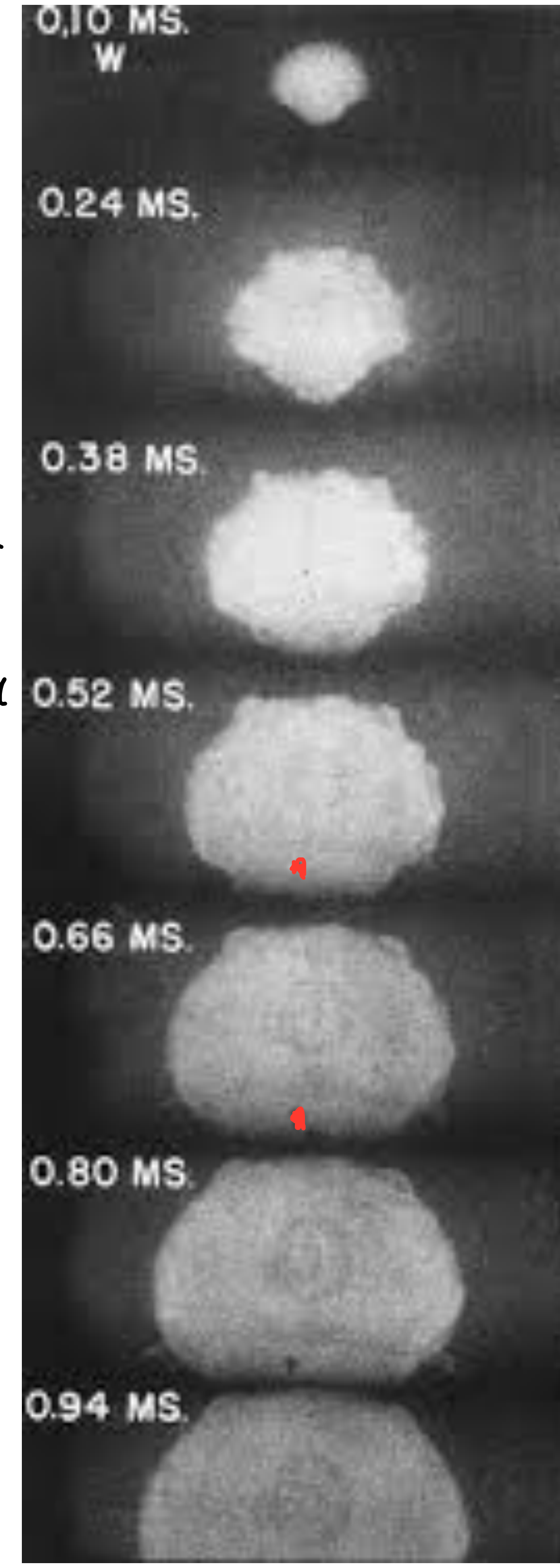
Koło olimpijskie – klasa II

21. 11. 2020

#5 Analiza wymiarowa

G. I. Taylor oszacował w 1945 roku energię detonacji amerykańskiej bomby atomowej w trakcie testu Trinity na podstawie zdjęć zamieszczonych w gazecie i przy zastosowaniu analizy wymiarowej. Informacja ta była trzymana przez amerykanów jako tajemnica wojskowa. Po jej odtajnieniu okazało się, że Taylor pomylił się w swoich rachunkach tylko o ok. 10 %! Dzisiaj nauczymy się techniki, której wykorzystał Taylor.



■ UKŁAD JEDNOSTEK SI

1) Długość – metr, m

$c = 299\,792\,458 \frac{m}{s}$ ← prędkość światła

z definicji.

