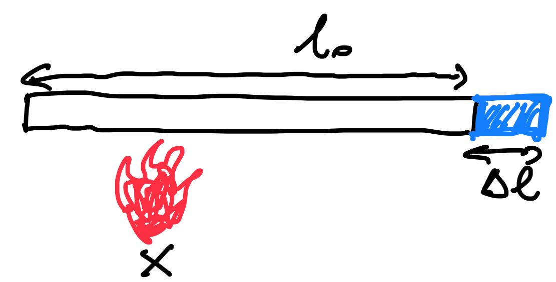
Koło olimpijskie – klasa III   31.10.2020

#3 Termodynamika fenomenologiczna

Rozszerzalność termiczna

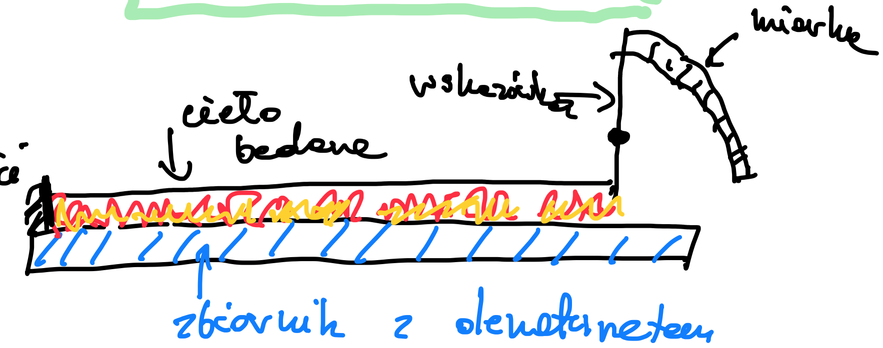
Liniowy współczynnik rozszerzalności termicznej α:

$$\boxed{\frac{\Delta l}{l_0 \Delta T} = \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{l}\left(\frac{dl}{dT}\right)}$$



Długość ciała po podgrzaniu wynosi: $\boxed{l = l_0(1+\alpha\Delta T)}$

METODA WYZNACZANIA WSPÓŁ. ROZSZERZALNOŚCI α

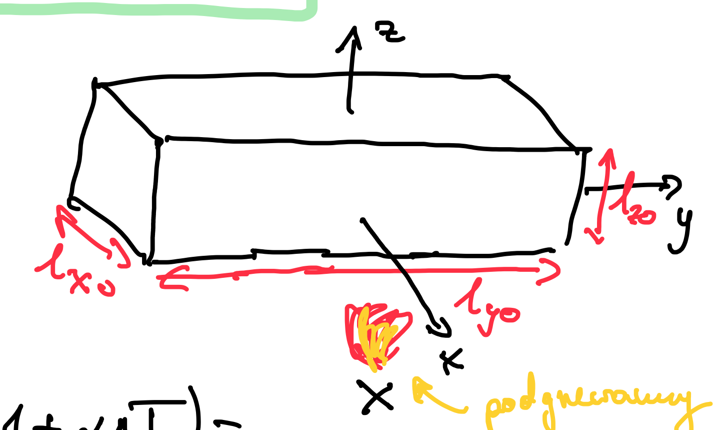


Współczynnik rozszerzalności objętościowej γ:

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dT}\right) \Longrightarrow V = V_0(1+\gamma\Delta T)}$$

$$\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = \alpha$$

$$V_0 = l_{x0}\, l_{y0}\, l_{z0}$$



$$V = l_x l_y l_z = l_{0x}(1+\alpha\Delta T)\cdot l_{0y}(1+\alpha\Delta T)\cdot l_{0z}(1+\alpha\Delta T) =$$

$$= V_0\,(1+\underbrace{\alpha\Delta T}_{\text{małe}})^3 = \left\{ f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots \right\} =$$

