

MECHANIKA KWANTOWA II B SERIA IV 20.12.2018

1) Mamy pokazać, że $\theta(t-t') = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{-ix(t-t')}}{x+i0^+}$
 Rozpatrujemy $f_\varepsilon(z) = \frac{e^{-iz(t-t')}}{z+i\varepsilon}$, $z \in \mathbb{C}$; $\varepsilon > 0$

$f_\varepsilon(z)$ ma biegun I-go stopnia w $z = -i\varepsilon$.

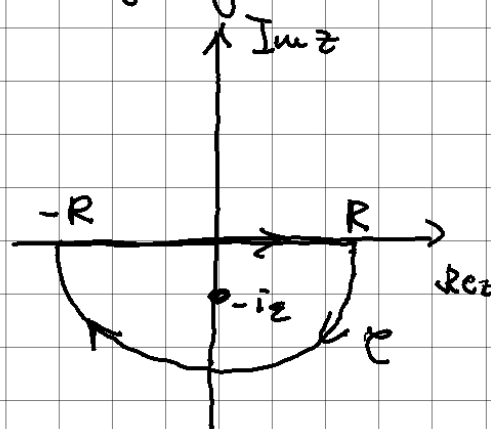
1.) Rozpatrujemy $t-t' > 0$. Scałkujemy

$f_\varepsilon(z)$ po konturze $\mathcal{C}$:

$$\oint_{\mathcal{C}} f_\varepsilon(z) dz = \underbrace{\int_{-R}^R dx \frac{e^{-ix(t-t')}}{x+i\varepsilon}}_{I_1} +$$

$$+ \underbrace{\int_0^{-\pi} R d\varphi \frac{e^{-iR(\cos\varphi+i\sin\varphi)(t-t')}}{Re^{i\varphi} + i\varepsilon}}_{I_2}$$

$$|I_2| = \left| \int_0^\pi d\varphi \frac{e^{-iR\cos\varphi(t-t')} e^{-R\sin\varphi(t-t')}}{e^{i\varphi} + i\frac{\varepsilon}{R}} \right|$$



Moduł funkcji pod całką dąży do 0 dla dowolnego $\varphi \in]0, \pi[$, gdy $R \rightarrow \infty$. Całka jest po zbiorze ograniczonym $]0, \pi[$, czyli $I_2 \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$.

a zatem

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C f_\varepsilon(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix(t-t')}}{x+i\varepsilon} = 2\pi i \operatorname{Res}_{x=-i\varepsilon} f_\varepsilon(z) =$$

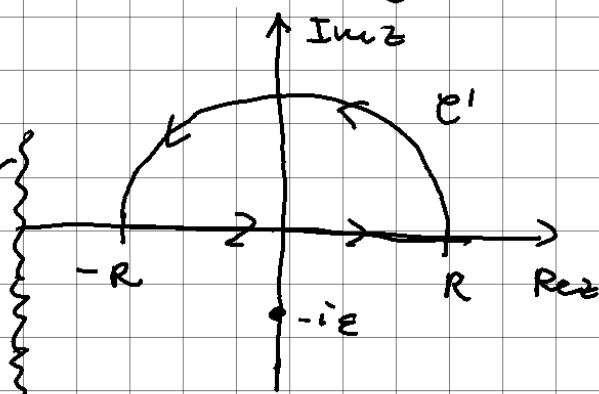
$$= -2\pi i e^{-i(-i\varepsilon)(t-t')} = -2\pi i e^{-\varepsilon(t-t')} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} -2\pi i,$$

czyli w granicy $\varepsilon \rightarrow 0^+$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{-ix(t-t')}}{x+i0^+} = -2\pi i$$

2°) Rozpatrzmy $t-t' < 0$. Czekamy $f_\varepsilon(z)$ po konturze γ' :

Gdybyśmy wybrali konturę γ w tym przypadku całka po półokreśle by rozbiegała



Mamy:

$$\oint_{\gamma'} f_\varepsilon(z) dz = \int_{-R}^R dx \frac{e^{-ix(t-t')}}{x+i\varepsilon} + \int_0^\pi d\varphi R \frac{e^{iR(\cos\varphi + i\sin\varphi)(t-t')}}{Re^{i\varphi} + i\varepsilon}$$

Druga całka znikła analogicznie jak w przypadku 1°), więc

$$\oint_{\gamma'} f_\varepsilon(z) dz = 0, \quad \text{z drugiej strony}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}} f_{\varepsilon}(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{-ix(t-t')}}{x+i\varepsilon},$$

$$\text{zatem} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{-ix(t-t')}}{x+i0^+} = 0 \quad \text{dla } t-t' < 0,$$

$$\text{czyli} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{-ix(t-t')}}{x+i0^+} = \begin{cases} \frac{2\pi}{i}, & t-t' > 0 \\ 0, & t-t' < 0 \end{cases} = \frac{2\pi}{i} \theta(t-t')$$

② Przy cechowaniu Coulomba ($\varphi=0, \vec{\nabla} \cdot \vec{A}=0$)

używamy:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{\omega_k \hat{e}_k}{\sqrt{\omega_k}} \left[a_{k\alpha} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - a_{k\alpha}^+ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right]$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = i \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{c \vec{k} \times \hat{e}_k}{\sqrt{\omega_k}} \left[a_{k\alpha} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - a_{k\alpha}^+ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right],$$

gdzie $\vec{k}\cdot\vec{r} = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t$.

Ewolucja czasowa operatorów $\vec{E}$ i $\vec{B}$

można przenieść na operatory kreacji

i anihilacji:

$$i\hbar \dot{a}_{k\alpha} = [a_{k\alpha}, \hat{H}] = [a_{k\alpha}, \hbar\omega_k a_{k\alpha}^+ a_{k\alpha}] = \hbar\omega_k a_{k\alpha}$$

$$i\hbar \dot{a}_{k\alpha}^+ = [a_{k\alpha}^+, \hat{H}] = -\hbar\omega_k a_{k\alpha}^+$$

$$\Rightarrow a_{k\alpha}(t) = a_{k\alpha}(0) e^{-i\omega_k t}$$

$$a_{k\alpha}^+(t) = a_{k\alpha}^+(0) e^{+i\omega_k t}$$

$$\vec{G} = \int d^3r \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{4\pi c} = \frac{i^2}{4\pi c} \frac{hc}{V} \sum_{k\omega} \sum_{k'\omega'} [\hat{e}_\alpha \times (\vec{k}' \times \hat{e}_{\alpha'})]$$

$$\cdot \int d^3r (a_{\mathbf{k}\alpha} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}) \cdot (a_{\mathbf{k}'\alpha'} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}} - a_{\mathbf{k}'\alpha'}^\dagger e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}}) =$$

$\{$ ortogonalności wektorów polaryzacji oraz $\}$
 $\{$ wektora fotonowego powoduje, że $\}$

$$[\hat{e}_{\alpha k} \times (\vec{k} \times \hat{e}_{\alpha' k'})] = \vec{k} \delta_{\alpha \alpha'} \delta_{kk'}$$

$$= \frac{\hbar c}{4\pi} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}', \alpha, \alpha'} \vec{k} \delta_{\alpha\alpha'} \left[(a_{\mathbf{k}\alpha} a_{\mathbf{k}'\alpha'}^\dagger + a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger a_{\mathbf{k}'\alpha'}) \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} + \right. \\ \left. - (a_{\mathbf{k}\alpha} a_{\mathbf{k}'\alpha'}^\dagger + a_{\mathbf{k}'\alpha'}^\dagger a_{\mathbf{k}\alpha}) \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'} \right] \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

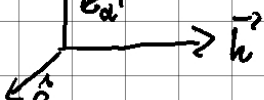
$$= \frac{\hbar c}{c_{II}} \sum_{\mathbf{k}\alpha} \vec{k} (a_{\mathbf{k}\alpha} a_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} + a_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} a_{\mathbf{k}\alpha}) = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \hbar c \vec{k} a_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} a_{\mathbf{k}\alpha}$$

człou odpowiadający punktowii zerowemu

poła EM ($t_{\text{em}} = \frac{1}{2}$) jest hasowny pnet
mody 0 $\vec{k}$ z tymi 0 $-\vec{k}$.

