

$$\textcircled{1} \hat{H}_{MF} = \sum_{k\sigma} \epsilon_k c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma} + \sum_k [\Delta c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger + \Delta^* c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow}]$$

Transformacja Bogolubowa-Volotina:

$$\begin{cases} b_{1k} = u c_{k\uparrow} + v c_{-k\downarrow}^\dagger \\ b_{2k} = -v^* c_{k\uparrow} + u^* c_{-k\downarrow}^\dagger \\ b_{1k}^\dagger = u^* c_{k\uparrow}^\dagger + v_k^* c_{-k\downarrow} \\ b_{2k}^\dagger = -v c_{k\uparrow}^\dagger + u c_{-k\downarrow} \end{cases} \quad \begin{cases} u \equiv u_k \in \mathbb{C} \\ v \equiv v_k \in \mathbb{C} \\ \text{oznaczenie} \end{cases}$$

Tak jak w ćwiczeniach mamy, że

$$\begin{aligned} 1 &= \{b_{1k}^\dagger, b_{1k}\} = |u|^2 \{c_{k\uparrow}^\dagger, c_{k\uparrow}\} + |v|^2 \{c_{-k\downarrow}^\dagger, c_{-k\downarrow}\} + \\ &+ u^* v^* \{c_{k\uparrow}^\dagger, c_{-k\downarrow}^\dagger\} + u v \{c_{-k\downarrow}, c_{k\uparrow}\} = \\ &= |u|^2 + |v|^2 \stackrel{!}{=} 1 \end{aligned}$$

Transformacja Bogolubowa jest transformacją unitarną.

$$(aib) \hat{H}_{MF} = \sum_k (c_{k\uparrow}^\dagger, c_{k\downarrow}) \begin{pmatrix} \epsilon_k & \Delta \\ \Delta^* & -\epsilon_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{k\uparrow} \\ c_{-k\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} + \underbrace{\sum_k \epsilon_k}_{\text{pominiemy stałe}} =$$

$$= \sum_k (b_{1k}^\dagger, b_{2k}^\dagger) \begin{pmatrix} u & v \\ -v^* & u^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_k & \Delta \\ \Delta^* & -\epsilon_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^* & -v \\ v^* & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon_k |u|^2 + \Delta \sigma^* u + \Delta^* u^* \sigma - \varepsilon_k |\sigma|^2, -2\varepsilon_k u \sigma + \Delta u^2 - \Delta^* \sigma^2 \\ -2\varepsilon_k u^* \sigma^* - \Delta (\sigma^*)^2 + \Delta^* (u^*)^2, \varepsilon_k |\sigma|^2 - \Delta u \sigma^* - \Delta^* u^* \sigma - \varepsilon_k |u|^2 \end{pmatrix}$$

Wyznaczyć pozę diagonalne mające zniknąć:

$$-2\varepsilon_k u \sigma + \Delta u^2 - \Delta^* \sigma^2 = 0$$

$$2\varepsilon_k u \sigma = \Delta u^2 - \Delta^* \sigma^2$$

Wprowadzamy parametryzację:

$$u = e^{i\phi_u} \cos \chi, \quad \sigma = e^{i\phi_\sigma} \sin \chi, \quad \Delta = |\Delta| e^{i\phi}$$

wtedy

$$2\varepsilon_k \cos \chi \sin \chi e^{i(\phi_u + \phi_\sigma)} = e^{i(2\phi_u + \phi)} |\Delta| \cos^2 \chi + e^{i(2\phi_\sigma - \phi)} |\Delta| \sin^2 \chi$$

$$\text{czyli} \quad \phi_u + \phi_\sigma = 2\phi_u + \phi = 2\phi_\sigma - \phi$$

$$\text{oraz} \quad 2\varepsilon_k \sin \chi \cos \chi = |\Delta| (\cos^2 \chi - \sin^2 \chi)$$

dla fer dostajemy, że $\phi = \phi_u - \phi_\sigma$,

natomiast $\phi_u + \phi_\sigma$ może być dowolne,

wiec wybieramy $\phi_u = -\phi_\sigma = -\phi/2$

Ponadto

$$2\varepsilon_k \sin(2\chi) = |\Delta| \cos(2\chi) \Rightarrow \tan(2\chi) = \frac{|\Delta|}{2\varepsilon_k}$$