$\Delta\nu_{Cs}$ – częstotliwość cezowa $[\frac{1}{s}]$

$\frac{c}{\Delta\nu_{Cs}} \sim [m]$

2) Masa – kilogram, kg ← 2018

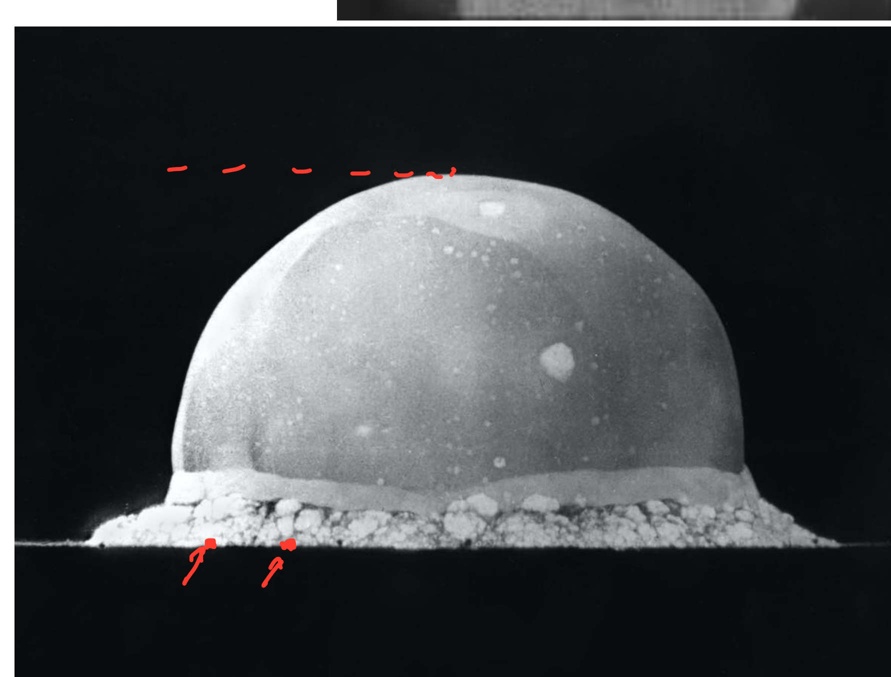
$h = 6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}\ J\cdot s$

stała Plancka

$\frac{kg\, m^2}{s^2}$

c – prędkość światła

$\Delta\nu_{Cs}$ – częstość cezowa



3) czas – sekunda, s

$\Delta\nu_{Cs} = 9192631770 \frac{1}{s}$

^{133}Cs

4) natężenie prądu elektrycznego – amper, A

$e = 1{,}602176634 \times 10^{-19}$ A·s

ładunek elektronowy

$\Delta\nu_{Cs}$ – częstości cezowa

5) temperatura – kelwin, K

$k_B = 1{,}380649 \times 10^{-23}$ J/K

$\frac{kg\, m^2}{s^2}$

h, $\Delta\nu_{Cs}$, c

6) liczność materii – mol, mol ← 2018

$N_A = 6{,}022\,140\,76 \times 10^{23} \frac{1}{mol}$

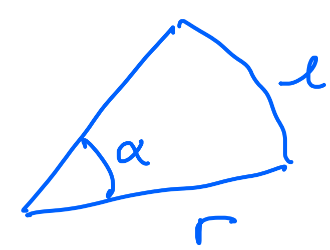
7) światłość – kandela, cd

– tu też ustalono jako stałą wartość skuteczności świetlnej monochromatycznego promieniowania ... (szczegóły nieistotne)

Formalnie rad nie jest jednostką.

radiany to jednostki pomocnicze – jest on bezwymiarowy.

$\alpha = \frac{l}{r}$



ANALIZA WYMIAROWA

$[m] = M$ ← jakaś jednostka masy

$[t] = T$ ← jakaś jednostka czasu

$[l] = L$

masa

interesuje mnie tylko jednostka

Jednostki pochodne:

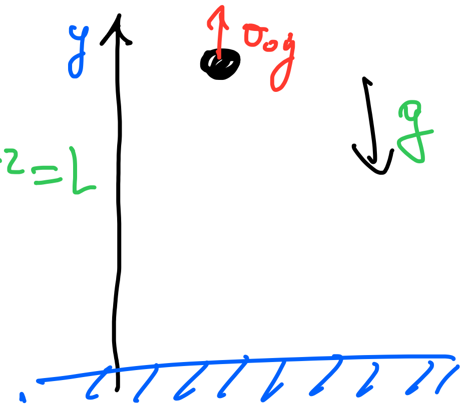
$[F] = \frac{ML}{T^2}$ (siła)

$[E] = \frac{ML^2}{T^2}$

Gdy wszystkie jednostki są zgodne, wtedy nazywamy nasze równanie homogenicznym wymiarowo.