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

$$\hat{e}_{\alpha k} \times (\vec{k}' \times \hat{e}_{\alpha' k'}) = (\hat{e}_{\alpha k} \cdot \hat{e}_{\alpha' k'}) \vec{k}' - (\hat{e}_{\alpha k} \cdot \vec{k}') \hat{e}_{\alpha' k'} =$$

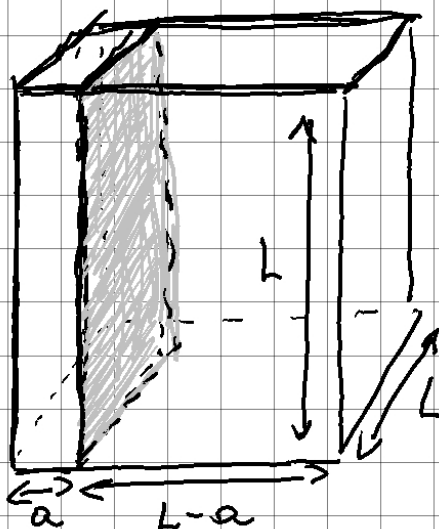
$$= \vec{k}' \delta_{\alpha \alpha'} \delta_{k k'}$$


③ Chcemy znaleźć

roznicę energii:

$$\Delta E = E_a + E_{L-a} - E_L$$

E_a energia pola w mniejszej wnęce
 E_{L-a} energia pola w większej wnęce
 E_L energia pola dla pustej bez dodatkowej ścianki



Przy czym $E = \langle E \rangle = \langle 0 | \hat{H}_{EM} | 0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}}$

Nakładamy warunki brzegowe Dirichleta,

tj. pole elektromagnetyczne ma mieć wartość

na powierzchni płyty, czyli:

$$k_i = \frac{n_i \pi}{L}, \quad i \in \{x, y\}, \quad k_z = \frac{n_z \pi}{a}$$

W próżni mamy: $\omega = ck$, czyli

$$E = \langle E \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \hbar c \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

Zakładając, że $a \ll L$ oraz $L \rightarrow \infty$ mamy:

$$E_L = \frac{2L^3}{\pi^3} \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \int_0^\infty dk_z \frac{1}{2} \hbar c \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

pole w szczelinie, fotoni

$$E_{L-a} = \frac{2L^2(L-a)}{\pi^3} \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \int_0^\infty dk_z \frac{1}{2} \hbar c \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

$$E_a = \sum_{n=0}^{\infty} 2\theta_n \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \frac{1}{2} \hbar c \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2},$$

gdzie $n_z \equiv n$, $\theta_n = 1$ dla $n > 0$ oraz $\theta_n = \frac{1}{2}$ dla $n = 0$ z powodu różnej liczby polaryzacji fotonu w tych przypadkach. Z fizycznego punktu widzenia powinniśmy wprowadzić pewną gładką funkcję obcięcia $f(k/k_c)$ taką, że:

$$f(k/k_c) \rightarrow 1 \quad \text{dla } k \ll k_c$$

$$\text{oraz } f(k/k_c) \rightarrow 0 \quad \text{dla } k \gg k_c$$

z powodu rozbieżności powyższej sumy i całości. Uzasadnieniem takiego

posunięcia jest wiedza o tym, że każdy przewodnik jest charakteryzowany przez częstość plazmową $\omega_p^2 = \frac{Nq^2}{m_e \epsilon_0}$,

która jest graniczną wartością częstości drgań elektronów w przewodniku.

Gdy częstość drgań pola EM $\omega > \omega_p$, wtedy układ nie jest w stanie na nie

odpowieścić i efektywnie stać się dla nich przezroczysty. Gdy $\omega < \omega_c$ elektrony nadeżają ze pola EM i powodują odbicie fali EM.

Mamy, więc

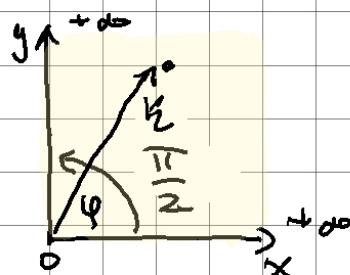
$$\Delta E = \hbar c \frac{L^2}{\pi^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n g_n\left(\frac{n\pi}{a}\right) - \frac{a}{\pi} \int_0^{\infty} g(k_z) dk_z \right],$$

gdzie

$$g(k_z) = \int_0^{\infty} dk_x \int_0^{\infty} dk_y f\left(\frac{k}{k_c}\right) \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

wprowadzając $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ mamy:

$$g(k_z) = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \sqrt{k_z^2 + k^2} f\left(\frac{\sqrt{k_z^2 + k^2}}{k_c}\right) k dk$$



Wprowadzając zmienne

kerwy miarowe: n i α : $k_z = \frac{n\pi}{a}$, $k = \frac{\alpha\pi}{a}$,

mamy:

$$g(k_z) = \frac{\pi}{2} \frac{\pi^3}{a^3} \int_0^{\infty} \sqrt{n^2 + \alpha^2} f\left(\frac{\pi \sqrt{n^2 + \alpha^2}}{k_c a}\right) \alpha d\alpha$$

ostatecznie podstawiając $\omega = n^2 + \alpha^2$ mamy:

$$g(k_z) = \frac{\pi^4}{4a^3} F(n),$$

gdzie $F(n) = \int_{n^2}^{\infty} \sqrt{\omega} f\left(\frac{\pi \sqrt{\omega}}{a k_c}\right) d\omega$,

czyli $\Delta E = \frac{\hbar c L^2 \pi^2}{4a^3} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n F(n) - \int_0^{\infty} F(n) dn \right]$

Stosujemy wzór Eulera-Maclaurina:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n F(n) - \int_0^{\infty} F(n) dn = -\frac{1}{6 \cdot 2!} F'(0) + \frac{1}{30 \cdot 4!} F'''(0) + \dots,$$

$$F'(n) = -2n^2 f\left(\frac{n^2 \pi}{k_c a}\right)$$

$$F'(0) = 0$$

$$F'''(0) = -4,$$

czyli

$$\Delta E = -\hbar c \frac{\pi^2}{720} \frac{L^2}{a^3}$$

Ostatecznie dostajemy uświenienie:

$$p = -\frac{1}{L^2} \frac{\partial \Delta E}{\partial a} = -\frac{\hbar c}{240} \frac{\pi^2}{a^4}.$$

4) $\hat{H} = \sum_{i=a,b} \varepsilon_i \hat{n}_i + \underbrace{\frac{t}{4} (\hat{n}_a - 3)(\hat{n}_b - 3)(a^\dagger b + b^\dagger a)(\hat{n}_a - 3)(\hat{n}_b - 3)}_{\text{hopp.}} + \sum_{i=a,b} U \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1)$

(a) $\varepsilon_i \hat{n}_i$ - energie potencjalna bozone na i -tym węzle

hopp. - hopping między węzłami z

dodatkowym warunkiem, że na danym węźle mieszczą się co najwyżej

3 bozony ($\hat{n}_i \leq 3$).

U $\hat{n}_i(\hat{n}_i-1)$ - oddzielnym powiędzy bozonami na danym węźle proporcjonalne do liczby oddzielających par $\hat{n}_i(\hat{n}_i-1)$.

Baza trójczłonowa:

$$|1\rangle = a^\dagger a^\dagger a^\dagger |0\rangle$$

$$|2\rangle = a^\dagger a^\dagger b^\dagger |0\rangle$$

$$|3\rangle = a^\dagger b^\dagger b^\dagger |0\rangle$$

$$|4\rangle = b^\dagger b^\dagger b^\dagger |0\rangle$$

(b) Macierz hamiltonianu ma wtedy postać:

$$H = \begin{pmatrix} 6U + 3\varepsilon_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(U + \varepsilon_a) + \varepsilon_b & t & 0 \\ 0 & t & 2(U + \varepsilon_b) + \varepsilon_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6U + 3\varepsilon_b \end{pmatrix}$$

Energie własne:

$$E_1 = 6U + 3\varepsilon_a \quad \leftarrow \text{odpowiada stanowi } |1\rangle$$

$$E_4 = 6U + 3\varepsilon_b \quad \leftarrow \text{odpowiada stanowi } |4\rangle$$

Pozostalo do zdiagnozowania:

$$\det \begin{bmatrix} h_1 - \lambda & t \\ t & h_2 - \lambda \end{bmatrix} = 0, \quad \text{gdzie}$$

$$h_1 = 2(U + \varepsilon_a) + \varepsilon_b \quad \text{oraz} \quad h_2 = 2(U + \varepsilon_b) + \varepsilon_a$$

$$(h_1 - \lambda)(h_2 - \lambda) - t^2 = 0 \Rightarrow E_{\pm} = (h_1 + h_2) \pm \sqrt{(h_1 - h_2)^2 + 4t^2}$$

$$(c) \quad 1^\circ \quad \varepsilon_a = \varepsilon_b = \varepsilon \quad \text{i} \quad t = 0$$

$$h_1 = 2U + 3\varepsilon = h_2$$

$$h_1 + h_2 = 4U + 6\varepsilon, \quad h_1 - h_2 = 0$$

$$\text{czyli} \quad E_+ = E_- = 4U + 6\varepsilon, \quad \text{czyli}$$

poziomy E_+ i E_- są zdegenerowane,

a ich wartości rosną liniowo z U .

