Koło olimpijskie – klasy II

28.11.2020

#6 Wektory i kinematyka

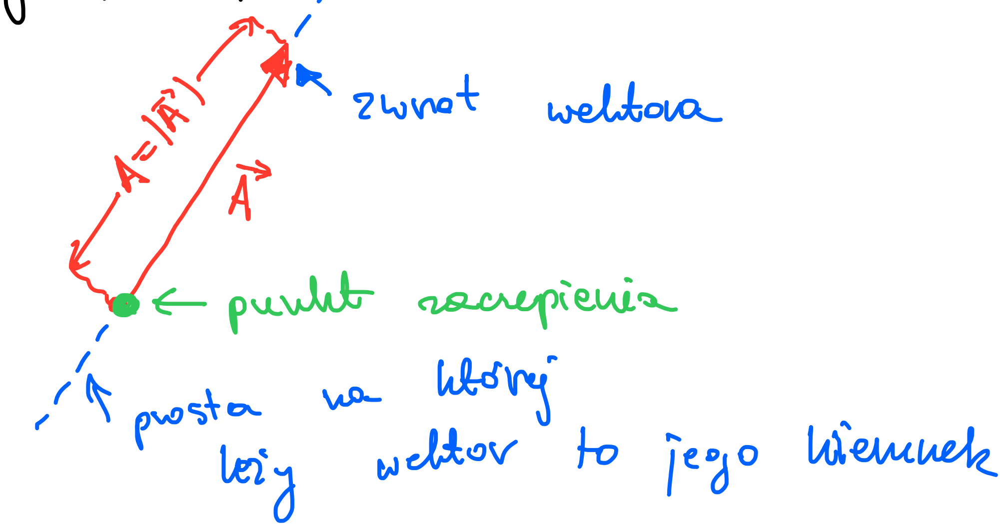
Najważniejsze własności wektorów

Charakteryzujemy wektory przez podanie ich trzech własności:

1°) długość wektora

2°) jego kierunek

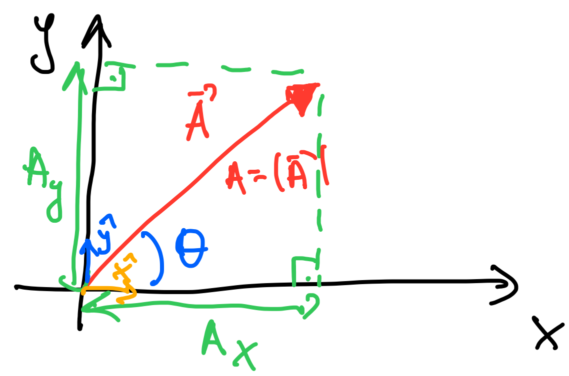
3°) jego zwrot



Wersor jest wektorem jednostkowym wzdłuż jakiegoś kierunku:

$\hat{x} \rightsquigarrow |\hat{x}| = 1$

$\hat{y} \rightsquigarrow |\hat{y}| = 1$



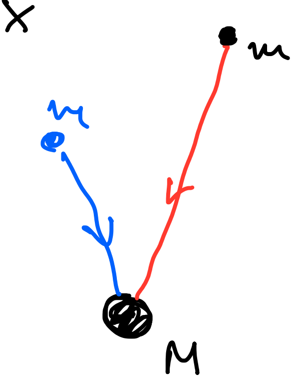
$$A_x = A \cos\theta$$
$$A_y = A \sin\theta$$

$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

wersor radialny

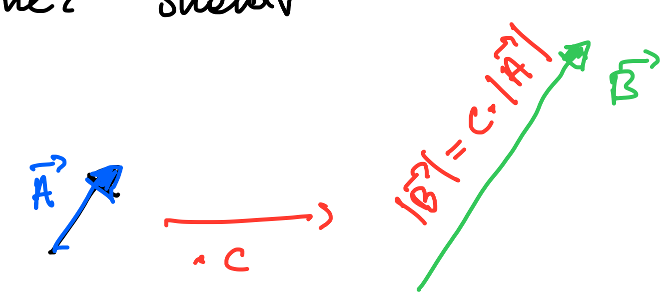
$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$
$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