małe w porównaniu z V_0

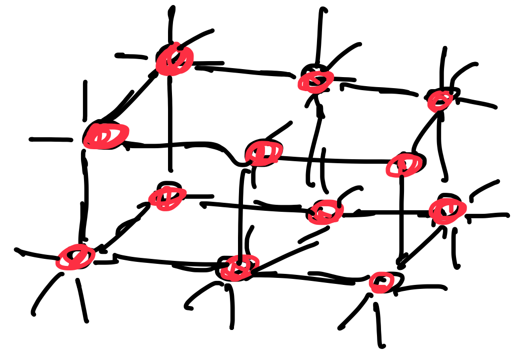
wzór Taylora

$$= \left\{ (1+\underset{\text{małe}}{x})^3 = (1+0)^3 + \left.\frac{3(1+x)^2}{1!}\right|_{x=0}(x-0) + \ldots = 1 + 3x + \ldots \right\} =$$

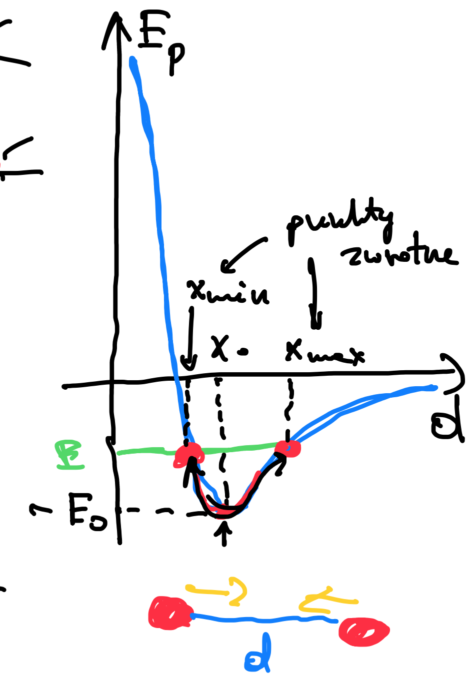
$$\simeq V_0(1+3\alpha\Delta T) = V_0(1+\gamma\Delta T) \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 3\alpha}}$$

Mikroskopowy model rozszerzalności termicznej

Chcemy znaleźć średnią odległość między atomami odpowiadającą energii
$|E| > |E_0|$, $E < 0$



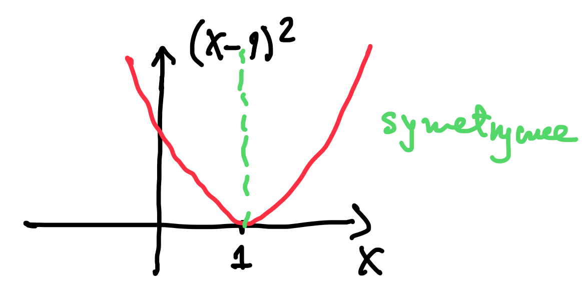
stan związany $E<0$



Potencjał rozwijamy w pobliżu x_0 za pomocą wzoru Taylora:

$$E_p(x) = -E_0 + \underbrace{\frac{1}{1!}\frac{dE_p(x)}{dx}\Big|_{x_0}}_{\substack{= 0\text{, bo } x_0 \text{ jest} \\ \text{minimum} \\ E_p(x)}} (x-x_0) + \underbrace{\frac{1}{2!}\frac{d^2E_p(x)}{dx^2}\Big|_{x_0}}_{a} (x-x_0)^2 +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{3!}\frac{d^3E_p(x)}{dx^3}\Big|_{x_0}}_{-b} (x-x_0)^3 + \ldots =$$



$$= -E_0 + a(x-x_0)^2 - \underline{\underline{b(x-x_0)^3}} + \ldots, \text{ gdzie } a, b > 0.$$

zakładam, że jest to małe, czyli

$$b(x-x_0)^3 \ll a(x-x_0)^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{b|x-x_0| \ll a}}$$

założenia:

1°) człon anharmoniczny jest mały, czyli
$b|x-x_0| \ll a$

2°) punkty zwrotne x_{min} i x_{max} drgań bardzo niewiele różnią się od punktów zwrotnych oscylatora harmonicznego x^h_{min} i x^h_{max} $(b=0)$

