

Mechanika kwantowa IIB: Zadania domowe #5

Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski — 21 grudnia 2018



Info: * - oznacza, że zadanie to jest nieobowiązkowe

Zadanie 1: Transformacja Bogolubowa-Valatina

Hamiltonian Bogolubowa-de Gennesa opisujący nadprzewodnictwo w przybliżeniu średniego pola dany jest wzorem:

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}\sigma} \varepsilon_{\vec{k}} \hat{c}_{\vec{k},\sigma}^\dagger \hat{c}_{\vec{k},\sigma} + \sum_{\vec{k}} \left[\Delta \hat{c}_{\vec{k},\uparrow}^\dagger \hat{c}_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger + \Delta \hat{c}_{-\vec{k},\downarrow} \hat{c}_{\vec{k},\uparrow} \right],$$

gdzie $\hat{c}_{\vec{k},\sigma}$ anihiluje cząstki o kwazipędzie $\vec{k}$, $\varepsilon_{\vec{k}}$ jest relacja dyspersyjna, a Δ to parametr średniopolowy. Dla tak zdefiniowanego problemu:

- (a) Zapisz powyższy hamiltonian w postaci formy od wektora $\begin{pmatrix} \hat{c}_{\vec{k},\sigma} \\ \hat{c}_{-\vec{k},\sigma}^\dagger \end{pmatrix}$ i wektora do niego sprzężonego oraz reszty.
(b) Zdiagonalizuj hamiltonian przy wykorzystaniu transformacji Bogolubowa:

$$b_{\vec{k}\uparrow} = u_{\vec{k}}^* \hat{c}_{\vec{k},\uparrow} - v_{\vec{k}}^* \hat{c}_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger$$

$$b_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger = v_{\vec{k}} \hat{c}_{\vec{k},\uparrow} + u_{\vec{k}} \hat{c}_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger$$

oraz znajdź postać parametrów transformacji $u_{\vec{k}}$ i $v_{\vec{k}}$.

Zadanie 2: Temperatura krytyczna dla nadprzewodnika

Wychodząc z równania BCS wyprowadzonego na ćwiczeniach

$$1 = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \tanh\left(\frac{\beta}{2} E_{\mathbf{k}}\right),$$

gdzie $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta|^2}$, oblicz wartość temperatury krytycznej T_c korzystając z warunku, że jest to temperatura przy której zamyka się przerwa energetyczna $\Delta = 0$. Przyjmając, że gęstość stanów $D(\varepsilon) \approx D(\varepsilon)$ dla $|\xi_{\mathbf{k}}| < \omega_D$ ($\hbar = 1$), gdzie ω_D to częstość Debye'a. Przyjmij ponadto, że $\tanh(\frac{\beta}{2}\omega_D) \approx 1$, a

$$\int_0^{\frac{\beta\omega_D}{2}} dx \frac{\ln x}{\cosh^2 x} = \gamma - \ln\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

gdzie $\gamma = 0,5577215\dots$ to stała Eulera.

Pokaż, że stosunek $2\Delta_0/k_B T_c$, gdzie Δ_0 to wartość przerwy energetycznej w zerowej temperaturze, jest uniwersalny w ramach teorii BCS i znajdź jego wartość.

Zadanie 3: Równanie Londonów. Efekt Meissnera

Przyjmij, że elektrony w stanie nadprzewodzącym nie doświadczają oporów ruchu, tzn. $m\dot{\mathbf{v}}_s = e\mathcal{E}$, gdzie $\mathbf{v}_s$ to prędkość nadprzewodzących elektronów o masie m i ładunku e .

(a) Pokaż, że w tym przypadku $\dot{\mathbf{j}}_s = \frac{n_s e^2}{m} \mathcal{E}$, gdzie n_s to koncentracja nadprzewodzących elektronów, a $\mathbf{j}_s$ to ich gęstość prądu. Następnie wykorzystując równania Maxwella, że równanie to implikuje tzw. *równanie Londonów*

$$\Delta \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B},$$

gdzie $\Delta \mathbf{B}$ oznacza laplasjan indukcji pola magnetycznego. Znajdź postać λ_L .

(b) Korzystając z równania Londonów odpowiedz, co dzieje się z polem magnetycznym wnikającym pod kątem prostym do wnętrza nadprzewodnika? Jaka jest interpretacja wielkości λ_L ? Co ma uzyskany wynik wspólnego z efektem Meissnera?

Życzymy wesołych Świąt i pomyślności w Nowym Roku!