1°) Mnożenie wektora przez skalar

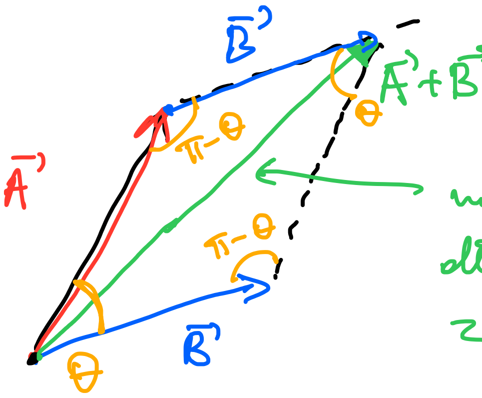
$$\vec{B} = c\vec{A}$$

gdy $c < 0$ zwrot wektora się odwraca



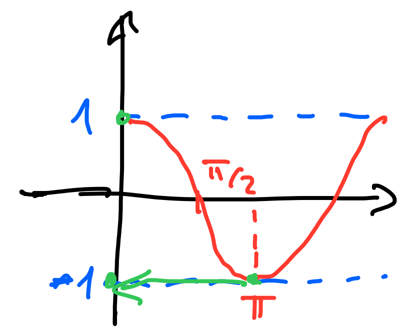
2°) Dodawanie wektorów

$$\vec{c} = \vec{A} + \vec{B}$$



mogę znaleźć dł. tego wektora z tw. kosinusów

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{A}+\vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + - 2|\vec{A}|\cdot|\vec{B}| \cos(\pi - \theta)$$



$$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$$

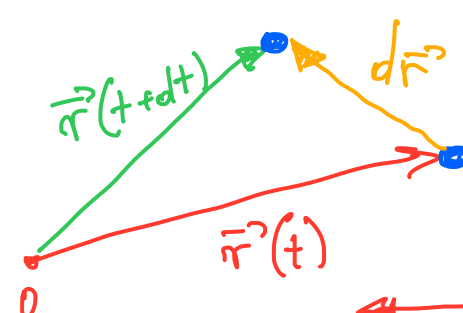
$$c^2 = A^2 + B^2 + 2A\cdot B \cos\theta$$

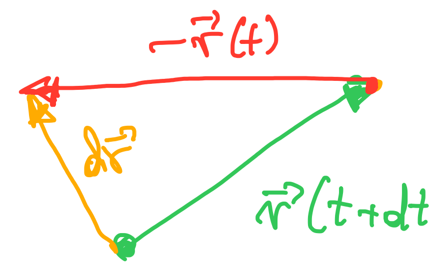
$$c = |\vec{c}| = |\vec{A}+\vec{B}| = \sqrt{A^2+B^2+2AB\cdot\cos\theta}$$

Wektor zmieniający się w czasie:

$$d\vec{r} = \vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$





Prędkość cięta:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

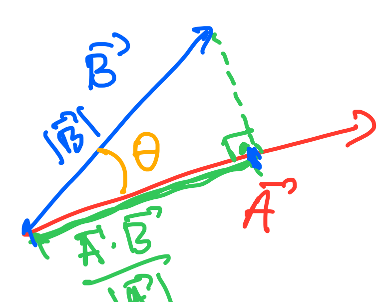
$$\vec{r} = r\hat{r} \implies \vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\underline{\frac{d\hat{r}}{dt}}$$

nie zerowe gdy zmienia się kierunek

3°) Iloczyn skalarny

$$* \quad \vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\cos\theta$$

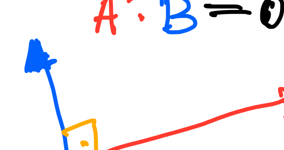
$$\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|} = |\vec{B}|\cdot\cos\theta$$



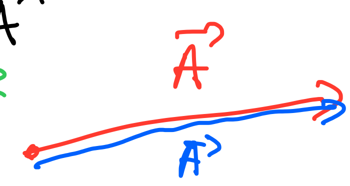
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 0 \implies \vec{A} \perp \vec{B}$$

te wektory są wtedy ortogonalne

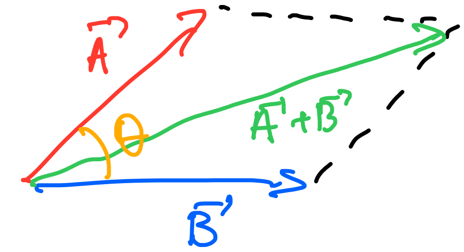
$\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$



$$\vec{A}\cdot\vec{A} = |\vec{A}|^2 \underbrace{\cos\theta}_{0} \Rightarrow |\vec{A}| = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}$$

