frac{\partial R_{\sigma}}{\partial \varepsilon_k} \right)_{\omega} = 1 + \frac{\omega^2}{\varepsilon_k^2}$$

Konstanta $z = \frac{m_{1\sigma}^*}{m} = \frac{1 - \left(\frac{\partial R_{1\sigma}}{\partial \omega_{1\sigma}} \right)_{\omega_{1\sigma}}}{1 + \left(\frac{\partial R_{1\sigma}}{\partial \varepsilon_k} \right)_{\omega_{1\sigma}}}$

$$\Rightarrow m_{1\sigma}^*(\vec{k}) = m \frac{1-4}{1+5} = -\frac{1}{2}m$$

$$m_{2\sigma}^*(\vec{k}) = m \frac{1+2}{1+2} = m$$

8* (a) Z definicji dla układu translacyjnie niezmienniczego mamy:

$$G_{\alpha\beta}^{(0)} = -i \langle T \hat{\psi}_{\alpha}(\vec{r}, t) \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(\vec{0}, 0) \rangle, \text{ gdzie}$$

ewolucja czasowa jest zadana przez $\hat{H}_0$,

a wartości oczekiwana jest liczona

na nieoddzielającym stanie podstawowym.

Analogicznie jak na ciałach dostaje się

$$G_{\alpha\beta}^{(0)} = -i \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \langle \hat{T} c_{\vec{k}\alpha}(t) c_{\vec{k}'\beta}^{\dagger} \rangle =$$

$$= -i \delta_{\alpha\beta} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-i\varepsilon_{\vec{k}} t} \{ \theta(t)(1-n_{\vec{k}}) - \theta(-t)n_{\vec{k}} \},$$

gdzie $n_{\vec{k}} = \theta(-\varepsilon_{\vec{k}} + \varepsilon_F)$ dla $T=0$. Ponieważ

$\hat{H}_0$ jest diagonalny w przestrzeni spinowej,

oznacza to, że karły z spinów można traktować z osobna, tj.

$$G_{\alpha\beta}^{(0)}(\vec{r}, t) = G^{(0)}(\vec{r}, t) \delta_{\alpha\beta}$$

W reprezentacji pędowej mamy:

$$G_0(\vec{k}, t) = -i e^{-i\varepsilon_k t} \{ \Theta(t)(1-n_k) - \Theta(-t)n_k \}$$

przetransformujemy to wyrażenie do postaci:

$$G_0(\vec{k}, \omega) = \frac{1-n_k}{\omega - \varepsilon_k + i\delta} + \frac{n_k}{\omega - \varepsilon_k - i\delta} = \frac{1}{\omega - \varepsilon_k + i\delta \operatorname{sgn}(\varepsilon_k - \varepsilon_F)}$$

Wykorzystując relację:

$$\frac{1}{\omega - \varepsilon_k \pm i\delta} = \mathcal{P}\left(\frac{1}{\omega - \varepsilon_k}\right) \mp i\pi \delta(\omega - \varepsilon_k)$$

można zastąpić ε_k przez ω , wtedy

$$G_0(\vec{k}, \omega) = (\omega - \varepsilon_k + i\delta \operatorname{sgn}(\omega - \varepsilon_F))^{-1}$$

Wykonujemy zamianę zmiennych $E = \omega - \varepsilon_F$:

$$G_0(\vec{k}, \omega) = (\underbrace{E + \varepsilon_F - \varepsilon_k}_{-\xi_k} + i\delta \operatorname{sgn}(E))^{-1}$$

Wykonując granicę termodynamiczną mamy

$$G_0(\vec{r}, E) = \frac{\Omega}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk k^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}\cos\theta}}{E - \xi_k + i\delta \operatorname{sgn}(E)}$$

Konmy stajec z tego, że

$$\int_{-1}^1 dx e^{ikrx} = \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr},$$

mammy:

$$G_0(\vec{r}, E) = \frac{\Omega}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \int_0^\infty dk \frac{k(e^{ikr} - e^{-ikr})}{E - \xi_k + i\delta \operatorname{sgn}(E)}$$