$$y(t) - y_0 = v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2$$

$[y]=L$ $\qquad [vt] = \frac{L}{T}\cdot T = L$ $\qquad [a\cdot t^2] = \frac{L}{T^2}\cdot T^2 = L$



↓ mogę je zapisać w postaci bezwymiarowej

$$\underbrace{\frac{\overbrace{[y(t)-y_0]}^{=L}}{\underbrace{[gt^2]}_{=L}}}_{} = \frac{\overbrace{[v_{0y}]}^{=L/T}}{\underbrace{[gt]}_{=\frac{L}{T^2}\cdot T = \frac{L}{T}}} - \frac{1}{2}$$

$$F(l) = F_0\left[1-\frac{l}{l_0}\right] = \frac{F_0(l_0-l)}{l_0}$$

Algorytm Rayleigha

Przydatne parametry do opisu tego problemu to:

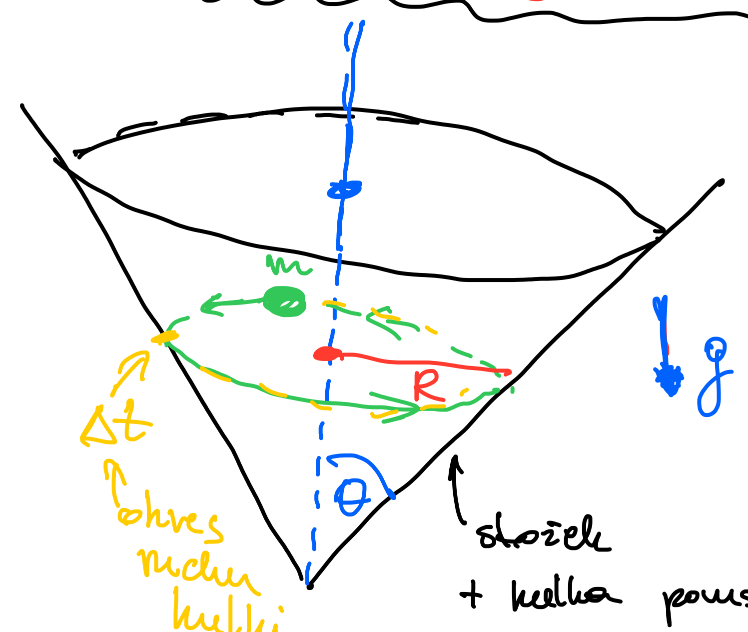
R – promień okręgu po którym porusza się kulka

m – masa kulki

g – przyspieszenie grawitacyjne

Δt – okres ruchu kulki

θ – rozwarcie stożka



stożek + kulka poruszająca się po okręgu w środku.

$(\Delta t)^\alpha m^\beta R^\gamma g^\delta \theta^\varepsilon$ – konstruuję taką wielkość

α, β, γ, δ, ε - wykładniki

$$[\Delta t^\alpha m^\beta R^\gamma g^\delta \theta^\varepsilon] = [\Delta t]^\alpha [m]^\beta [R]^\gamma [g]^\delta [\theta]^\varepsilon =$$
$$= T^\alpha M^\beta L^\gamma (L/T^2)^\delta \, 1^\varepsilon =$$

$$= T^{\alpha - 2\delta} M^{\beta} L^{\gamma+\delta}$$

Szukam bezwymiarowej kombinacji:

$$\left.\begin{aligned} T:&\ \alpha - 2\delta = 0 \\ M:&\ \beta = 0 \\ L:&\ \gamma + \delta = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\alpha = 2\delta \Rightarrow \delta = \tfrac{1}{2}\alpha \\ &\gamma = -\tfrac{1}{2}\alpha \end{aligned}$$

$$\underbrace{\left(\Delta t\, g^{1/2}/R^{1/2}\right)}_{\text{bez wymiarowe}}{}^{\alpha} \text{ — bez wymiarowe}$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{R}{g}} \cdot \text{wielkość bezwymiarowa} = \sqrt{\frac{R}{g}}\, \underbrace{f(\Theta)}_{\text{f. bezwymiarowa}}$$

W tym przypadku okazuje się, że

$$f(\Theta) = 2\pi\sqrt{\operatorname{tg}\Theta}$$

$$[\Delta t\, m^{\beta} R^{\gamma} g^{\delta} \Theta^{\varepsilon}] = \text{bezwymiarowe} \Rightarrow \Delta t\, g^{1/2}/R^{1/2} = \text{bezwym.}$$