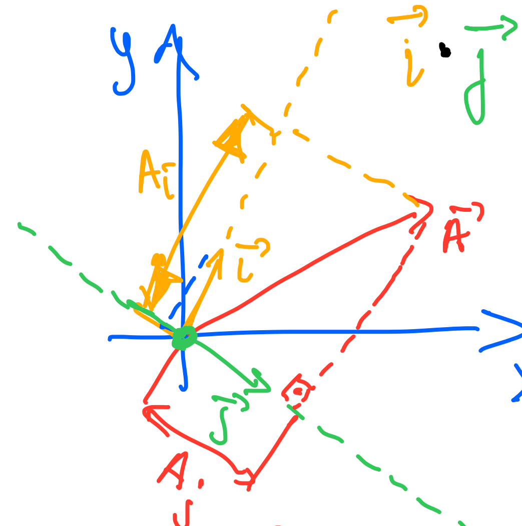


$$|\vec{A}+\vec{B}|^2 = (\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B}) =$$
$$= \vec{A}\cdot\vec{A} + \vec{B}\cdot\vec{B} + 2\vec{A}\cdot\vec{B} =$$
$$= |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\theta$$



Dygresje: Co to jest baza?

Baza jest minimalny zbiór wektorów pozwalający za ich pomocą zapisać dowolny inny wektor.



$\vec{i}\cdot\vec{j} \neq 0$

$\vec{i}\cdot\vec{i} \neq 1$

$\vec{j}\cdot\vec{j} \neq 1$

$\vec{A} = A_i\,\vec{i} + A_j\,\vec{j}$

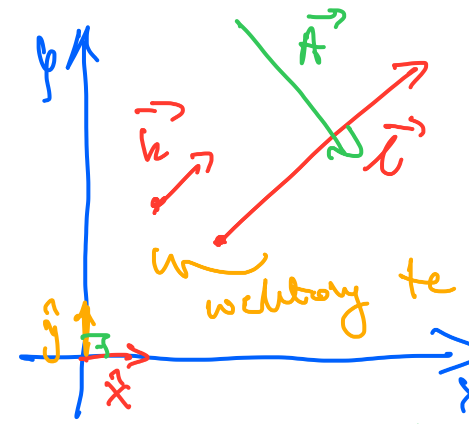
Baza ortonormalna:

$\vec{i}\cdot\vec{i} = 1$ $\qquad$ $\vec{i}\cdot\vec{j} = 0$

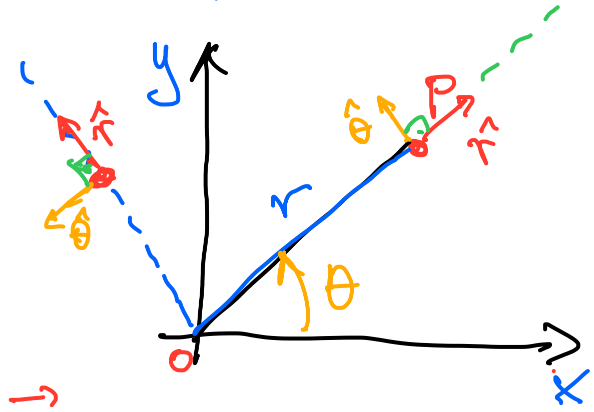
$\vec{j}\cdot\vec{j} = 1$

Przykład: $\hat{x}$, $\hat{y}$ $\qquad$ $\hat{x}\cdot\hat{x} = 1$, $\hat{y}\cdot\hat{y} = 1$