Przy $t \neq 0$ znosi degenerację:

$$E_{+,-} = 4U + 6\varepsilon \pm |t|.$$

$$2^o) \quad \varepsilon_a \neq \varepsilon_b, \quad U=0$$

$$h_1 = 2\varepsilon_a + \varepsilon_b, \quad h_2 = 2\varepsilon_b + \varepsilon_a$$

$$h_1 + h_2 = 3(\varepsilon_a + \varepsilon_b), \quad h_1 - h_2 = \varepsilon_a - \varepsilon_b \equiv \Delta,$$

wtedy

$$E_{\pm} = 3(\varepsilon_a + \varepsilon_b) \pm \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + t^2} = 3(\varepsilon_a + \varepsilon_b) \pm \sqrt{\Delta^2 + t^2}$$

Niech $t \ll \Delta$, wtedy

$$\Delta \sqrt{1 + \left(\frac{t}{\Delta}\right)^2} \simeq \Delta \left(1 + \frac{t}{\Delta}\right) = \Delta + t$$

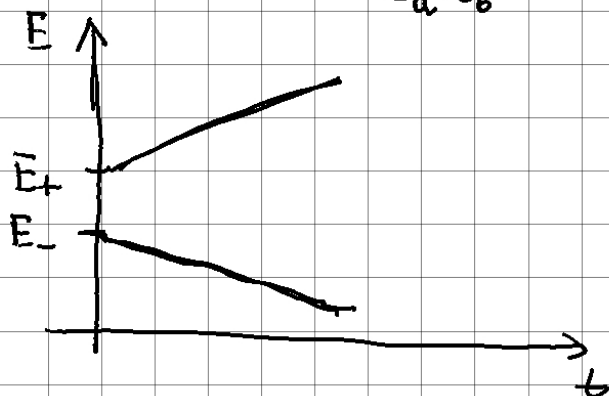
gdy $t \gg \Delta$:

$$t \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta}{t}\right)^2} \simeq t \left(1 + \frac{\Delta}{t}\right) = \Delta + t$$

granice
słabego
hoppingu
i dużego
rozszepienie
poziomych ε_a i ε_b
za równowagę

angli te same rozwinięcia, czyli

$$\bar{E}_{\pm} = 3(\varepsilon_a + \varepsilon_b) \pm \underbrace{\Delta}_{\varepsilon_a - \varepsilon_b} \pm t = \begin{cases} 2h_1 + t \\ 2h_2 - t \end{cases}$$



$$\textcircled{5} \quad \hat{H} = \underbrace{t \sum_{\sigma} [a_{1\sigma}^{\dagger} a_{2\sigma} + a_{2\sigma}^{\dagger} a_{1\sigma}]}_{\hat{H}_A} + \underbrace{U [\hat{n}_{1\uparrow} \hat{n}_{1\downarrow} + \hat{n}_{2\uparrow} \hat{n}_{2\downarrow}]}_{\hat{H}_U} + \underbrace{B \sum_{\sigma} S_{\sigma} [\hat{n}_{1\sigma} + \hat{n}_{2\sigma}]}_{\hat{H}_B}$$

(a) $t \sum_{\sigma} [a_{1\sigma}^{\dagger} a_{2\sigma} + a_{2\sigma}^{\dagger} a_{1\sigma}]$ - hopping atomami 1 i 2 między

$\sum_{i=1}^2 U \hat{n}_{i\uparrow} \hat{n}_{i\downarrow}$ - odpychanie kulombowskie pomiędzy elektronami na węzle i

$B \sum_{\sigma} S_{\sigma} [\hat{n}_{1\sigma} + \hat{n}_{2\sigma}]$ - oddziaływanie z polem magnetycznym (efekt Zeemana)

(b) Układ o powyższym hamiltonianie

zadawuje wartości spinu S oraz

kieru spinu na oś z S_z dla

danego stanu, bo $[\hat{H}, \hat{S}] = [\hat{H}, \hat{S}_z] = 0$

baza stanów (stany o określonym S, S_z):

$$|1\rangle = a_{1\uparrow}^{\dagger} a_{2\uparrow}^{\dagger} |0\rangle \quad (S=1, S_z=1)$$

$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{1\uparrow}^{\dagger} a_{2\downarrow}^{\dagger} + a_{1\downarrow}^{\dagger} a_{2\uparrow}^{\dagger}) |0\rangle \quad (S=1, S_z=0)$$

$$|3\rangle = a_{1\downarrow}^{\dagger} a_{2\downarrow}^{\dagger} |0\rangle \quad (S=1, S_z=-1)$$

$$|4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{1\uparrow}^{\dagger} a_{2\downarrow}^{\dagger} - a_{1\downarrow}^{\dagger} a_{2\uparrow}^{\dagger}) |0\rangle \quad (S=0, S_z=0)$$

$$|5\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{1\uparrow}^{\dagger} a_{1\downarrow}^{\dagger} + a_{2\uparrow}^{\dagger} a_{2\downarrow}^{\dagger}) |0\rangle \quad (S=0, S_z=0)$$

$$|6\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{1\uparrow}^{\dagger} a_{1\downarrow}^{\dagger} - a_{2\uparrow}^{\dagger} a_{2\downarrow}^{\dagger}) |0\rangle \quad (S=0, S_z=0)$$

Działając tymi stanami na hamiltonian

mamy:

$$\hat{H}_B |1\rangle = B |1\rangle, \quad \hat{H}_B |3\rangle = -B |3\rangle \quad - \text{rozszczepienie Zeemana } (S_z = 1 \text{ i } S_z = -1)$$

$$\hat{H}_B |2\rangle = \hat{H}_B |4\rangle = \hat{H}_B |5\rangle = \hat{H}_B |6\rangle = 0 \quad - \text{stany o } S_z = 0$$

$$\hat{H}_u |1\rangle = \hat{H}_u |2\rangle = \hat{H}_u |3\rangle = \hat{H}_u |4\rangle = 0 \quad - \text{stany z elektronami na różnych atomach}$$

$$\hat{H}_u |5\rangle = u |5\rangle,$$

$$\hat{H}_u |6\rangle = u |6\rangle \quad - \text{podwójnie obsadzone atomy}$$

$$\hat{H}_t |1\rangle = \hat{H}_t |6\rangle = 0 \quad - \text{przeskok hamiltonianu ze stanu Pauliego oraz hamiltonianu z adwinywania } S_z$$

$$\hat{H}_t |2\rangle = t \sum_{\sigma} [a_{1\sigma}^{\dagger} a_{2\sigma} + a_{2\sigma}^{\dagger} a_{1\sigma}] \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{1\downarrow}^{\dagger} a_{2\uparrow}^{\dagger} + a_{1\uparrow}^{\dagger} a_{2\downarrow}^{\dagger}) |0\rangle =$$

$$= \frac{t}{\sqrt{2}} (-a_{1\downarrow}^{\dagger} a_{1\uparrow}^{\dagger} - a_{1\uparrow}^{\dagger} a_{1\downarrow}^{\dagger} + a_{2\uparrow}^{\dagger} a_{2\downarrow}^{\dagger} + a_{2\downarrow}^{\dagger} a_{2\uparrow}^{\dagger}) |0\rangle = 0$$

$$\text{Analogicznie dla } \hat{H}_t |6\rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_t |4\rangle &= t \sum_{\sigma} [a_{1\sigma}^{\dagger} a_{2\sigma} + a_{2\sigma}^{\dagger} a_{1\sigma}] \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{1\uparrow}^{\dagger} a_{2\downarrow}^{\dagger} - a_{1\downarrow}^{\dagger} a_{2\uparrow}^{\dagger}) |0\rangle = \\ &= \frac{2t}{\sqrt{2}} [a_{1\uparrow}^{\dagger} a_{2\downarrow}^{\dagger} - a_{1\downarrow}^{\dagger} a_{2\uparrow}^{\dagger}] |0\rangle = 2t |5\rangle \end{aligned}$$

$$\hat{H}_t |5\rangle = 2t |4\rangle \quad - \text{hermitowskość hamiltonianu}$$

Macierz hamiltoniana ma wtedy postać:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow [\hat{H}, \hat{S}_z] = 0 \\ \leftarrow [\hat{S}_z, \hat{H}] = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2t & 0 \\ 2t & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

