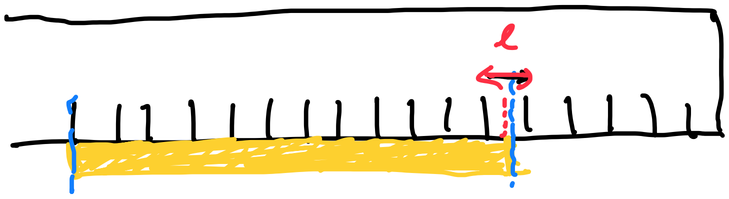
Koło olimpijskie – klasa II 7.11.2020

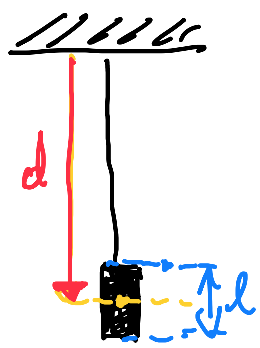
#4. Rachunek niepewności pomiarowej



$$\Delta x = \frac{\ell}{2\sqrt{3}}$$

Linijka z podziałką co 1mm:

$$\Delta x = \frac{1\,\text{mm}}{2\sqrt{3}} = \ldots$$



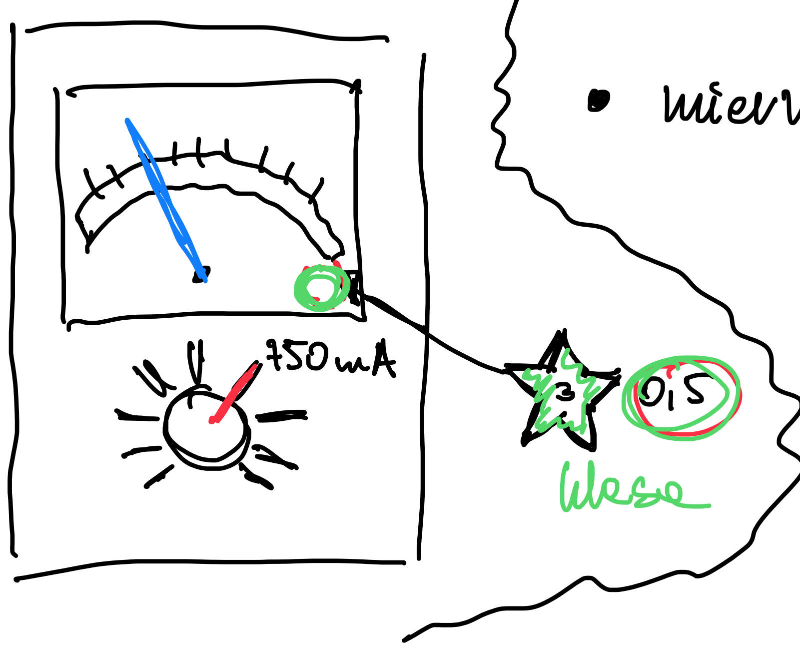
długość wahadła wynosi:

$$d \pm \frac{\ell}{2\sqrt{3}}$$

W przypadku mierników elektrycznych (multimetry, woltomierze, amperomierze)

Nie ma żadnej elektroniki

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{C \cdot \text{zakres}}{100}, \quad C \text{ – klasa urządzenia}$$



- mierniki cyfrowe

podane przez producenta

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{C_1 x + C_2 \cdot \text{zakres}}{100}$$

wielkość mierzona

po prostu zakres ustawiony na urządzeniu

Co zrobić, gdy w moim problemie występuje zarówno błąd związany z serią pomiarową (typ A) oraz niepewnością urządzenia pomiarowego (typ B)?

$$\boxed{\Delta X_{\text{całk.}} = \sqrt{\underbrace{(\Delta X_A)^2}_{\text{niepewność typu A}} + \underbrace{(\Delta X_B)^2}_{\text{niepewność typu B}}}}$$

Wyznaczyć wartość przyspieszenia grawitacyjnego:

ten jest najlepszy jako punkt początkowy

ten punkt generuje największą niepewność jeżeli wybiera się go jako punkt początkowy

• jeżeli uśredniamy dany punkt pomiarowy po 10 okresach popełniamy błąd rozłoży się równomiernie na te 10 okresów.