$\hat{x}\cdot\hat{y} = 0$



wektory te są liniowo zależne



4°) Iloczyn wektorowy

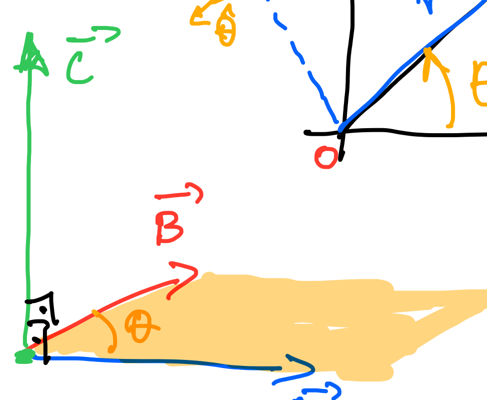
$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$

pseudowektor

$|\vec{C}| = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\sin\theta$

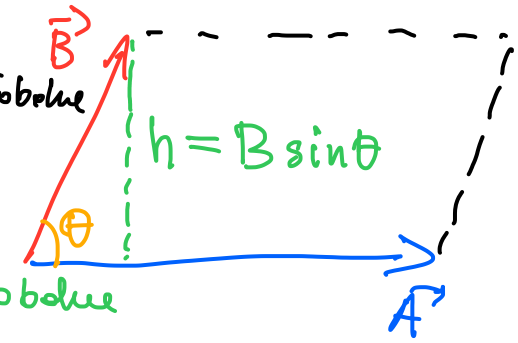
$\vec{A}\times\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{A} \parallel \vec{B}$

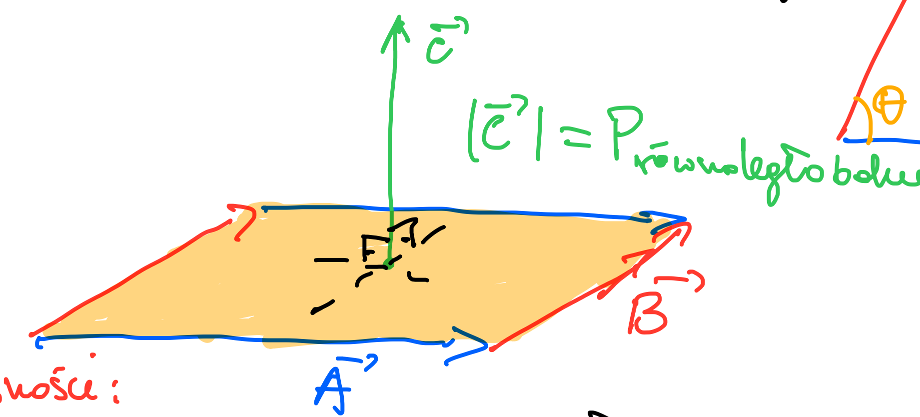
są liniowo zależne



reguła prawej dłoni = przyciągam prawą dłoń od $\vec{A}$ do $\vec{B}$ po najkrótszym kącie i kciuk wyznacza wektor $\vec{C}$

$$A \cdot B \sin\theta = A \cdot h = P_{\text{równoległoboku}}$$





Inne własności:

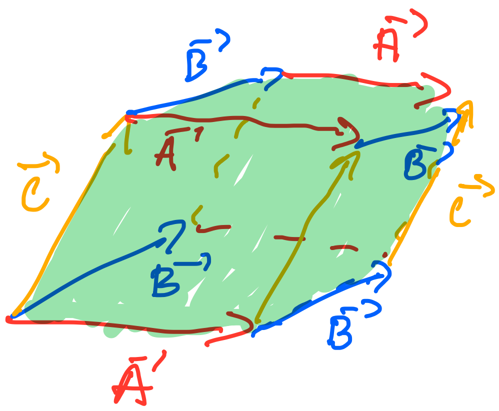
1°) $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$.