(c) Energie własne:

$$E_1 = B, E_2 = 0, E_3 = -B, E_4 = u, E_{\pm} = \frac{u}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{4t}{u} \right)^2} \right)$$

W granicy silnie oddziaływających cząstek ($t \ll u$) mamy:

$$E_{\pm} = \frac{u}{2} \left(1 \pm \left(1 + \frac{8t^2}{u^2} \right) \right) = \begin{cases} u + \frac{4t^2}{u}, & "+" \\ -\frac{4t^2}{u}, & "-" \end{cases}$$

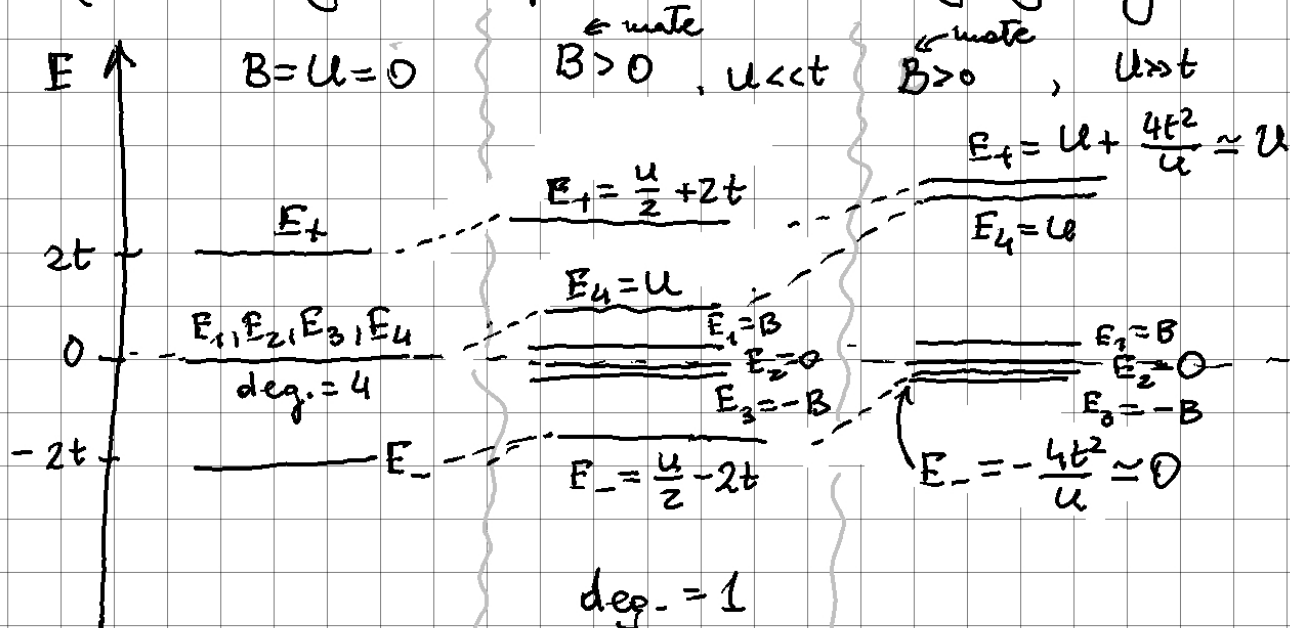
rozwijamy $\sqrt{\dots}$ dla t/u

W granicy słabych oddziaływań / duża mobilność ($t \gg u$) mamy:

$$E_{\pm} = \frac{u}{2} \pm 2t \left(1 + \frac{u^2}{16t^2} \right) = \begin{cases} \frac{u}{2} + 2t, & "+" \\ \frac{u}{2} - 2t, & "-" \end{cases}$$

rozwijamy $\sqrt{\dots}$ dla u/t

(d) Diagram poziomów energetycznych:



Stany o E_1, E_2 i E_3 wykazują efekt Zeemana.

W granicy $U \gg t$ stany o E_- i E_2

oraz E_+ i E_4 są niemalże zdegenerowane.

(6) (a) Wstawiając $\rho_+(\vec{r}) = N/\Omega$ daje

$$\hat{H}_{b-b} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{N}{\Omega}\right)^2 \int d^3r' \int d^3r \frac{e^{-\mu|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}.$$

Dla skończonej wartości μ całka ma skończoną wartość w granicy $\Omega \rightarrow \infty$. Wykonujemy

zamianę zmiennych $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{b-b} &= \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{N^2}{\Omega^2} \int d^3R \frac{e^{-\mu|\vec{R}|}}{|\vec{R}|} \int d^3r' = \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{N^2}{\Omega} 4\pi \int_0^\infty dR R^2 \frac{e^{-\mu R}}{R} = \end{aligned}$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} \frac{1}{2} \frac{e^2}{\epsilon_0} \frac{N^2}{\Omega} \cdot \underbrace{\frac{1}{\mu^2} \int_0^\infty dx x e^{-x}}_1 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{\epsilon_0 \mu^2} \frac{N^2}{\Omega}$$

$x = \mu R$

Analogicznie:

$$\hat{H}_{d-b} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{N}{\Omega} \sum_i \int d^3r \frac{e^{-\mu|\vec{r}-\vec{r}_i|}}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{N}{\Omega} \underbrace{\int d^3R \frac{e^{-\mu R}}{R}}_{4\pi/\mu^2} = -\frac{e^2}{\epsilon_0 \mu^2} \frac{N^2}{\Omega}$$

wyłą

$$\hat{H}_{b-b} + \hat{H}_{el-b} = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{\epsilon_0 \mu^2} \frac{N^2}{\Omega}$$

(b) Wybieramy oś z wzdłuż $\vec{q}$, wtedy

$$v_{\vec{q}} = \int d^3r v(\vec{r}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r \frac{e^{-\mu|\vec{r}| - i\vec{q}\cdot\vec{r}}}{|\vec{r}|} =$$

$$= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dr r e^{-\mu r} \underbrace{\int_{-1}^1 d(\cos\theta) e^{-iqr\cos\theta}}_{\frac{1}{iqr} (e^{iqr} - e^{-iqr})} =$$

$\alpha = \mu/q$

$$\downarrow = \frac{e^2}{2iq^2\epsilon_0} \underbrace{\int_0^\infty dx \left[e^{(-\alpha+i)x} - e^{(-\alpha-i)x} \right]}_{2i/(1+\alpha^2)} = \frac{e^2}{\epsilon_0(q^2 + \mu^2)}$$

$$(c) \hat{H}_{el-el} = \frac{1}{2\Omega} \sum_{\vec{q}} \sum_{\vec{k}\sigma} \sum_{\vec{k}'\sigma'} \frac{e^2}{\epsilon_0(q^2 + \mu^2)} C_{\vec{k}+\vec{q}\sigma}^\dagger C_{\vec{k}-\vec{q}\sigma'}^\dagger C_{\vec{k}'\sigma'} C_{\vec{k}\sigma}$$

(złon o $\vec{q}=0$ (tzw. wkład bezpośredni)

ma postać:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{el-el}^{q=0} &= \frac{1}{2\Omega} \sum_{\vec{k}\sigma} \sum_{\vec{k}'\sigma'} \frac{e^2}{\epsilon_0 \mu^2} c_{\vec{k}\sigma}^\dagger \underbrace{c_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger c_{\vec{k}'\sigma'}}_{\hat{n}_{\vec{k}'\sigma'}} c_{\vec{k}\sigma} = \\
&\stackrel{1}{=} \frac{e^2}{2\Omega \epsilon_0 \mu^2} \sum_{\vec{k}\sigma} \sum_{\vec{k}'\sigma'} \left(\hat{n}_{\vec{k}'\sigma'} c_{\vec{k}\sigma}^\dagger - \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\sigma\sigma'} \hat{n}_{\vec{k}'\sigma'} \right) = \\
&[\hat{n}_{\vec{k}'\sigma'}, c_{\vec{k}\sigma}^\dagger] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\sigma\sigma'} c_{\vec{k}\sigma}^\dagger \qquad \hat{N} = \sum_{\vec{k}\sigma} \hat{n}_{\vec{k}\sigma} \\
&= \frac{e^2}{2\Omega \epsilon_0 \mu^2} \sum_{\vec{k}\sigma} \sum_{\vec{k}'\sigma'} \left(\hat{n}_{\vec{k}'\sigma'} \hat{n}_{\vec{k}\sigma} - \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\sigma\sigma'} \hat{n}_{\vec{k}'\sigma'} \right) \downarrow \\
&= \frac{e^2}{2\Omega \epsilon_0 \mu^2} \left(\hat{N}^2 - \hat{N} \right)
\end{aligned}$$

Ponieważ rozważamy stany wielocząstkowe

$|\Psi(N)\rangle$ będące stanami własnymi $\hat{N}$,

wiec
$$\hat{H}_{el-el}^{q=0} |\Psi(N)\rangle = \frac{e^2}{2\Omega \epsilon_0 \mu^2} (N^2 - N) |\Psi(N)\rangle,$$

wiec efektywnie hamiltonian $\hat{H}_{el-el}^{q=0}$ możemy traktować jak c-liczbę z operatorem $\hat{N}$

zastąpionym przez jego wartość własną N .