• Głównym źródłem niepewności jest czas reakcji eksperymentatora

Zakładamy, że niepewność związana z długością wahadła jest pomijalna:

$$l = 47\,cm = 0{,}47\,m$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

l.p.	$10T$, s	T, s	$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$, $\frac{m}{s^2}$
1	13,8	1,38	9,74
2	13,6	1,36	10,03
3	13,7	1,37	9,89
4	13,8	1,38	9,74
5	13,6	1,36	10,03
6	13,7	1,37	9,89
7	13,9	1,39	9,60

Liczymy wartość średnią:

$$\bar{g} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i = \frac{1}{7}\left(2\cdot 9{,}74 + 2\cdot 10{,}03 + 2\cdot 9{,}89 + 9{,}6\right)\frac{m}{s^2} = \underline{9{,}85\,\frac{m}{s^2}}$$

Liczymy odchylenie standardowe $\bar{g}$:

$$s(\bar{g}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(g_i-\bar{g})^2} = \left[\frac{1}{7\cdot 6}\left\{2\cdot(9{,}74-9{,}85)^2 + 2\cdot\underbrace{(10{,}03-9{,}85)^2}_{(0{,}18)^2 \simeq 0{,}032} + 2\cdot\underbrace{(9{,}89-9{,}85)^2}_{(0{,}04)^2 \simeq 1{,}6\cdot 10^{-3}} + (9{,}6-9{,}85)^2\right\}\right]^{1/2}\frac{m}{s^2} =$$

$$= 0{,}06\ \frac{m}{s^2}$$

nie rzeczywista wartość g

$$g = \bar{g} \pm k \cdot s(\bar{g})$$

Przyjmiemy, że $k=2$, czyli g_R mieści się w granicach $[\bar{g} - 2\cdot s(\bar{g}),\ \bar{g} + 2 s(\bar{g})]$ z prawdopodobieństwem 95,5%.

$$g = (9{,}85 \pm 0{,}12)\ \frac{m}{s^2}$$

W moim przypadku mierzę bezpośrednio czas drgań.

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \qquad g(T) = \frac{const}{T^2}$$

wielkość złożona

małe w porównaniu z $\bar{g}$

$$\frac{\Delta g}{\Delta T} = \left(\frac{dg}{dT}\right)^2 \Longrightarrow \boxed{\Delta g = \left(\frac{dg}{dT}\right)_{T=\bar{T}} \Delta T} \ \leftarrow !$$

małe w porównaniu z $\bar{T}$

prawo propagacji niepewności pomiarowej

$$g(T) = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \xrightarrow{\substack{T=\bar{T}+\Delta T \\ \varepsilon=\frac{\Delta T}{\bar{T}} \ll 1}} g(\bar{T}+\Delta T) = \frac{4\pi^2 l}{\bar{T}^2\left(1+\underbrace{\frac{\Delta T}{\bar{T}}}_{\varepsilon \ll 1}\right)^2}$$

Rozwijam $g(\bar{T}+\Delta T)$ w szereg Taylora:

$$g(\bar{T}+\Delta T) = \frac{4\pi^2 l}{\bar{T}^2}(1+\varepsilon)^{-2} = \frac{4\pi^2 l}{\bar{T}^2}\left((1+0)^{-2} + \frac{1}{1!}\underbrace{\left[(1+\varepsilon)^{-2}\right]'\Big|_{\varepsilon=0}}_{-2(1+\varepsilon)^{-3}\big|_{\varepsilon=0}\cdot 1} \cdot \varepsilon + \dots\right) =$$

rozwijam w $\varepsilon = 0$

$$= \underbrace{\frac{4\pi^2 l}{\bar{T}^2}}_{\bar{g}} + \underbrace{(-2)\frac{4\pi^2 l}{\bar{T}^2}\frac{\Delta T}{\bar{T}}}_{\pm \Delta g} + \dots = \frac{4\pi^2 l}{\bar{T}^2} \pm \frac{8\pi^2 l}{\bar{T}^3}\Delta T + \dots$$

znak!