2°) $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$$

3°) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \underbrace{(\vec{A} \cdot \vec{C})}_{\text{skalar}} - \vec{C} \underbrace{(\vec{A} \cdot \vec{B})}_{\text{skalar}}$ reguła BAC−CAB

4°) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) =$ objętości równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{A}$, $\vec{B}$ i $\vec{C}$



Kinematyka

Przyspieszenie ciała:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} =$$

$$= \frac{dv_x}{dt}\hat{x} + \frac{dv_y}{dt}\hat{y}$$

Ruch ze stałym przyspieszeniem:

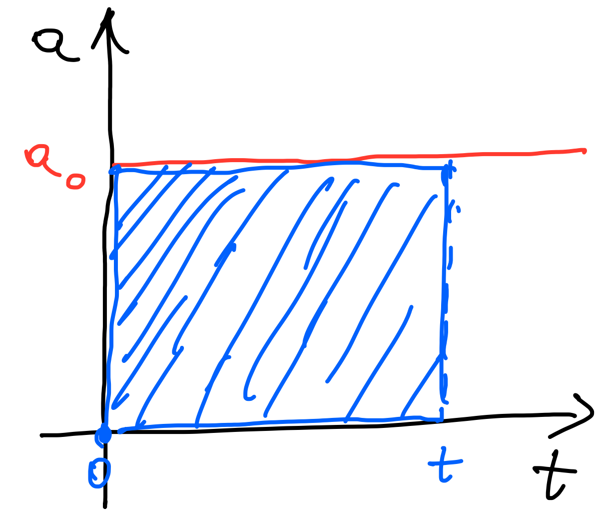
Niech ciało porusza się w jednym wymiarze:

$$a = \text{const}$$

$$a_0 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{const}$$

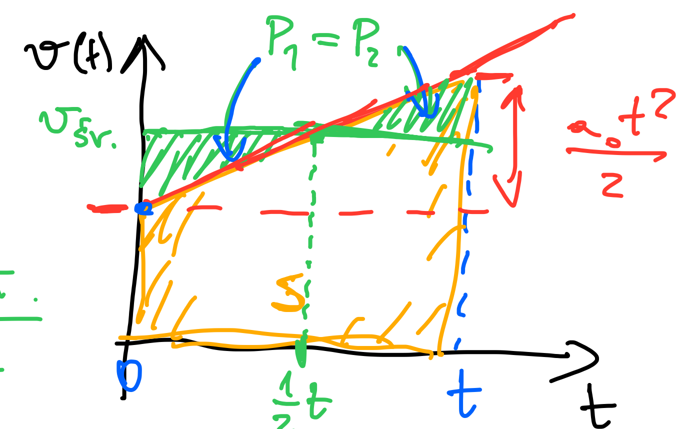
$$\Delta v = a_0 \Delta t$$

$$v(t) - v_0 = a_0 t$$



(*) $$\boxed{v(t) = v_0 + a_0 t}$$

$$v_{śr} = \frac{v(t)+v(0)}{2} = \frac{v_0 + a_0 t + v_0}{2} = v_0 + \frac{a_0 t}{2}$$



$$\underset{x(t)-x_0}{\overset{\parallel}{S}} = v_{śr.}\,\Delta t = \left(v_0 + \frac{a_0 t}{2}\right)t = v_0 t + \frac{a_0}{2}t^2$$

(**) $$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a_0}{2}t^2}$$

Z równania (*) wyznaczamy t:

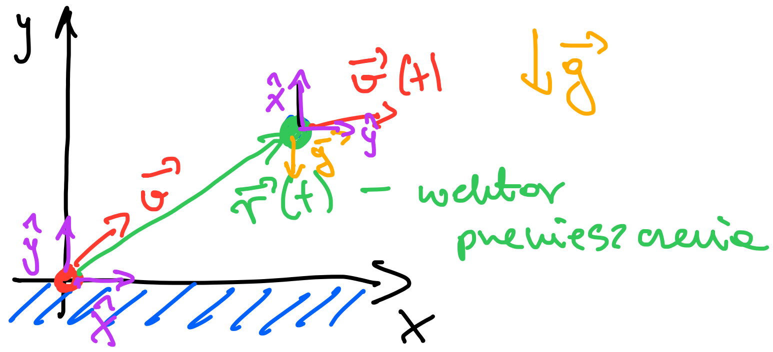
$$t = \frac{v(t) - v_0}{a_0}$$

i wstawiamy do (**), wtedy:

$$\underbrace{x(t) - x_0}_{s} = v_0\,\frac{v(t)-v_0}{a_0} + \frac{a_0}{2}\left(\frac{v(t)-v_0}{a_0}\right)^2 =$$

$$= \frac{v_0 v}{a_0} - \frac{v_0^2}{a_0} + \frac{\cancel{a_0}}{2}\,\frac{1}{a_0^{\cancel{2}}}\left(v^2 + v_0^2 - 2vv_0\right) =$$

$$= \frac{1}{2a_0}\left(v^2 - v_0^2\right) \Rightarrow \boxed{v^2 - v_0^2 = 2a_0 s}$$