Drugi wkład na energię w $\hat{H}_{el-el}^{q=0}$ ma

postać:
$$-\frac{1}{2} \frac{e^2}{\epsilon_0 \mu^2 \Omega} \xrightarrow{\Omega \rightarrow \infty} 0,$$

wiec w granicy termodynamicznej zanika.

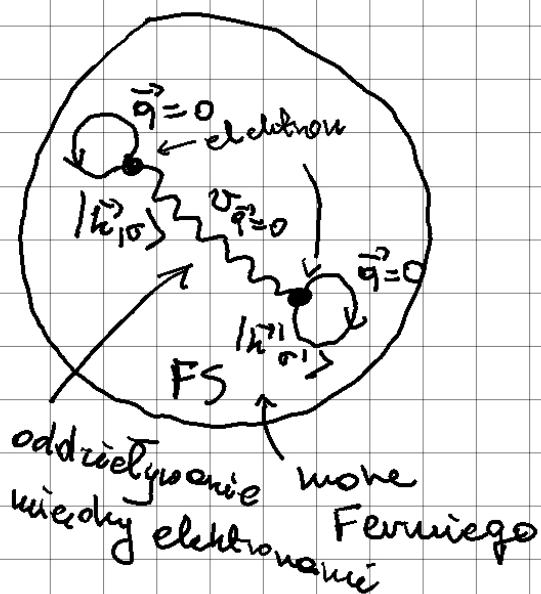
Otrzymujemy, więc

$$\hat{H}_I = \hat{H}_{el-el} + \hat{H}_{b-b} + \hat{H}_{el-b} = \hat{H}_{el-el}^{q \neq 0} =$$

$$= -\frac{1}{2\Omega} \sum_{\vec{q} \neq 0} \sum_{\vec{k}, \sigma} \sum_{\vec{k}', \sigma'} \frac{e^2}{\epsilon_0(q^2 + \mu^2)} C_{\vec{k}+\vec{q}, \sigma}^\dagger C_{\vec{k}-\vec{q}, \sigma'}^\dagger C_{\vec{k}', \sigma'} C_{\vec{k}, \sigma} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{2\Omega} \sum_{\vec{q} \neq 0} \sum_{\vec{k}, \sigma} \sum_{\vec{k}', \sigma'} \frac{e^2}{\epsilon_0 q^2} C_{\vec{k}+\vec{q}, \sigma}^\dagger C_{\vec{k}-\vec{q}, \sigma'}^\dagger C_{\vec{k}', \sigma'} C_{\vec{k}, \sigma}$$

Wyraz z $q=0$ zwany bezpośrednim (direct) można zilustrować diagramem.



Oznacza to, że wtedy $\vec{q}=0$ nie powoduje zmiany "liczby" elektronów w momencie Fermiego.

(d) Mamy

$$\frac{1}{n} = \frac{\Omega}{N} = \frac{4\pi}{3} r_0^3 = \frac{4\pi}{3} (r_s a_B)^3$$

Konstanta z wyniku z ćwiczeń $n = \frac{k_F^3}{3\pi^2}$

dostajemy:

$$k_F a_B = (3\pi^2 n)^{1/3} a_B = \left(3\pi^2 \frac{3}{4\pi(r_s a_B)^3} \right)^{1/3} a_B =$$

$$= \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{1/3} \frac{1}{r_s}$$

ponadto z ćwiczeń wiemy, że

$$\frac{E^{(0)}}{N} = \frac{3}{5} \epsilon_F = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}, \text{ zatem}$$

$$\frac{E^{(0)}}{N} = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{3}{5} (k_F a_B)^2 R_y = \frac{3}{5} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{1}{r_s^2} R_y \approx \frac{2210}{r_s^2} R_y$$

(e) W I-sym nędzie rachunki zabuker

maemy:

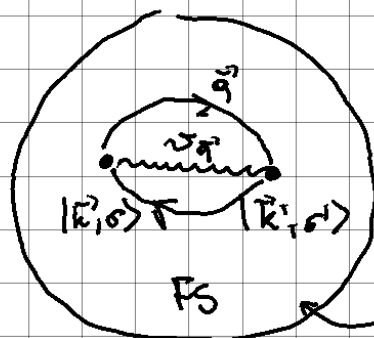
$$\frac{E^{(1)}}{N} = \frac{1}{2\Omega N} \sum_{\vec{q} \neq 0} \sum_{\vec{k}\sigma} \sum_{\vec{k}'\sigma'} \frac{e^2}{\epsilon_0 q^2} \langle FS | C_{\vec{k}+\vec{q}\sigma}^\dagger C_{\vec{k}-\vec{q}\sigma}^\dagger C_{\vec{k}'\sigma'} C_{\vec{k}'\sigma} | FS \rangle$$

Przyjrzyjmy się wyrazom macierowym
w powyższym wyrażeniu. Operatory
anihilacji działające na $|FS\rangle$ dają
zero, gdy $k > k_F$ i $k' > k_F$. Oznacza
to, że $|\vec{k}| < k_F$ i $|\vec{k}'| < k_F$. Ponadto
niezerowe wyrazy macierowe dostaniemy
tylko, jeżeli są operatory kreacji

wykreślają elektrony znane na swoich miejscach w morze Fermiego, co wymaga by $\vec{q}=0$ lub $\vec{k}' = \vec{k} + \vec{q}$ oraz $\sigma = \sigma'$. Wyraz $\vec{q}=0$ (bezpośredni) omówiliśmy wcześniej. Teraz zajmujemy się też zwrócić wyrazem wymiennym ($\vec{k}' = \vec{k} + \vec{q}$).

$$\begin{aligned}
 \langle FS | c_{\vec{k}+\vec{q},\sigma}^{\dagger} c_{\vec{k}-\vec{q},\sigma'}^{\dagger} c_{\vec{k},\sigma'} c_{\vec{k},\sigma} | FS \rangle &= \\
 = \delta_{\vec{k}', \vec{k}+\vec{q}} \delta_{\sigma\sigma'} \langle FS | c_{\vec{k}+\vec{q},\sigma}^{\dagger} c_{\vec{k},\sigma}^{\dagger} c_{\vec{k},\sigma} c_{\vec{k}+\vec{q},\sigma} | FS \rangle &= \\
 = -\delta_{\vec{k}', \vec{k}+\vec{q}} \delta_{\sigma\sigma'} \langle FS | \hat{n}_{\vec{k}+\vec{q},\sigma} \hat{n}_{\vec{k},\sigma} | FS \rangle &= \\
 = -\delta_{\vec{k}', \vec{k}+\vec{q}} \delta_{\sigma\sigma'} \Theta(k_F - |\vec{k}+\vec{q}|) \Theta(k_F - |\vec{k}|) &
 \end{aligned}$$

Wyraz wymienny (exchange) możemy przedstawić na diagramie:



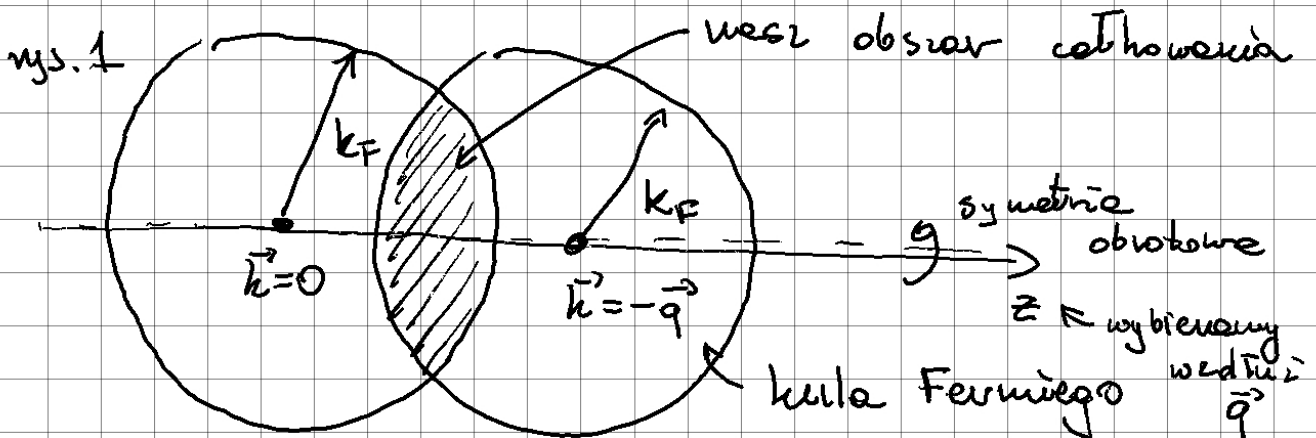
Wyraz ten
"wymienia"
elektrony miejscami
w morze Fermiego.

Wstawiając uzyskane elementy macierne oraz wykonując sumę po spinach oraz $\vec{k}'$ otrzymujemy:

$$\frac{E^{(1)}}{N} = - \frac{e^2}{\Omega N \epsilon_0} \sum_{\vec{q} \neq 0} \frac{1}{q^2} \sum_{\vec{k}} \theta(k_F - |\vec{k} + \vec{q}|) \theta(k_F - |\vec{k}|)$$

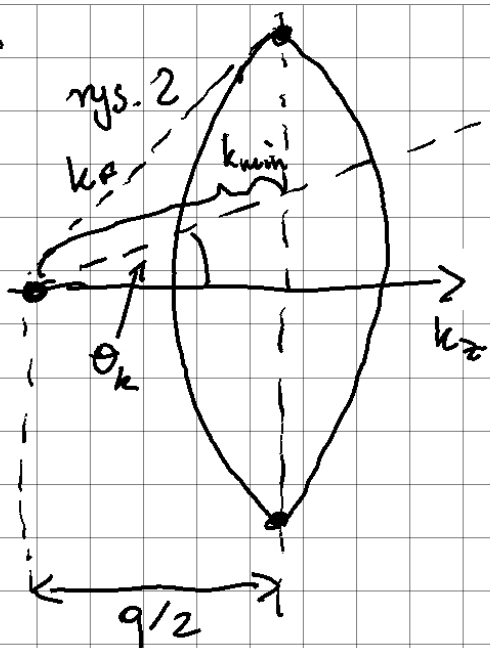
w granicy termodynamicznej ($\Omega \rightarrow \infty$) mamy:

$$\frac{E^{(1)}}{N} = - \frac{e^2}{N \epsilon_0} \frac{\Omega}{(2\pi)^6} \int_0^{2\pi} d\phi_q \int_{-1}^1 d(\cos\theta_q) \int_0^\infty dq q^2 \frac{1}{q^2} \int_0^{2\pi} d\phi_k \int_{-1}^1 d(\cos\theta_k) \int_0^\infty dk k^2 \theta(k_F - |\vec{k} + \vec{q}|) \theta(k_F - |\vec{k}|)$$



Objętość zalesowanego obszaru jest niezależna od kierunku $\vec{q}$, czyli

$$\int_0^{2\pi} d\phi_q \int_{-1}^1 d(\cos\theta_q) = 4\pi$$



Z rysunku 1 wiśniemy, że objętość zakreślonego obszaru jest niezerowa tylko, gdy $q < 2k_F$, czyli

$$\frac{E^1}{N} = -\frac{e^2}{N\epsilon_0} \frac{\Omega}{16\pi^5} \int_0^{2k_F} dq \text{Vol}(q),$$

gdzie $\text{Vol}(q)$ jest objętością zakreślonego obszaru. Konstruując z rysunku 2.

mamy

$$\cos \theta_k = \frac{q/2}{k_{\min}} \Rightarrow k_{\min} = \frac{q}{2 \cos \theta_k}$$

Maksymalna wartość θ_k odpowiada

sytuacji $k_{\min} = k_F$. Ponadto

symetria obrotowa sprawia, że całkowanie

po ϕ_k jest trywialne. Mamy, więc

$$\text{Vol}(q) = 2 \cdot 2\pi \int_{q/2k_F}^1 d \cos \theta_k \int_{q/(2 \cos \theta_k)}^{k_F} dk k^2 =$$

$$= 4\pi \int_{q/2k_F}^1 d\cos\theta_n \left[k_F^3 - \left(\frac{q}{2\cos\theta_n} \right)^3 \right] \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{4\pi}{3} \left\{ k_F^3 \left(1 - \frac{q}{2k_F} \right) - \left(\frac{q}{2} \right)^3 \left(\frac{1}{-2} \right) \left[1^{-2} - \left(\frac{q}{2k_F} \right)^{-2} \right] \right\} =$$

$$= \frac{4\pi}{3} \left(k_F^3 - \frac{3}{4} k_F^2 q + \frac{1}{16} q^3 \right)$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{zwróć uwagę, że dla } q=0, \text{Vol}(0) = \frac{4\pi}{3} k_F^3, \\ \text{a dla } q=2k_F, \text{Vol}(2k_F) = 0, \text{ czyli tak jak} \\ \text{być powinno.} \end{array} \right\}$

Mamy zatem

$$\frac{E^{(1)}}{N} = -\frac{e^2}{N\epsilon_0} \frac{\Omega}{16\pi^5} \int_0^{2k_F} dq \left(k_F^3 - \frac{3}{4} k_F^2 q + \frac{1}{16} q^3 \right) =$$

$$= -\frac{e^2}{N\epsilon_0} \frac{\Omega}{12\pi^4} \left(k_F^3 \cdot 2k_F - \frac{3}{4} k_F^2 \frac{1}{2} (2k_F)^2 + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} (2k_F)^4 \right) =$$

$$= -\frac{e^2}{N\epsilon_0} \frac{\Omega}{16\pi^4} k_F^4$$

Korzystając z tego, że $\frac{\Omega}{N} = \frac{1}{n}$ oraz

$$k_F^3 = 3\pi^2 n \quad \text{mamy:}$$

$$\frac{E^{(1)}}{N} = -\frac{e^2}{\epsilon_0} \frac{3}{16\pi^2} k_F = -\frac{e^2}{\epsilon_0} \frac{3}{16\pi^2} k_F \frac{2ma^2}{\hbar^2} R_y =$$

$$= - \frac{e^2}{\epsilon_0} \frac{3}{16\pi^2} k_F \frac{2m}{\hbar^2} \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} a_B R_y =$$

$$= - \frac{3}{2\pi} (k_F a_B) R_y = - \frac{3}{2\pi} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{1/3} \frac{1}{r_s} \approx - \frac{0,916}{r_s} R_y$$

(f) Pominiemy

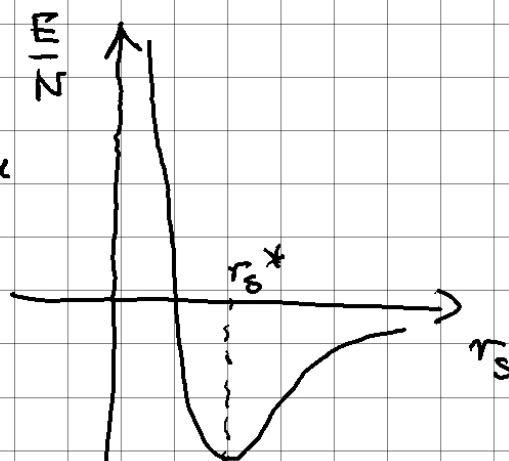
$$\frac{E}{N} \underset{r_s \rightarrow 0}{\approx} \frac{E^{(0)}}{N} + \frac{E^{(1)}}{N} + \dots = \left(\frac{2,21}{r_s^2} - \frac{0,916}{r_s} + \dots \right) R_y$$

(duże gęstości)

r_s^* - położenie minimum energii

$$\frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial r_s} (E^{(0)} + E^{(1)}) \Big|_{r_s=r_s^*} = 0$$

$$\Rightarrow r_s^* = 4,8, \text{ a } \frac{E^*}{N} = -0,1 R_y$$



Porównując ten wynik z eksperymentami

dla metalicznego sodu $r_s^*(Na) = 3,96$

oraz $\frac{E^*(Na)}{N} = 0,08 R_y$ uzyskujemy

bardzo dobrą zgodność teorii

i eksperymentu.