$$\bar{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} T_i = 1{,}37 \text{ s}$$

$$s(\bar{T}) = \sqrt{\frac{1}{7\cdot 6}\sum_{i=1}^{7}(T_i - \bar{T})^2} = 4{,}36\cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$T = \bar{T} + \underbrace{2\cdot s(\bar{T})}_{\Delta T} = (1{,}37 \pm 8{,}7\cdot 10^{-3}) \text{ s}$$

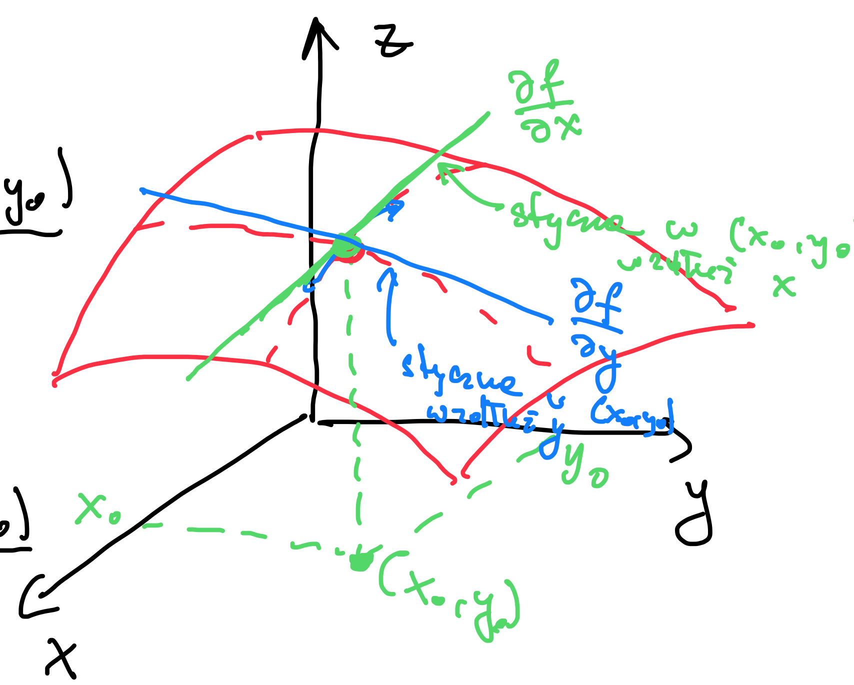
$$\bar{g} = \frac{4\pi^2 l}{\bar{T}^2} = 9{,}89 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\Delta g = \frac{8\pi^2 l}{\bar{T}^3}\Delta T = 0{,}13 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$g = (9{,}89 \pm 0{,}13)\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Pochodne cząstkowe

$$z = f(x,y)$$



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

pochodna wzdłuż kierunku x

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

pochodne wzdłuż kierunku y

Jest to zwykła pochodna jednowymiarowa przy założeniu, że druga zmienna jest stała.

Przykład: $f(x,y) = xy^3 + x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^3 + 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2x$$

Prawo propagacji niepewności pomiarowej:

Chcemy wyznaczyć niepewność pomiaru złożonej wielkości:

$$y(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N)$$

Wykonujemy pomiary $x_1, x_2, \ldots, x_N$ towarzyszą im niepewności pomiaru $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_N$, wtedy niepewność pomiaru Δy wynosi

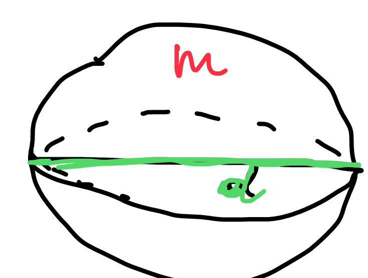
$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\bar{x}_i} \Delta x_i \right]^2}$$

bierzemy kwadrat, aby niepewność była maksymalna

Przykład:

Mierzę gęstość kuli:

- wykonuję pomiar linijką o skali co 1mm (typ B)
- ważę kulę wagą o skali, co 0,01 g. (typ B)



$$d = \left(12{,}2 \pm \frac{0{,}1}{\sqrt{3}}\right)\text{cm} = (12{,}200 \pm 0{,}058)\,\text{cm}$$

$$m = \left(7{,}48 \pm \frac{0{,}01}{\sqrt{3}}\right)\text{g} = (7{,}480 \pm 0{,}0058)\,\text{g}$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3} = \frac{6m}{\pi d^3}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{6}{\pi d^3} = 1{,}3594\ \text{cm}^{-3} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial d} = -\frac{18m}{\pi d^4} = -27{,}2366\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^4}$$

$$\Delta \rho = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m}\Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial d}\Delta d\right)^2} = 0{,}158\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$\rho = (7{,}87 \pm 0{,}16)\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

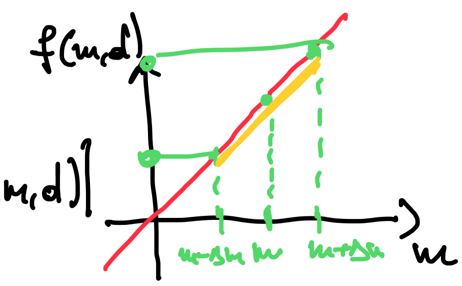
$$\delta\rho = \frac{\Delta\rho}{\rho} = 0{,}02 = 2\%$$

Jak policzyć (oszacować wartości) pochodne bez liczenia pochodnych?

$$\rho = f(m,d) = \frac{6m}{\pi d^3}$$

Niepewność pomiaru $\Delta_m \rho$ związana z niepewnością pomiaru masy wynosi:

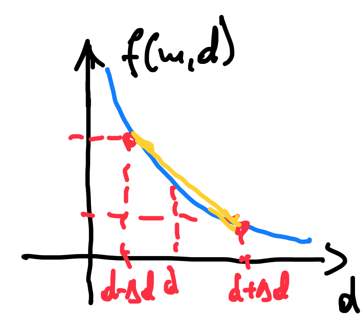
$$\frac{\partial \rho}{\partial m} = \cancel{\lim_{\Delta m \to 0}} \frac{f(m+\Delta m, d) - f(m,d)}{\Delta m} \simeq \frac{1}{2} \frac{|f(m+\Delta m,d) - f(m-\Delta m,d)|}{\Delta m}$$



$$\Delta_m \rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial m}\right)\Delta m = \frac{1}{2}|f(m+\Delta m,d) - f(m-\Delta m,d)|$$

Niepewność $\Delta_d \rho$ związana z pomiarem średnicy:

$$\Delta_d \rho = \frac{1}{2}|f(m, d+\Delta d) - f(m, d-\Delta d)|$$



W naszym przypadku:

$$\Delta_m \rho = \frac{1}{2}\left|\frac{6(m+\Delta m)}{\pi d^3} - \frac{6(m-\Delta m)}{\pi d^3}\right| = 0{,}0061 \frac{g}{cm^3}$$