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} =$$

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} \Big\{ v_x \hat{x} + v_y \hat{y}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}$$

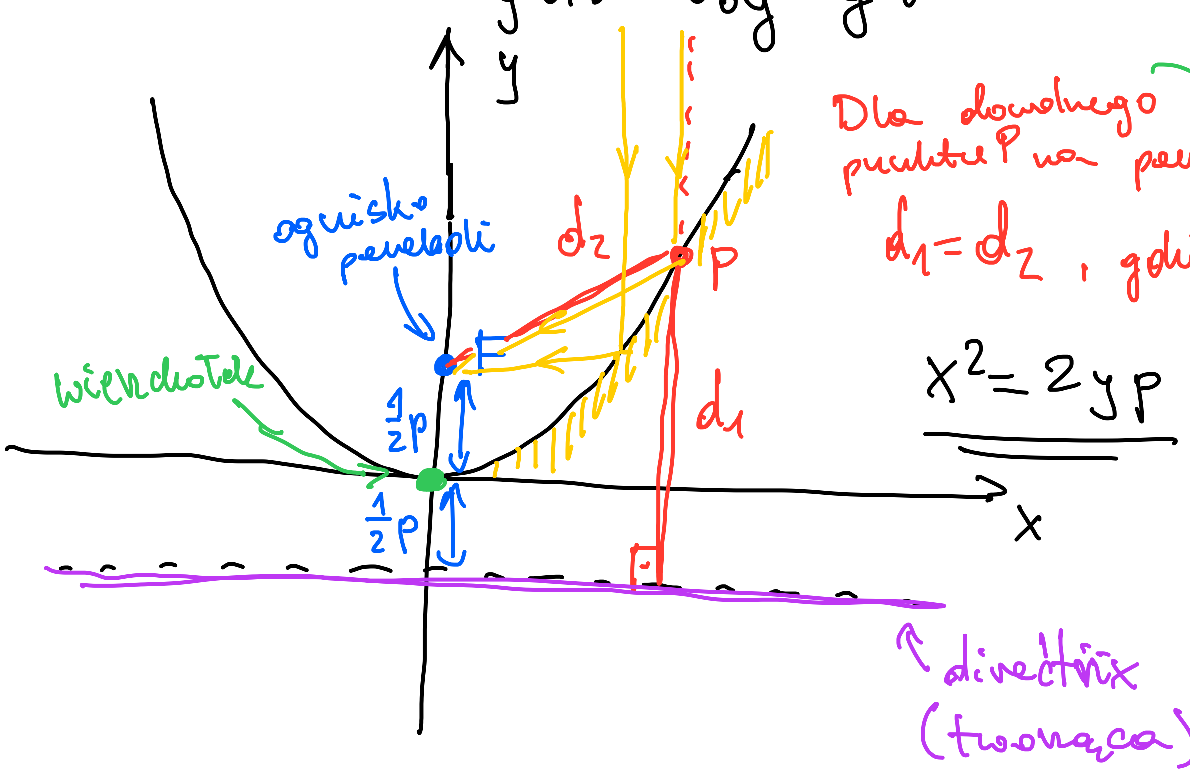
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{x} + \frac{dv_y}{dt}\hat{y} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y}$$

$$\vec{r} = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} = (x_0 + v_{0x} t)\hat{x} + \left(y_0 + v_{0y} t - \frac{g}{2}t^2\right)\hat{y}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x} t \\ y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{g}{2} t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - g t \end{cases}$$

ten zestaw równań opisuje ruchy ukośne w polu grawitacyjnym

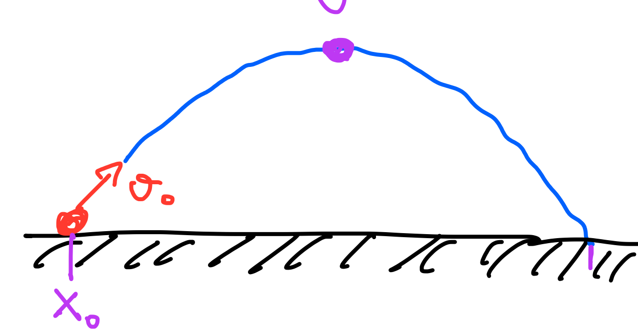


Dla dowolnego punktu P na paraboli $d_1 = d_2$, gdzie d_1 – odległość P od tworzącej (patrz. rys.), d_2 – odległość P od ogniska.