Cisnienie gazu elektronowego wynosi,
zatem

$$P = - \left(\frac{\partial E}{\partial \Omega} \right)_N = - \frac{1}{3CNr_s^2} \left(\frac{\partial E}{\partial r_s} \right)_{r_s=r_s^*} = 0,$$

gdzie $\Omega = CNr_s^3$, $C = \frac{4\pi}{3} a_B^3$.

Wynik ten oznacza, że gaz elektronowy
w niewyistym metalu jest stabilny.

Poprawki w wyższych rzędach rachunków
zaburzeń okazują się być nieskończone
i należy zastosować tzw. procedurę

renormalizacji masy efektywnej, aby
to poprawić. Uwzględnienie korekt
niechłody elektronowej daje wynik

$$\frac{E}{N} \xrightarrow[r_s \rightarrow \infty]{\text{określenie gęstości}} \left(\frac{2,21}{r_s^2} - \frac{0,916}{r_s} + 0,0622 \ln r_s - 0,096 \right) R_y$$

7 (a) Zewnętrzna gęstość ładunku

może zapisać w postaci:

$$\rho_{\text{ext}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi\hbar V} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \sum_{\vec{q}} \rho_{\text{ext}}(\vec{q}, E) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(E + i0^+)t\right]$$

Gęstość ładunku elektronów przewodnictwa jest dana równaniem:

$$-e\rho(\vec{r}) = -\frac{e}{V} \sum_{\vec{q}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \rho_{\vec{q}}$$

Odwołując się do równań elektronem i

zewnętrznymi ładunkami dane jest

wzorem:

$$V_t = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}) \rho_{\text{ext}}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Korzystając z wzoru:

$$\int d^3r \int d^3r' \frac{\exp[i(\vec{q} \cdot \vec{r} + \vec{q}' \cdot \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \delta_{\vec{q}, -\vec{q}'} \frac{4\pi V}{q^2}$$

Wtedy pamiętając, że $\bar{v}_q = \frac{1}{V} \frac{-e}{\epsilon_0 q^2}$ dostajemy

$$V_t = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(E + i0^+)t\right] \sum_{\vec{q}} \bar{v}(\vec{q}) \rho_{-\vec{q}} \rho_{\text{ext}}(\vec{q}, t) \quad (*)$$

(b) Zapisując równanie Maxwella w ośrodku w postaci podowej mamy:

$$i\vec{q} \cdot \vec{D}(\vec{q}, E) = \rho_{\text{ext}}(\vec{q}, E)$$

$$i\vec{q} \cdot \vec{E}(\vec{q}, E) = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{\text{ext}}(\vec{q}, E) + \rho_{\text{ind}}(\vec{q}, E))$$

ponadto

$$\vec{D}(\vec{q}, E) = \epsilon_0 \epsilon(\vec{q}, E) \vec{E}(\vec{q}, E)$$

korzystając z warunków dostępnym

$$\begin{aligned} \rho_{\text{ext}}(\vec{q}, E) &= i\vec{q} \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon(\vec{q}, E) \cdot i\vec{q} \cdot \vec{E} = \\ &= \epsilon_0 \epsilon(\vec{q}, E) \frac{1}{\epsilon_0} [\rho_{\text{ext}}(\vec{q}, E) + \rho_{\text{ind}}(\vec{q}, E)] \end{aligned}$$

a stąd mamy, że

$$\rho_{\text{ind}}(\vec{q}, E) = \left[\frac{1}{\epsilon(\vec{q}, E)} - 1 \right] \rho_{\text{ext}}(\vec{q}, E) \quad (**)$$

(c) Ponieważ $\rho_{-\vec{q}} = \rho_{\vec{q}}^+$, więc

$$V_t = \sum_{\vec{q}} \rho_{\vec{q}}^+ \tilde{F}_t(\vec{q}), \quad \text{gdzie}$$

pole zaburające ma postać:

$$\tilde{F}_t(\vec{q}) = \frac{\tilde{U}(\vec{q})}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(E+i0^+)t\right] \rho_{\text{ext}}(\vec{q}, E),$$

co dostajemy przez porównanie z (*)

(d) Mamy

$$\Delta(p_{\vec{q}})_+ = \frac{1}{\hbar} \sum_{\vec{q}'} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \tilde{F}_t(\vec{q}') \langle\langle p_{\vec{q}}(t); p_{\vec{q}'}^+(t') \rangle\rangle$$

Symetria transkacyjna układu sprawia, że tylko wkłady $\vec{q}' = \vec{q}$ w retardowanej funkcji Greena są niezerowe.

Oznacza to, że

$$\langle p_{\text{ind}}(\vec{q}; t) \rangle = -\frac{e}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \tilde{F}_t(\vec{q}) \langle\langle p_{\vec{q}}(t); p_{\vec{q}}^+(t') \rangle\rangle$$

wykonywując transformację Fouriera ^(***) mamy:

$$\langle p_{\text{ind}}(\vec{q}; E) \rangle = -\frac{e\tilde{v}(\vec{q})}{\hbar} p_{\text{ext}}(\vec{q}; E) \langle\langle p_{\vec{q}}; p_{\vec{q}}^+ \rangle\rangle_E$$

porównując z równaniem (**) otrzymujemy

$$\frac{1}{\epsilon(\vec{q}; E)} = 1 + \frac{1}{\hbar} v_0(\vec{q}) \langle\langle p_{\vec{q}}; p_{\vec{q}}^+ \rangle\rangle_E$$

Gdy $\epsilon(\vec{q}; E)$ jest bardzo duże wchodząc

z równania (***), że $\langle p_{\text{ind}} \rangle \approx -p_{\text{ext}}$,

co oznacza niemal całkowite ekranowanie

zewnętrznej ładunku przez gaz

elektronowy.

Inna ważna granica odpowiada sytuacji $\varepsilon(\vec{q}, E) \rightarrow 0$, co odpowiada osobliwości funkcji Greena $\langle p_{\vec{q}}; p_{\vec{q}}^+ \rangle_E$. W tym przypadku dowolnie małe zaburzenie powoduje powstanie skończonych fluktuacji gęstości elektronów przewodnictwa. Bieguny $\langle p_{\vec{q}}; p_{\vec{q}}^+ \rangle_E$ odpowiadają rezonansom gazu elektronowego, wzbudzenia kolektywne w tym przypadku są związane z kwazicząstkami zwanymi plazmonami.

8 (a) Dla $V_{sc}(\vec{r}, t) = V e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} e^{-i\omega t} e^{\alpha t}$ (bez c.c.) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 C_{kk'} &= \delta_{k'k} - i \int_{-\infty}^t ds \langle k' | V_{sc} | k \rangle e^{is[\varepsilon(k') - \varepsilon(k)]} = \\
 &= \delta_{k'k} - i \int_{-\infty}^t ds \int d\vec{r} e^{-i(\vec{k}' - \vec{k} - \vec{q}) \cdot \vec{r}} V e^{-i\omega s + \alpha s + is[\varepsilon(k') - \varepsilon(k)]} = \\
 &= \delta_{kk'} - \delta_{\vec{k}', \vec{k} + \vec{q}} \frac{V e^{-i\omega t + \alpha t + it[\varepsilon(k') - \varepsilon(k)]}}{\varepsilon(k') - \varepsilon(k) - t\omega - i\hbar\alpha}
 \end{aligned}$$