$\Delta t = f(m, R, g, \Theta) \leftarrow$ przy 10 pomiarach powtórnych w innych realizacjach pozostałych parametrów daje $\underline{\underline{10^4}}$ punktów pomiarowych

$$\Delta t = \sqrt{\frac{R}{g}}\, f(\Theta)$$

tylko 10 pomiarów

Twierdzenie π Buckinghama

1°) Jeżeli równanie jest wymiarowo homogeniczne, wtedy zawsze da się go zredukować jako iloczyn niezależnych czynników bezwymiarowych (π_i)

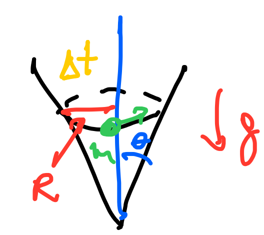
$\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots$ – może ich być dużo

$$\pi_1^{\alpha} \cdot \pi_2^{\beta} \cdot \pi_3^{\gamma} \cdot \ldots = \text{bezwymiarowe} = \text{const}$$

2°) Liczba tych argumentów bezwymiarowych Π wynosi N_π. Liczba parametrów i stałych wymiarowych wynosi N_v. Minimalna liczba wymiarów (czyli liczba jednostek podstawowych potrzebnych do opisu problemu) $= N_d$.

$$\boxed{N_\pi = N_v - N_d}$$

W poprzednim przykładzie: $(\Delta t)^{\alpha} m^{\beta} R^{\gamma} g^{\delta} \theta^{\varepsilon}$



$T, L, M \longrightarrow N_d = 3$

$\Delta t, m, R, g, \theta \longrightarrow N_v = 5$

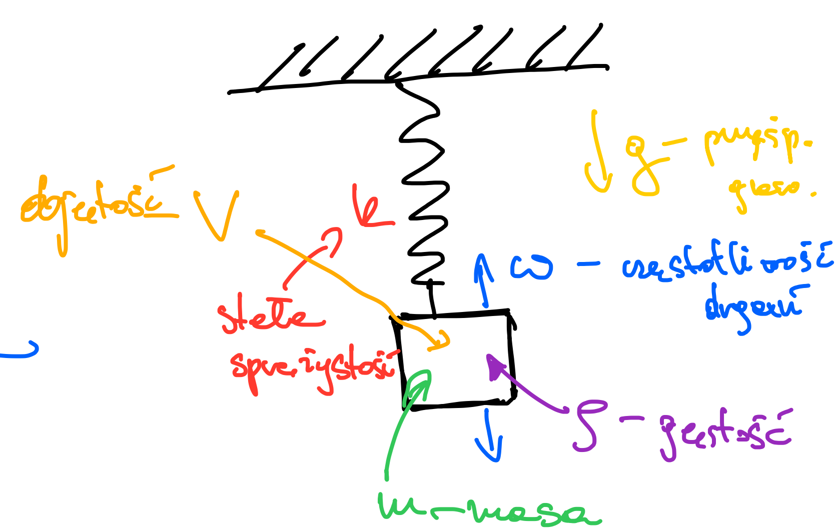
$N_\pi = 5 - 3 = 2$

$$\pi_1 = \Delta t \sqrt{\frac{g}{R}} \quad , \quad \pi_2 = \theta$$

$$F(\pi_1, \pi_2) = 0 \Rightarrow \underbrace{\pi_1}_{\Delta t\sqrt{\frac{g}{R}}} = \underbrace{f(\pi_2)}_{f(\theta)} \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{R}{g}}\, f(\theta)$$

Na co zwrócić uwagę przy korzystaniu z analizy wymiarowej?

$$\left.\begin{array}{l} [\omega] = T^{-1} \\ [m] = M \\ [k] = M \cdot T^{-2} \leftarrow F = kx \\ [g] = \frac{L}{T^2} \\ [V] = L^3 \\ [\rho] = \frac{M}{L^3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} N_v = 6 \\ \underline{T, M, L} \\ N_d = 3 \end{array}$$