Stąd mamy, że $\chi = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{|\Delta|}{\epsilon_k}\right)$,
 czyli $u = e^{i\phi/2} \cos \chi$, $v = e^{-i\phi/2} \sin \chi$,

wtedy

$$\begin{pmatrix} \epsilon_k \cos 2\chi + |\Delta| \sin 2\chi & 0 \\ 0 & -\epsilon_k \cos 2\chi - |\Delta| \sin 2\chi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{cases} \cos(\arctg(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ \sin(\arctg(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases} = \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon_k^2 + |\Delta|^2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\epsilon_k^2 + |\Delta|^2} \end{pmatrix}$$

czyli $H_{MF} = \sum_k \begin{pmatrix} b_{1k}^\dagger & b_{2k}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & -E_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \end{pmatrix},$

gdzie $E_k = \sqrt{\epsilon_k^2 + |\Delta|^2}$, ponadto

$$|u|^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\epsilon_k}{E_k} \right)$$

$$|v|^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_k}{E_k} \right)$$

przy czym wykorzystano relacje napisane
 w poprzednim numerze oraz warunki

$$|u|^2 + |v|^2 = 1$$

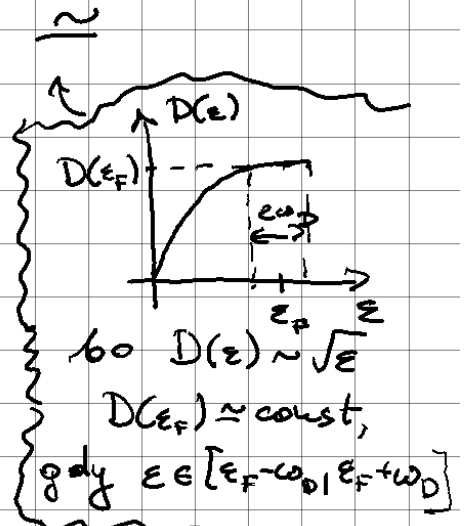
2) Wychodząc z równania przewidywania

energetycznej

$$1 = g \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi D(\mu + \xi) \frac{\tanh\left(\frac{\beta}{2} E_k\right)}{2 E_k}$$

$$g D(\epsilon_F) \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi \frac{\tanh\left(\frac{\beta}{2} E_k\right)}{2 E_k} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{dla } T = T_c \\ \text{znika przewidywania} \\ \Delta = 0 \end{array} \right\}$$



$$= g D(\epsilon_F) \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi \frac{\tanh \frac{\beta}{2} |\xi|}{2 |\xi|} = g D(\epsilon_F) \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi \frac{\tanh \frac{\beta}{2} \xi}{\xi} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{zmiennymi zmiennymi} \\ x = \frac{\beta}{2} \xi \end{array} \right\} = g D(\epsilon_F) \int_0^{\beta \omega_D / 2} dx \frac{\tanh x}{x} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{całkowaniem} \\ \text{przez resztę} \end{array} \right\} = g D(\epsilon_F) \left\{ \ln \frac{\beta \omega_D}{2} \tanh\left(\frac{\beta \omega_D}{2}\right) - \int_0^{\beta \omega_D / 2} dx \frac{\ln x}{\cosh^2 x} \right\}$$