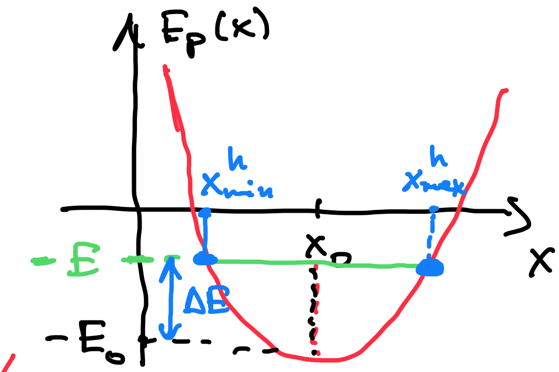
3°) Średnia odległość międzyatomowa w czasie drgań jest daną średnią arytmetyczną

$$\bar{x} = \frac{x_{min} + x_{max}}{2}$$

A. Oscylator harmoniczny

$$E_p(x) = -E_0 + a(x-x_0)^2 + \dots$$

$$E_{pot}(x = x^h_{min/max}) = -E$$



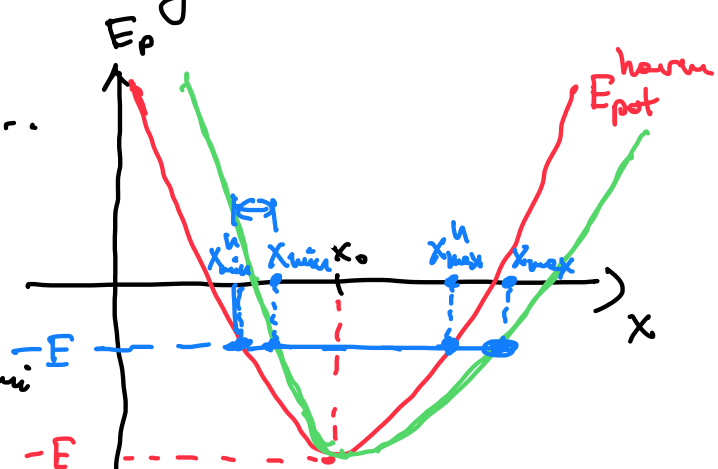
$$\underbrace{-E = -\cancel{E_0} + \Delta E = a(x^h_{min/max} - x_0)^2 - \cancel{E_0}}_{\frac{\Delta E}{a} = (x^h_{min/max} - x_0)^2} \Rightarrow \begin{cases} x^h_{min} = x_0 - \sqrt{\frac{\Delta E}{a}} \\ x^h_{max} = x_0 + \sqrt{\frac{\Delta E}{a}} \end{cases}$$

B. Uwzględniamy człon anharmoniczny

$$E_{pot}(x) = -E_0 + a(x-x_0)^2 - b(x-x_0)^3 + \dots$$

$$x_{min} = x^h_{min} + \varepsilon$$
$$x_{max} = x^h_{max} + \varepsilon'$$

$\varepsilon, \varepsilon'$ – małe zgodnie z założeniami



Dla x_{min} mamy:

$$x_0 - \sqrt{\frac{\Delta E}{a}} + \varepsilon$$

$$E_{pot}(x_{min}) = -E = -\cancel{E_0} + \Delta E = a\underbrace{(x_{min} - x_0)^2}_{\left(-\sqrt{\frac{\Delta E}{a}} + \varepsilon\right)^2} - b\underbrace{(x_{min} - x_0)^3}_{\left(-\sqrt{\frac{\Delta E}{a}} + \varepsilon\right)^3} - \cancel{E_0}$$

$$\Delta E = a\left(\frac{\Delta E}{a} - 2\sqrt{\frac{\Delta E}{a}}\,\varepsilon + \cancel{\varepsilon^2}\right) - b\left(-\left(\sqrt{\frac{\Delta E}{a}}\right)^3 + 3\varepsilon\frac{\Delta E}{a} \underbrace{- \cancel{3\varepsilon^2}\sqrt{\frac{\Delta E}{a}} + \cancel{\varepsilon^3}}\right)$$