Dla $\xi_k = k^2/2m - \epsilon_F$, mammy

$$k_\pm = \sqrt{2m(E + \epsilon_F) + 2mi\delta \operatorname{sgn}(E)},$$

$$\text{wtedy } E - \xi_k + i\delta \operatorname{sgn}(E) = \frac{1}{2m}(k_\pm^2 - k^2) = \frac{1}{2m}(k_\pm - k)(k_\pm + k)$$

wstawiając to do $G_0(\vec{r}, E)$ mammy:

$$G_0(\vec{r}, E) = \frac{\Omega}{(2\pi)^2} \frac{m}{ir} \int_0^\infty dk \frac{2k(e^{ikr} - e^{-ikr})}{(k_\pm - k)(k_\pm + k)}$$

Ponieważ

$$\frac{2k}{(k_\pm - k)(k_\pm + k)} = \frac{1}{k_\pm - k} - \frac{1}{k_\pm + k}$$

wtedy

$$G_0(\vec{r}, E) = \frac{\Omega}{(2\pi)^2} \frac{m}{ir} \int_0^\infty dk (e^{ikr} - e^{-ikr}) \left(\frac{1}{k_\pm - k} - \frac{1}{k_\pm + k} \right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{w atomie } e^{-ikr} \\ k \rightarrow -k \end{array} \right\} = \frac{\Omega}{(2\pi)^2} \frac{m}{i r} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikr} \left(\frac{1}{\frac{E}{2} - k} - \frac{1}{\frac{E}{2} + k} \right)$$

$$G_0(\vec{r}, E) = \frac{\Omega}{(2\pi)^2} \frac{m}{i r} \left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikr} \frac{1}{\frac{E}{2} - k} = -2\pi i e^{ikr} \text{ dla } E > 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikr} \frac{-1}{\frac{E}{2} + k} = -2\pi i e^{-ikr} \text{ dla } E < 0, \end{array} \right.$$

co daje

$$G_0(\vec{r}, E) = -\Omega \frac{m}{2\pi r} e^{ikr \operatorname{sgn}(E)}, \text{ gdzie}$$

$$k = \sqrt{2m(\epsilon_F + E)}$$

Dla $E \ll \epsilon_F$ możemy zastosować

$$\text{przybliżenie } k = \sqrt{2m\epsilon_F} \sqrt{1 + \frac{E}{\epsilon_F}} \approx p_F \left(1 + \frac{E}{2\epsilon_F} \right) = \\ = p_F + \frac{E}{v_F},$$

$$\text{wtedy } G_0(\vec{r}, E) = -\Omega \frac{m}{2\pi r} \exp \left[i r \left(p_F \operatorname{sgn} E + \frac{|E|}{v_F} \right) \right]$$

Niech $\Omega = 1$.

(b) Z definicji funkcji Greena mamy:

$$-i \lim_{\substack{\vec{r} = \vec{r}' \\ t' \rightarrow t+0}} \sigma_{\alpha\beta}^i G_{\text{po}}(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = - \lim_{\substack{t' \rightarrow t+0 \\ \vec{r} = \vec{r}'}} \sigma_{\alpha\beta}^i \langle \hat{T} \hat{\psi}_{\beta}(\vec{r}, t) \hat{\psi}_{\alpha}^{\dagger}(\vec{r}', t') \rangle$$

Ponieważ $t' \rightarrow t+0$ operatory ψ_β i $\hat{\psi}_\alpha^+$ należą do komutatorów, co daje

$$\sigma_{\alpha\beta}^i \langle \hat{\psi}_\alpha^+(\vec{r}) \psi_\beta(\vec{r}) \rangle = \langle \hat{\psi}_\alpha^+(\vec{r}) \sigma_{\alpha\beta}^i \psi_\beta(\vec{r}) \rangle = \langle \hat{\sigma}^i(\vec{r}) \rangle = \vec{\sigma}^i(\vec{r}),$$

czyli $\sigma^i(\vec{r}) = -i \lim_{\substack{t' \rightarrow t+0 \\ \vec{r} = \vec{r}'}} \sigma_{\alpha\beta}^i G_{\beta\alpha}(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$

(c) W zerowym i I rzędzie rachunku zaburzeń mamy:

$$G_{\beta\alpha}(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = G_{\beta\alpha}^{(0)}(\vec{r} - \vec{r}'; t - t') + (-i)^2 \int ds \langle \hat{j} \hat{\psi}_{\beta I}(\vec{r}, t) \hat{\psi}_{\alpha I}^+(\vec{r}', t') \cdot V_I(s) \rangle_0$$