Wtedy funkcję falową dane jest równaniem:

$$\begin{aligned}\psi(\vec{r}, t) &= \sum_{k'} c_{kk'}(t) e^{-it\varepsilon(k')} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r}} = \\ &= e^{-it\varepsilon(k)} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \frac{V e^{-i\omega t + \kappa t - it\varepsilon(k)} e^{i(\vec{k} + \vec{q}) \cdot \vec{r}}}{\varepsilon(\vec{k}) - \varepsilon(\vec{k} + \vec{q}) + \hbar\omega + i\hbar\alpha} = \\ &= e^{-it\varepsilon(k)} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \{1 + T(\vec{q}, \omega)\},\end{aligned}$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie:

$$T(\vec{q}, \omega) = \frac{V e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} e^{-i\omega t} e^{\kappa t}}{\varepsilon(\vec{k}) - \varepsilon(\vec{k} + \vec{q}) + \hbar\omega + i\hbar\alpha}$$

względniając także wyrazy pochodzące ze sprzężenie zespolonego (c.c.) V_{sc} dostajemy:

$$\psi_k(\vec{r}, t) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-i\varepsilon(k)t} \{1 + T(\vec{q}, \omega) + T(-\vec{q}, -\omega)\}$$

stąd zaniobując wyrazy rzędu $\mathcal{O}(v^2)$ dostajemy

$$S_n(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} f(\vec{k}) \{ \psi_{\vec{k}}^*(\vec{r}, t) \psi_{\vec{k}}(\vec{r}, t) - 1 \} =$$

$$= \sum_{\vec{k}} f(\vec{k}) \{ T(q, \omega) + T(-q, -\omega) + T^*(q, \omega) + T^*(-q, -\omega) \}$$

tak więc wyrazy $T(q, \omega)$ i $T^*(-q, -\omega)$ oraz

ich sprzężenia zespolone dostajemy:

$$\delta n(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} f(\vec{k}) \left\{ \frac{V e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} e^{-i\omega t} e^{\alpha t}}{\varepsilon(\vec{k}) - \varepsilon(\vec{k} + \vec{q}) + \omega + i\alpha} + \right. \\ \left. + \frac{V e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} e^{-i\omega t} e^{\alpha t}}{\varepsilon(\vec{k}) - \varepsilon(\vec{k} + \vec{q}) - \omega - i\alpha} \right\} + c.c.$$

podstawiając $\vec{k} - \vec{q} \rightarrow \vec{k}$ w drugim wyrazie

dostajemy:

$$\delta n(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \frac{f(\vec{k}) - f(\vec{k} + \vec{q})}{\varepsilon(\vec{k}) - \varepsilon(\vec{k} + \vec{q}) + \omega + i\alpha} V e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} e^{-i\omega t} e^{\alpha t} + c.c.$$

(b) w przypadku statycznym ($\omega = 0$)

dostajemy

$$\varepsilon(\vec{q}, 0) = 1 + \frac{4\pi e^2}{q^2} \sum_{\vec{k}} \frac{f(\vec{k}) - f(\vec{k} + \vec{q})}{\varepsilon(\vec{k} + \vec{q}) - \varepsilon(\vec{k}) - i\delta}$$

Dla $q \ll k_F$ możemy rozwinąć

$$\varepsilon(\vec{k} + \vec{q}) - \varepsilon(\vec{k}) \simeq \vec{q} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} \varepsilon(\vec{k})$$

$$f(\vec{k}) - f(\vec{k} + \vec{q}) \simeq -\vec{q} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} f(\vec{k}) \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}$$

Ponieważ osobliwości w liczniku i mianowniku znoszą się, więc możemy położyć $\delta=0$, a wtedy

$$\epsilon(\vec{q}, 0) \approx 1 + \frac{4\pi e^2}{q^2} \sum_{\vec{k}} \frac{\vec{q} \cdot \vec{\nabla} \epsilon(\vec{k})}{\vec{q} \cdot \vec{\nabla} \epsilon(\vec{k})} \left(- \frac{\partial f(\epsilon(\vec{k}))}{\partial \epsilon} \right) =$$

$$= 1 + \frac{4\pi e^2}{q^2} \int d\epsilon D(\epsilon) \left(- \frac{\partial f(\epsilon)}{\partial \epsilon} \right),$$

gdzie $D(\epsilon)$ to gęstość stanów.

w zerowej temperaturze: $f(\epsilon) = \theta(\epsilon_F - \epsilon)$,
 czyli $-\frac{\partial f}{\partial \epsilon} = \delta(\epsilon_F - \epsilon)$, co prowadzi do

$$\epsilon(\vec{q}, 0) = 1 + \frac{4\pi e^2 D(\epsilon_F)}{q^2}$$

(c) Musimy wykonać sumę po $\vec{k}$:

$$J = \sum_{\vec{k}} \frac{f(\vec{k}) - f(\vec{k} + \vec{q})}{\epsilon(\vec{k} + \vec{q}) - \epsilon(\vec{k}) - i\delta} =$$

$$= \sum_{\vec{k}} \left\{ \frac{f(\vec{k})}{\epsilon(\vec{k} + \vec{q}) - \epsilon(\vec{k}) - i\delta} + \frac{f(\vec{k})}{\epsilon(\vec{k} - \vec{q}) - \epsilon(\vec{k}) + i\delta} \right\} = \left\{ \begin{matrix} T=0 \\ \epsilon_F = \frac{k^2}{2m} \end{matrix} \right\}$$

$$= 2m \sum_{\vec{k} < \vec{k}_F} \left\{ \frac{1}{q^2 + 2\vec{k} \cdot \vec{q} - i\delta} + \frac{1}{q^2 - 2\vec{q} \cdot \vec{k} + i\delta} \right\} =$$

↙ wzór Sokhotskiego

$$= 2m \sum_{k \leq k_F} \left\{ \mathcal{P} \left(\frac{1}{q^2 + 2\vec{q} \cdot \vec{k}} \right) + i\pi \delta(q^2 + 2\vec{q} \cdot \vec{k}) + \right. \\ \left. + \mathcal{P} \left(\frac{1}{q^2 - 2\vec{q} \cdot \vec{k}} \right) - i\pi \delta(q^2 - 2\vec{q} \cdot \vec{k}) \right\}$$

w drugim atomie podstawiając $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$
otrzymujemy:

$$J = 4m \sum_{k \leq k_F} \mathcal{P} \left(\frac{1}{q^2 + 2\vec{k} \cdot \vec{q}} \right)$$

zamieniając sumę na całkę dostajemy

$$J = 4m \int_0^{k_F} \frac{d^3k}{4\pi^3} \mathcal{P} \left(\frac{1}{q^2 + 2\vec{k} \cdot \vec{q}} \right)$$

Wprowadzając zmienne sferyczne dostajemy

$$J = \frac{2m}{\pi^2} \int_0^{k_F} dk k^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta \mathcal{P} \left(\frac{1}{q^2 + 2qk \cos\theta} \right) = \\ = \left\{ \begin{array}{l} y = \cos\theta \\ x' = k/k_F, \quad x = q/2k_F \end{array} \right\} = \frac{mk_F}{2\pi^2} \int_0^1 dx' x'^2 \int_{-1}^1 dy \mathcal{P} \left(\frac{1}{x^2 + x x' y} \right)$$

Korzystając z tego, że

$$\int_{-1}^1 dy \mathcal{P} \left(\frac{1}{a+y} \right) = \ln \left| \frac{a+1}{a-1} \right|$$

Mamy, więc

$$J = \frac{mk_F}{2\pi^2} \int_0^1 dx' \ln \left| \frac{x^2 + xx'}{x^2 - xx'} \right| \frac{x'^2}{xx'}$$

możemy powyższy logarytm zapisać
wówczas jego

$$\ln \left| \frac{x+x'}{x-x'} \right| = -\frac{1}{2} \ln \left[\frac{(x-x')^2}{(x+x')^2} \right]$$

$$J = \frac{mk_F}{2\pi^2} \int_0^1 dx' \frac{x'^2}{-2xx'} \ln \left[\frac{(x-x')^2}{(x+x')^2} \right]$$

$$\int_0^1 dx' x' \ln \left[\frac{(x-x')^2 + a^2}{(x+x')^2 + a^2} \right] = -2x \left(1 + a \operatorname{Arctg} \left(\frac{1+x}{a} \right) + \right. \\ \left. - a \operatorname{Arctg} \left[\frac{1+x}{a} \right] + (-1 - a^2 + x^2) \operatorname{Artgh} \left(\frac{2x}{1+a^2+x^2} \right) \right)$$

przechodząc do granicy $a \rightarrow 0$ i

konstatając z tego, że $\operatorname{arctg}(z) = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)$

oraz $\operatorname{artgh}(y) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1+y}{1-y} \right]$ dla $|y| < 1$

otrzymujemy, że

$$J = \frac{mk_F}{\pi^2} F(q/2k_F), \text{ gdzie } F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1-x^2}{4x} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|,$$

czyli

$$\varepsilon(q, 0) = 1 + \frac{4\pi e^2}{q^2} \frac{mk_F}{\pi^2} F\left(\frac{q}{2k_F}\right).$$