$N_\pi = 6-3 = 3$

Korzystam z algorytmu Rayleigha: $\omega = f(\ldots)$

$$[\omega m^\alpha k^\beta \rho^\gamma V^\delta g^\varepsilon] = T^{-1} M^\alpha (MT^{-2})^\beta (ML^{-3})^\gamma (L^3)^\delta \left(\frac{L}{T^2}\right)^\varepsilon =$$

$$= T^{-1-2\beta-2\varepsilon} M^{\alpha+\beta+\gamma} L^{-3\gamma+3\delta+\varepsilon} = \text{bezwymiarowe}$$

$$\left.\begin{aligned} T&: -1-2\beta-2\varepsilon = 0 \quad (*) \\ M&: \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ L&: -3\gamma+3\delta+\varepsilon = 0 \quad (**) \end{aligned}\right\}$$

Jako parametry zostawiam wykładnik ε i δ, a pozostałe wyznaczam.

$(*)$ $\beta = -\frac{1}{2} - \varepsilon$, $(**)$ $\gamma = \delta - \frac{\varepsilon}{3}$

$$\alpha = -\beta-\gamma = \frac{1}{2} + \varepsilon - \delta + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{1}{2} - \delta + \frac{4}{3}\varepsilon$$

$$\omega m^\alpha k^\beta \rho^\gamma V^\delta g^\varepsilon = \underbrace{\left(\frac{\omega m^{1/2}}{k^{1/2}}\right)}_{\pi_1} \underbrace{\left(\frac{\rho V}{m}\right)}_{\pi_2}{}^{\delta} \underbrace{\left(\frac{m^{4/3} g}{k \rho^{1/3}}\right)}_{\pi_3}{}^{\varepsilon}$$

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0 \Rightarrow \pi_1 = f(\pi_2, \pi_3)$$

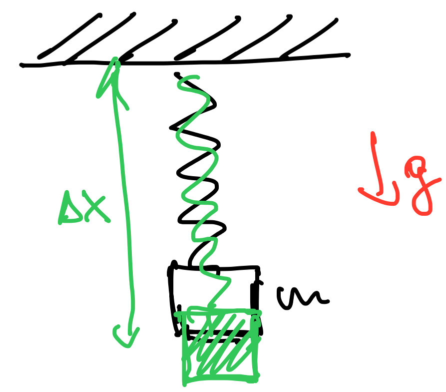
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\, f\Big(\underbrace{\frac{\rho V}{m}}_{1}, \frac{m^{4/3} g}{k \rho^{1/3}}\Big)$$

to efektywnie opisuje przesunięcie położenia równowagi

$$\rho = \frac{m}{V}$$

1°) Pamiętać należy, że niektóre wielkości są ze sobą związane (nie są niezależne)