Wstawiając $V = g S^i \hat{\sigma}_i^-(\vec{r}=0)$, co daje

$$G_{\beta\alpha}^{(1)}(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = (-i)^2 g S^i \int ds \langle \hat{j} \hat{\psi}_{\beta I}(\vec{r}, t) \hat{\psi}_{\alpha I}^+(\vec{r}', t') \hat{\sigma}_j^-(\vec{r}=0) \rangle_0 =$$

$$= (-i)^2 g S^j \sigma_{\gamma\delta}^j \int ds \langle \hat{j} \hat{\psi}_{\beta I}(\vec{r}, t) \hat{\psi}_{\alpha I}^+(\vec{r}', t') \hat{\psi}_{\gamma I}^+(\vec{0}, s) \hat{\psi}_{\delta I}(\vec{0}, s) \rangle_0 =$$

= { korzystając z twierdzenia Wicka patrząc wykład mamy: }

$$= g S^j \sigma_{\gamma\delta}^j \int ds G_{\beta\gamma}^{(0)}(\vec{r}, t - s) G_{\delta\alpha}^{(0)}(-\vec{r}', s - t') =$$

$$= \int S^i \sigma_{\beta\alpha}^j \int ds G_0(\vec{r}, t-s) G_0(-\vec{r}', s-t')$$

W zerowym rzędzie:

$$\sigma_i^{(0)}(\vec{r}) = -i \lim_{\substack{t' \rightarrow t+0 \\ \vec{r} = \vec{r}'}} \sigma_{\alpha\beta}^i G_{\beta\alpha}^{(0)}(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = 0,$$

bo $\sigma_{\alpha\beta}^i \delta_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\alpha}^i = 0$ ze względu na bez śladowość macierzy Pauliego.

W pierwszym rzędzie mamy:

$$\sigma_{\alpha\beta}^i \sigma_{\beta\alpha}^j = \text{Tr}[\sigma^i \sigma^j] = \delta_{ij} \cdot \text{Tr}[4] = 2\delta_{ij},$$

czyli

$$\begin{aligned} \sigma_i^{(1)}(\vec{r}) &= -i 2 \int S^i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} G_0(\vec{r}, \omega) G_0(\vec{r}, \omega) = \\ &= -i 2 \int S^i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} [G_0(\vec{r}, \omega)]^2, \end{aligned}$$

ponieważ coha nie zmienia się ze względu na transformację $\omega \rightarrow \omega - E_F$, możemy zamienić ω na E , wtedy

$$\sigma_i^{(1)}(\vec{r}) = -2i \int S^i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \left(\frac{m}{2\pi r} \right)^2 e^{2i k_F r \text{sgn}(E)} \frac{e^{-|E|/D}}{e},$$

gdzie wprowadziliśmy obcięcie D ,
aby regularyzować całkę dla $D \rightarrow \infty$.

Założymy, że $r p_F \gg 1$, czyli tylko
wisko-energetyczne wkłady są dominują-
ące w całce, czyli

$$\sigma_i^{(1)}(r) = -i \int S^i \frac{m^2}{4\pi^3 r^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dE e^{2ir(p_F \operatorname{sgn} E + |E|/v_F)} e^{-|E|/D}$$

Rozbijamy całkę na dwa obszary

$E > 0$ i $E < 0$ oraz podstawiając $E \rightarrow -E$

w drugiej z nich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dE \left\{ e^{2ir p_F + 2ir E/v_F - E/D} + e^{-2ir p_F + 2ir E/v_F - E/D} \right\}$$

$$= 2 \cos(2p_F r) \int_0^{\infty} dE e^{2ir E/v_F - E/D}$$

wykonywając całkę i biorąc $D \rightarrow \infty$
dostajemy:

$$\begin{aligned} \sigma_i^{(1)}(r) &= -i \int S^i \frac{m^2}{4\pi^3 r^2} 2 \cos(2p_F r) \left(-\frac{1}{2ir/v_F} \right) = \\ &= \int S^i \frac{m p_F}{4\pi^3} \frac{\cos(2p_F r)}{r^3} \end{aligned}$$