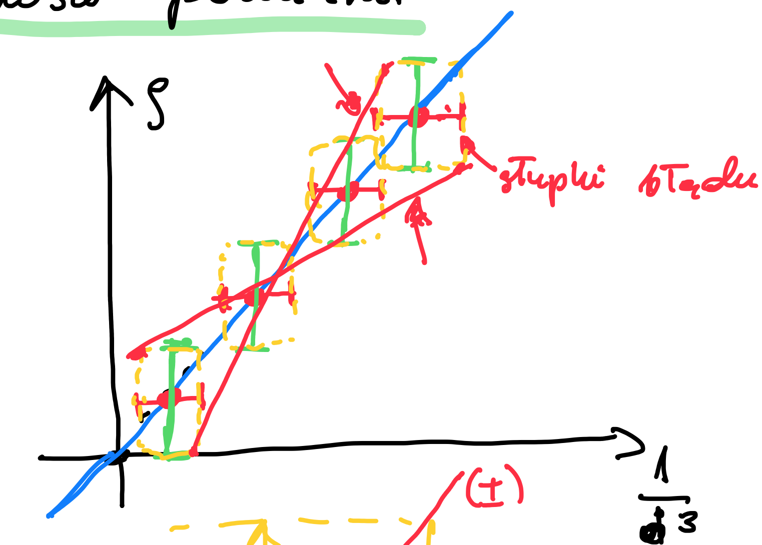
$$\Delta_d \rho = \frac{1}{2}\left|\frac{6m}{\pi(d+\Delta d)^3} - \frac{6m}{\pi(d-\Delta d)^3}\right| = 0{,}1122 \frac{g}{cm^3}$$

$$\Delta \rho = \sqrt{(\Delta_m \rho)^2 + (\Delta_d \rho)^2} = 0{,}1124 \frac{g}{cm^3}$$

$$\delta \rho = \frac{\Delta \rho}{\rho} = 1{,}4\%$$

Graficzne szacowanie niepewności pomiaru:

$$\rho(d) = \frac{6m}{\pi d^3}$$

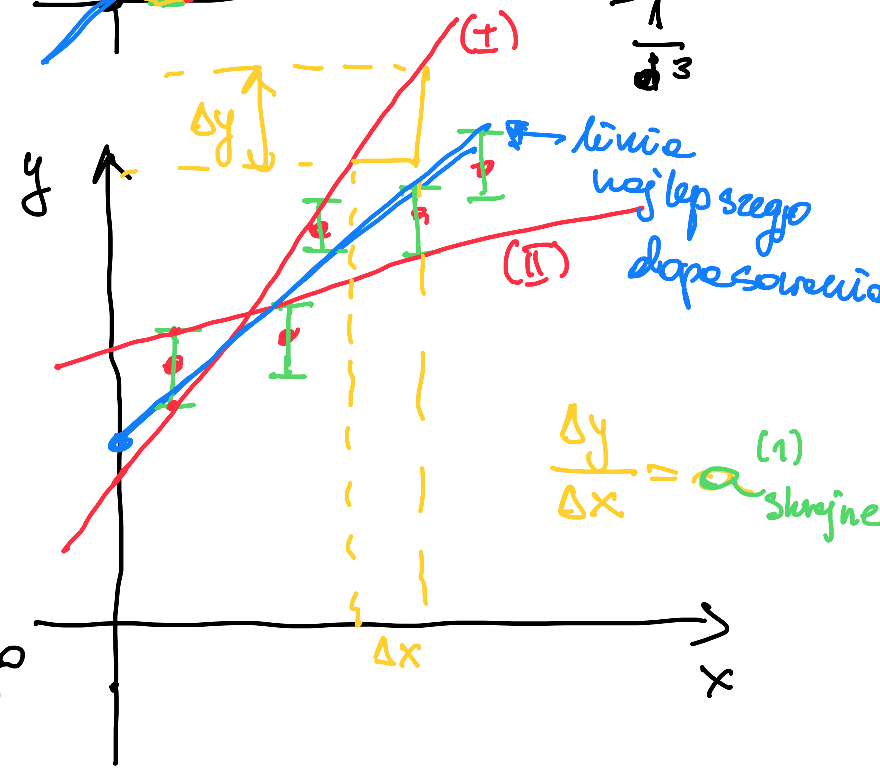


Powiedzmy, że mam relację

$$y = a x + b$$

parametr kontrolny

mierzę y w funkcji x



Wartość a jest dana nachyleniem linii najlepszego dopasowania, a błąd szacujemy jako:

$$\Delta a = \frac{1}{2}\left| a_{max} - a_{min} \right|$$

skrajne linie I

skrajne linie II