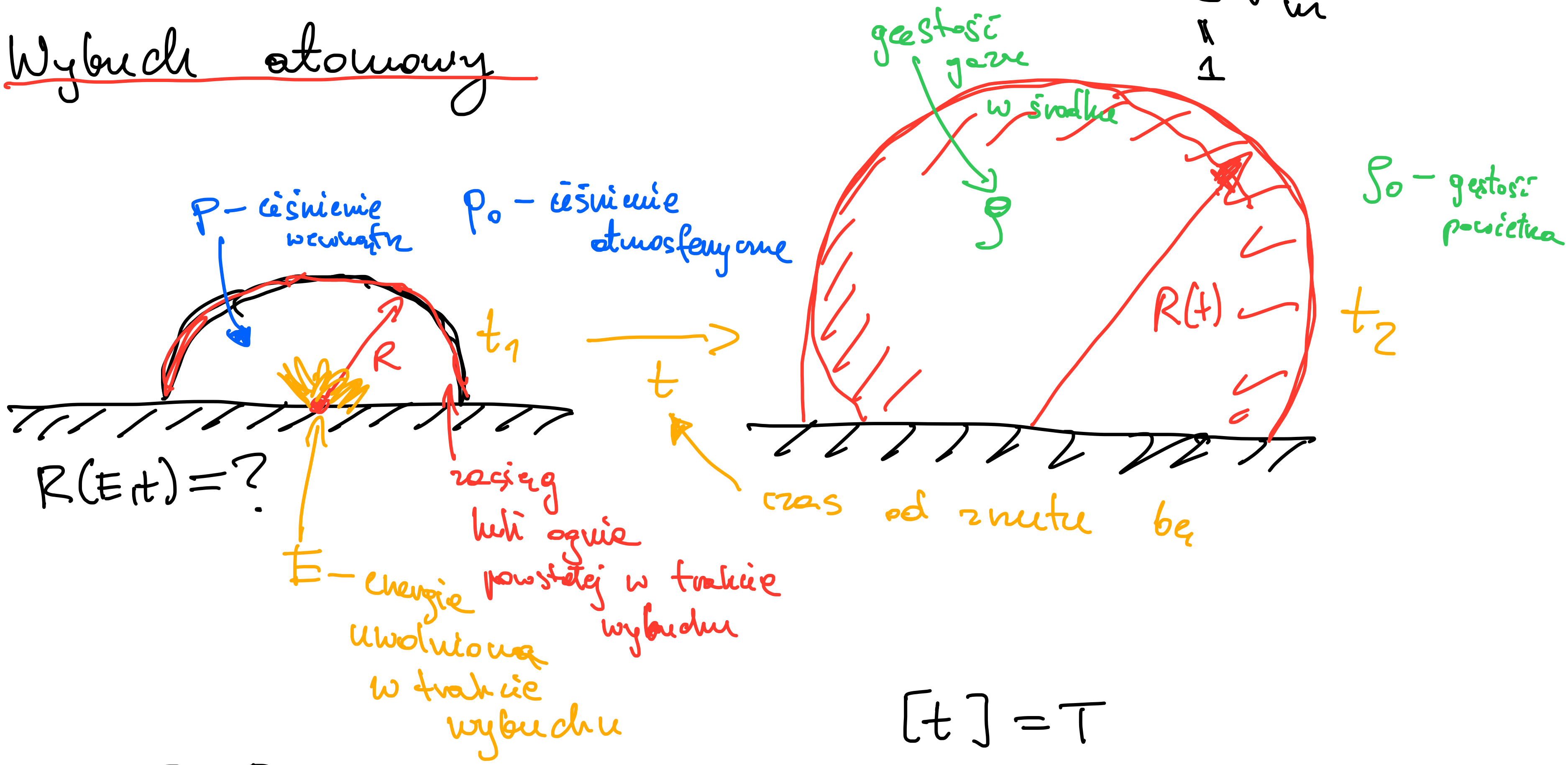
Wpływ g na wahadło polega tylko na przesunięciu jego położenia równowagi.



2°) Korzystamy z naszej intuicji fizycznej, która powinna podpowiedzieć nam, który parametr jest istotny.

Jako wniosek dostajemy, że $\omega = \underbrace{\text{stała}}_{\text{bezwymiarowa}} \sqrt{\frac{k}{m}} = C\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}$, $C \approx 1$

Wybuch atomowy



$[t] = T$

$[R] = L$

$[\rho] = [\rho_0] = M/L^3$

$[p] = [p_0] = \frac{ML}{T^2}\cdot\frac{1}{L^2} = \frac{M}{T^2 L}$

$p = \frac{F}{S}$

$[E] = \frac{ML}{T^2}\cdot L = \frac{ML^2}{T^2}$

$E = F\cdot x$

$N_d = 3 \qquad N_v = 7 \qquad N_\pi = 4$

nietrywialne kombinacje

$\Pi_3 = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \Pi_4 = \frac{p_0}{p}$

$$\left[R E^{\alpha} t^{\beta} \rho_0^{\gamma} p_0^{\delta}\right] = L \left(\frac{ML^2}{T^2}\right)^{\alpha} T^{\beta} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{\gamma} \left(\frac{M}{T^2 L}\right)^{\delta} =$$

$$= L^{1+2\alpha-3\gamma-\delta}\, T^{-2\alpha+\beta-2\delta}\, M^{\alpha+\gamma+\delta} = \text{bezwym.}$$

traktujemy jak parametr

$L: \quad 1+2\alpha-3\gamma-\delta=0$

$T: \quad -2\alpha+\beta-2\delta=0$

$M: \quad \alpha+\gamma+\delta=0 \Rightarrow \alpha=-\gamma-\delta$

Dodaję równanie L do równania M, wtedy:

$$1+2\alpha-3\gamma-\cancel{\delta}+\alpha+\gamma+\cancel{\delta}=0 \Rightarrow 1+3\alpha-2\gamma=0$$

$$1+3(-\gamma-\delta)-2\gamma = = 1-5\gamma-3\delta=0$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{5}-\frac{3}{5}\delta$$

$$\alpha=-\gamma-\delta=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\delta-\frac{5}{5}\delta=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\delta$$

$$\Rightarrow \alpha=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\delta$$

$$-2\left(-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\delta\right)+\beta-2\delta=0$$

$$\Rightarrow \beta=+2\delta+2\left(-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\delta\right)=\overset{\frac{10}{5}\delta}{2\delta}-\frac{2}{5}-\frac{4}{5}\delta=\frac{6}{5}\delta-\frac{2}{5} \Rightarrow \beta=\frac{6}{5}\delta-\frac{2}{5}$$

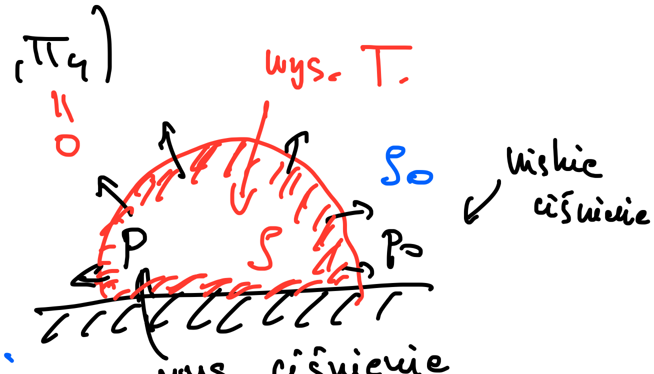
$$\underbrace{\left(R\left(\frac{Et^2}{\rho_0}\right)^{-1/5}\right)}_{\Pi_1}\underbrace{\left(\frac{p_0^{5}t^{6}}{E^2\rho_0^{-3}}\right)^{\frac{1}{5}\delta}}_{\Pi_2} = \text{bezwymiarowe}$$

$$F(\Pi_1,\Pi_2,\Pi_3,\Pi_4)=0 \Rightarrow \Pi_1=f(\Pi_2,\underset{=0}{\Pi_3},\underset{=0}{\Pi_4})$$

Możemy to równanie jeszcze uprościć:

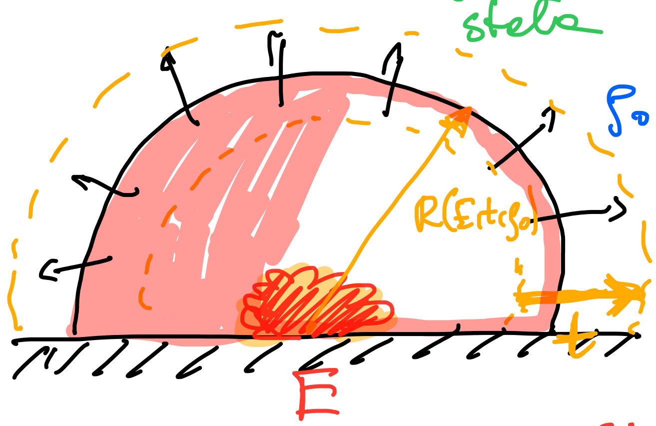
$\Pi_4=\frac{p_0}{p}\simeq 0$, bo $p \gg p_0$

$\Pi_3=\frac{\rho}{\rho_0}\simeq 0$, bo $\rho_0 \gg \rho$ ← bardzo wys. temperatura.



$$\Pi_2 = \frac{p_0^5 t^6 \rho_0^3}{E^2} \simeq 0, \quad \text{bo } E \text{ jest gigantyczna}$$

$$\Pi_1 = \underbrace{f(0,0,0)}_{\text{bezwymiarowa stała}} \implies R(t,E) = \left(\frac{E t^2}{\rho_0}\right)^{1/5} \cdot \text{const.}$$



$R(E,t,\rho_0) \sim E^{1/5}\, t^{2/5}\, \rho_0^{-1/5}$

R rośnie wraz z t

R rośnie wraz z E

$$R \sim E^{1/5}$$

R maleje wraz z ρ_0