$$\underline{x^2 = 2yp}$$

położenie wierzchołka

$$\left(x_0 + \frac{v_x v_y}{g},\ y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g}\right)$$



Własności ruchów

1°) Wierzchołek paraboli leży w

$$x_{wierz} = x_0 + \frac{v_{0x} v_{0y}}{g}, \quad y_{wierzch.} = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - g\frac{t^2}{2}$$

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t \implies t = \frac{x-x_0}{v_{0x}}$$

Tor ruchu: ← tor to krzywa po której w przestrzeni porusza się ciało

$$y(x) = y_0 + v_{0y}\frac{x-x_0}{v_{0x}} - \frac{g}{2}\left(\frac{x-x_0}{v_{0x}}\right)^2 =$$

$$= y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x-x_0) - \frac{g}{2v_{0x}^2}(x-x_0)^2$$

$$y(x) = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g} - \frac{g}{2v_{x0}^2}\left(x - x_0 - \frac{v_{x0}v_{y0}}{g}\right)^2$$

Sprowadzanie do wspólnego kwadratu

$$y(x) = A + B(\tilde{x}-C)^2 = A + B\tilde{x}^2 + BC^2 - 2BC\tilde{x}$$

chcemy znaleźć y(x) w tej postaci

$\tilde{x} = x - x_0$

$$A = y_0, \quad B = -\frac{g}{2v_{0x}^2}, \quad -2BC = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}$$

$$C = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}\left(-\frac{1}{2B}\right) = \frac{v_{0y}}{\cancel{v_{0x}}}\left(+\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}v_{0x}^{\cancel{2}}}{g}\right) = \frac{v_{0x}v_{0y}}{g}$$

Szukamy maksimum:

$$0 = \frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{d}{dx}\left(\overbrace{\frac{v_{0y}^2}{2g}+y_0}^{\text{stałe}}\right)}_{=0} - \underbrace{\frac{g}{2v_{0x}^2}2\left(x-x_0-\frac{v_{x0}v_{y0}}{g}\right)\cdot \underbrace{1}_{\text{pochodna f. wewnętrznej}}}$$

$$\left[\frac{g}{2v_{0x}^2}\left(x-x_0-\frac{v_{0x}v_{0y}}{g}\right)^2\right]' = \frac{g}{v_{0x}^2}\left(x-x_0-\frac{v_{x0}v_{y0}}{g}\right)$$

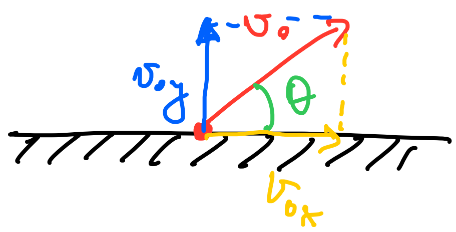
$$= -\frac{g}{v_{0x}^2}\left(x-x_0-\frac{v_{0x}v_{0y}}{g}\right) \implies x_{\text{wierzch.}} = x_0 + \frac{v_{0x}v_{0y}}{g}$$

$$y_{\text{wierzch}}(x_{\text{wierzchołka}}) = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g} - \frac{g}{2v_{0x}^2}\underbrace{\left(x_{\text{wierzch}}-x_0-\frac{v_{0x}v_{0y}}{g}\right)^2}_{=0} =$$