W przypadku słabych sprzężeń $\beta \omega_D \gg 1$,

wtedy wyrażenie podcałkowe w drugiej części zanika eksponencjalnie dla dużych x ,

zli granice całkowania możemy

wybiec do ∞ ($\beta \omega_D / 2 \rightarrow \infty$):

$$1 \approx g D(\epsilon_F) \left\{ \underbrace{\ln\left(\frac{\beta\omega_D}{2}\right) + \gamma}_{\approx 1,60 \text{ for } \beta\omega_D \rightarrow \infty} - \underbrace{\int_0^{\infty} dx \frac{\ln x}{\cosh^2 x}}_{\gamma - \ln \frac{\pi}{4}} \right\} =$$

$$\approx g D(\epsilon_F) \left(\ln\left(\frac{\beta\omega_D}{2}\right) + \gamma - \ln \frac{\pi}{4} \right),$$

gdzie γ to stała Eulera, stąd mamy

$$\exp\left(\frac{1}{g D(\epsilon_F)}\right) \approx \frac{2\beta\omega_D}{\pi} e^{\gamma}$$

$$\Rightarrow k_B T_c \approx \frac{2e^{\gamma}}{\pi} \omega_D \exp\left(-\frac{1}{g D(\epsilon_F)}\right)$$

Pamiętając, że $\omega_D \sim \frac{1}{\sqrt{M}}$, gdzie

M to masa jonów dostępną

w ramach teorii BCS wyznaczanie

efektu izotopowego, czyli $T_c \sim \frac{1}{\sqrt{M}}$.

Ponadto na ćwiczeniach pokazaliśmy,

że $\Delta_0(T=0) \approx 2\omega_D \exp\left(-\frac{1}{g D(\epsilon_F)}\right)$,

czyli

$$\frac{2\Delta_0}{k_B T_c} \approx \frac{2\pi}{e^{\gamma}} \approx 3,528,$$

które nie zależy od parametrów układu i jest uniwersalne dla nadprzewodników I typu.

③ Elektrodynamiczne własności

nadprzewodników zostały po raz pierwszy opisane fenomenologicznie przez braci Londonów w 1935 roku.

Wykonystali oni tzw. obraz dwuciernowy zakładający, że elektrony w nadprzewodniku mogą znajdować się z koncentracją n_n w stanie normalny i z koncentracją n_s w stanie nadprzewodzący w ten, że

$$n = \frac{N}{V} = n_n + n_s$$

cięż normalna podlega oporowi zgodnie z teorią Drudego:

$$\vec{j}_n = \sigma_n \vec{E}, \quad \sigma_n = \frac{e^2 n_n \tau}{m},$$

a cięż nadprzewodzący ulega przyspieszeniu jak cząstki swobodne, czyli:

przy naszym równaniu ruchu są postaci

$$\vec{j}_s = -en_s \vec{v}_s,$$
$$\dot{\vec{v}}_s = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{e\vec{E}}{m}$$

Po wstąpieniu ich do wyrażenia na $\vec{j}_s$ otrzymujemy my tzw. I równanie Londonów

$$\frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t} = \frac{e^2 n_s}{m} \vec{E}, \quad (*)$$

przy czym zakładamy, że n_n i n_s są jednostalne i stać w czasie.

Liączymy notację (*):

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{j}_s = \frac{e^2 n_s}{m} \vec{\nabla} \times \vec{E} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{równanie} \\ \text{Maxwella}}}{=} - \frac{e^2 n_s}{m c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

odcałkowujemy to równanie po czasie:

$$\vec{\nabla} \times \vec{j}_s = - \frac{e^2 n_s}{m c} \vec{B} + \vec{C}(\vec{r}),$$

przy czym stała $\vec{C}(\vec{r})$ wyznaczamy

z warunków początkowych. Jeżeli

zaczynamy z nadprzewodnika w zerowym

polu magnetycznym, wtedy

$$\vec{j}_s = 0, \quad \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{C}(\vec{r}) = 0$$

i dostajemy w ten sposób II równanie

Londonów

$$\vec{\nabla} \times \vec{j}_s = - \frac{e^2 n_s}{mc} \vec{B}$$

Z prawa Ampère'a mamy:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_s + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_n$$

licząc rotację dostajemy:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \times \vec{j}_s + \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \times \vec{j}_n =$$

$$= - \frac{4\pi e^2 n_s}{mc^2} \vec{B} + \frac{4\pi}{c} \sigma_n \vec{\nabla} \times \vec{E} =$$

$$= - \frac{4\pi e^2 n_s}{mc^2} \vec{B} - \frac{4\pi}{c} \sigma_n \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

W przypadku statycznym $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

ponadto $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) + \nabla^2 \vec{B}$,

czyli $-\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) + \nabla^2 \vec{B} = \frac{4\pi e^2 n_s}{mc^2} \vec{B}$,

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
prawo Gaussa dla magnetyzmu

czyli

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B},$$

gdzie

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi e^2 n_s}} \quad - \text{długość penetracji Londonów}$$

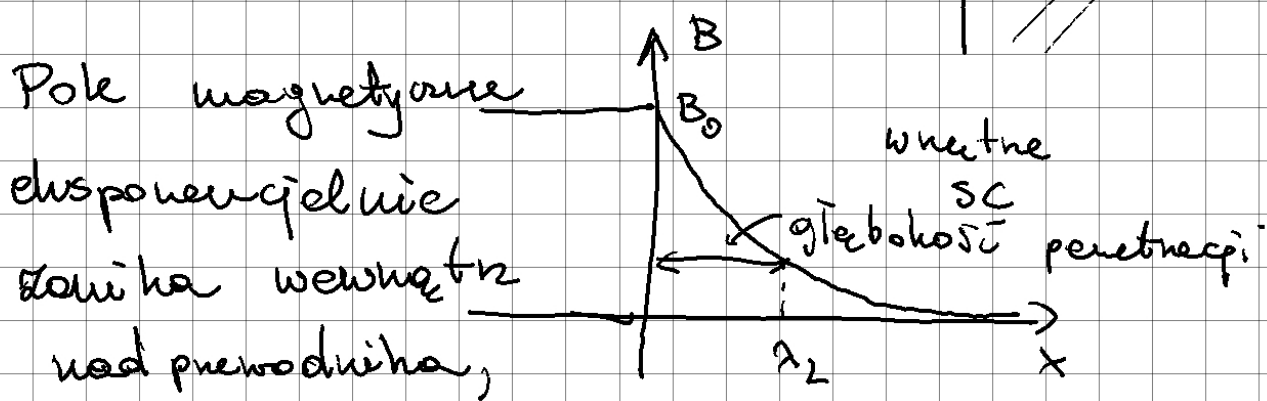
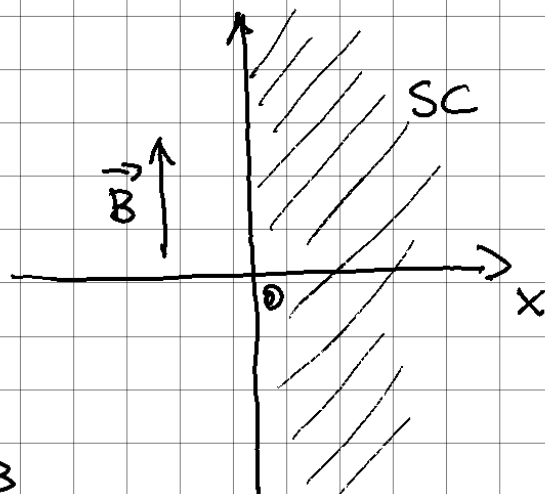
Zakładając, że dla $x > 0$ mamy
 pusty przestrzeń wypełnioną nadprzewodnikiem
 możemy rozwiązać powyższe
 równanie, przy dodatkowym założeniu,
 że przytłaczające pole magnetyczne
 jest równoległe do pow. nadprzewodnika

$$\vec{B} = B_0 \hat{y},$$

wtedy

$$\vec{B}(x) = B_0 \hat{y} e^{-x/\lambda_L}$$

dla $x \geq 0$



ponadto gdy $\lambda_L = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi e^2 n_s}} \xrightarrow{n_s \rightarrow 0} \infty$.

W tym przypadku prąd $\vec{j}_s$ jest
 prądem ekranującym pole magnetyczne,

analogiczny proces tyle, że nie-
-stępnym od powiadania za efekt
Meissnera - Ochsenfelda.