$$= y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

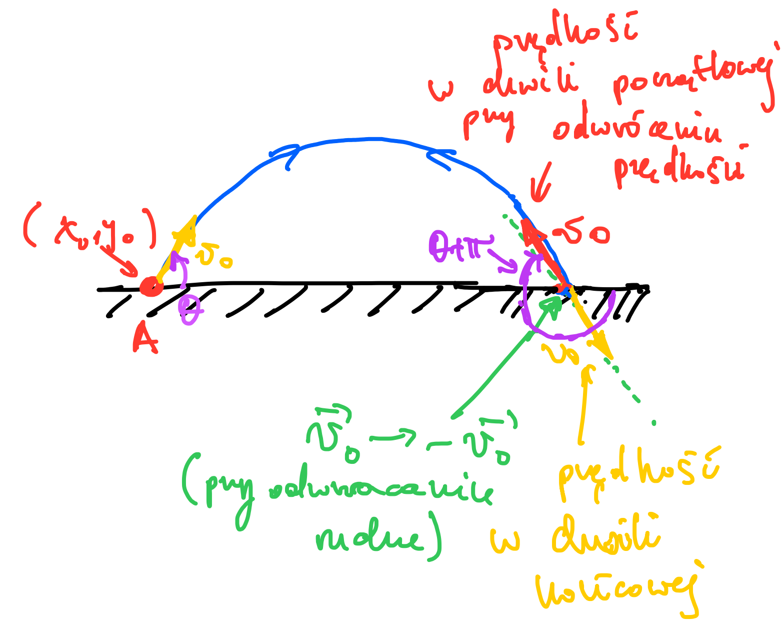
2°) Ruch w rzutach jest odwracalny:

$$y(x) = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g} - \frac{g}{2v_{0x}^2}\left(x - x_0 - \frac{v_{0x}v_{0y}}{g}\right)^2$$



$v_{0x} = v_0 \cos\theta$

$v_{0y} = v_0 \sin\theta$



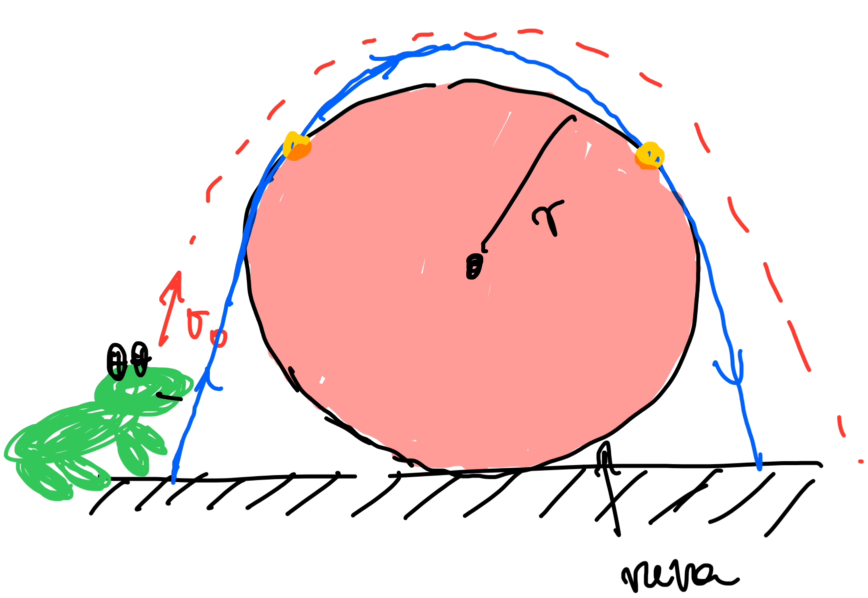
Gdy ruch rozpoczyna się w a i tym razem kąt w rzucie wynosi $\pi + \theta$

$$v_{0y} = v_0 \sin(\pi+\theta) = -v_0 \sin\theta$$

$$v_{0x} = v_0 \cos(\pi+\theta) = -v_0 \cos\theta$$

Wstawiając to do $y(x)$ widzimy, że tor ma dokładnie ten sam postać, bo występuje w nim tylko v_{0x}^2, v_{0y}^2 i $v_{0x}v_{0y}$ w których znaki „−" się kasują.

Zadanie do przemyślenia w domu (Trudne!)



Znaleźć minimalną wartość prędkości początkowej v_0 z jaką żaba przeskoczy przez rurę?

Podpowiedź: żaba musi dwukrotnie otrzeć się o rurę.