bardzo małe

małe wyższego rzędu

$$\cancel{\Delta E} = \cancel{\Delta E} - 2a\sqrt{\frac{\Delta E}{a}}\,\varepsilon + b\left(\sqrt{\frac{\Delta E}{a}}\right)^3 - 3\varepsilon b\frac{\Delta E}{a}$$

$$\varepsilon\left(3b\frac{\Delta E}{a} + 2a\sqrt{\frac{\Delta E}{a}}\right) = b\left(\sqrt{\frac{\Delta E}{a}}\right)^3$$

$$\varepsilon = \frac{b\frac{\Delta E}{a}}{\cancel{3b\sqrt{\frac{\Delta E}{a}}} + 2a} \simeq + \frac{b\frac{\Delta E}{a}}{2a} = + \frac{b\Delta E}{2a^2}$$

możemy to zaniedbać

bo $b\underbrace{|x_{min} - x_0|}_{\sqrt{\frac{\Delta E}{a}}} \ll a$, czyli $\sqrt{\frac{\Delta E}{a}}\, b \ll a$

Analogicznie postępujemy dla x_{max} tylko zamieniamy
$-\sqrt{\frac{\Delta E}{a}} \to \sqrt{\frac{\Delta E}{a}}$, wtedy dostajemy, że $\varepsilon = \varepsilon' = \frac{b\Delta E}{2a^2}$

Wiemy, że

$$x_{min} = x_0 - \sqrt{\frac{\Delta E}{a}} + \frac{b\Delta E}{2a^2}$$

$$x_{max} = x_0 + \sqrt{\frac{\Delta E}{a}} + \frac{b\Delta E}{2a^2}$$

Średnia odległość między atomami:

$$\bar{x} \simeq \frac{x_{min} + x_{max}}{2} = x_0 + \frac{b\Delta E}{2a^2}$$

$\Delta E \nearrow$ dostarczam energię do układu, wtedy $\bar{x}$ rośnie

$\Delta E \sim T$

Zadanie:

Słupy linii energetycznej są oddalone od siebie o 50m. Pomiędzy słupami rozwieszony jest drut wykonany z miedzi. W temperaturze $-25°C$ przewód jest naprężony. Oszacować zwis przewodu w temp. $35°C$. Dla Cu wsp. rozszerzalności wynosi $\alpha = 1{,}6 \cdot 10^{-5}\ K^{-1}$.

Rozwiązanie

Zmiana długości przewodu:

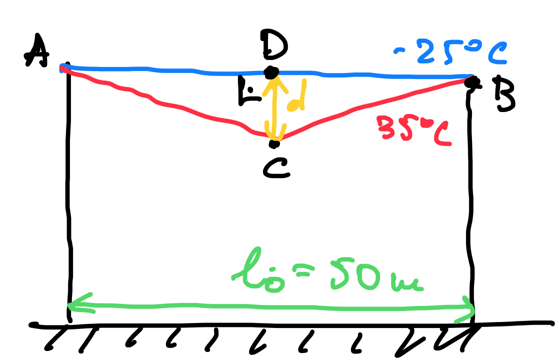
$$\Delta l = l_0 \alpha \Delta T = 50m \ 1{,}6 \cdot 10^{-5} K^{-1}\ 60K = 0{,}048 = 4{,}8cm$$

•) Oszacowanie z góry

$$l = l_0 + \Delta l$$

$$|AC| = \frac{l}{2} = \frac{l_0 + \Delta l}{2}$$

$$|AD| = \frac{l_0}{2}$$

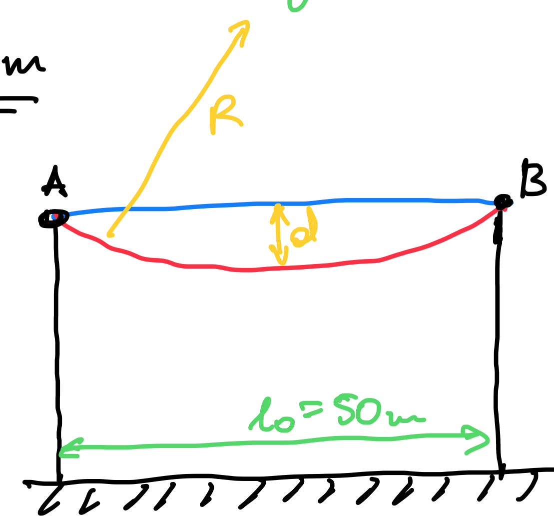


Z tw. Pitagorasa mamy:

$$\left(\frac{l_0+\Delta l}{2}\right)^2 = \left(\frac{l_0}{2}\right)^2 + d^2 \Rightarrow d = \frac{1}{2}\sqrt{(l_0+\Delta l)^2 - l_0^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\cancel{l_0^2} + 2l_0\Delta l + \underbrace{\cancel{\Delta l^2}}_{\text{pomijamy}} - \cancel{l_0^2}} = \frac{\sqrt{2 l_0 \Delta l}}{2} =$$

$$= \underline{\underline{1{,}1\ m}}$$

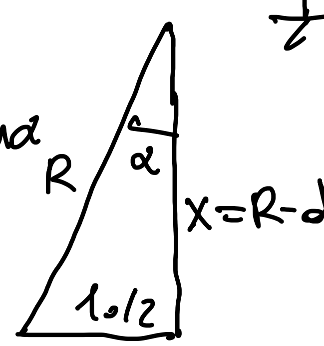


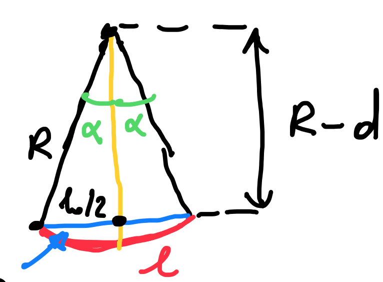
• oszacowanie z dołu

Długość łuku wynosi:

$$l = l_0+\Delta l = 2R\alpha \Rightarrow R = \frac{l_0+\Delta l}{2\alpha} \overset{\Delta l \ll l_0}{\approx} \frac{l_0}{2\alpha}$$

Długość cięciwy AB wynosi:





$$\sin\alpha = \frac{l_0/2}{R} \Rightarrow l_0 = 2R\sin\alpha$$

$$\sin\alpha \simeq \overset{0}{\sin 0} + \frac{1}{1!}\overset{1}{\cos 0}\,\alpha + \frac{1}{2!}(\underset{0}{-\sin 0})\,\alpha^2 + \frac{1}{3!}(\overset{-1}{-\cos 0})\,\alpha^3 + \ldots \simeq \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3 + \ldots$$

$$l_0 = 2R\sin\alpha \simeq 2R\left(\alpha - \frac{1}{6}\alpha^3 + \ldots\right)$$

$$l = l_0 + \Delta l = 2R\alpha \Rightarrow \underline{2R}\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \ldots\right) + \Delta l = \underline{2R\alpha} \Rightarrow \underline{\underline{\Delta l = \frac{R\alpha^3}{3}}}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{R} \Rightarrow R - d = R\cos\alpha \Rightarrow d = R(1-\cos\alpha)$$

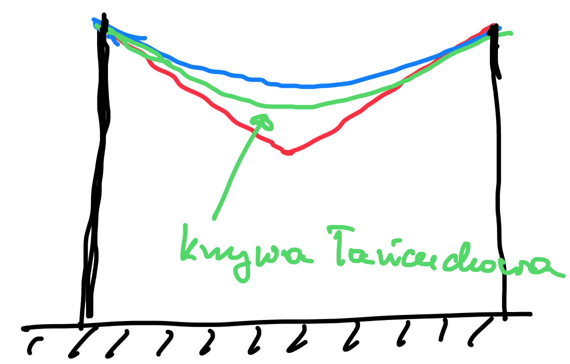
$$R = \frac{l_0}{2\alpha}, \quad \Delta l = \frac{R\alpha^3}{3} \Rightarrow \Delta l = \frac{l_0}{2\alpha}\,\frac{1}{3}\alpha^3 = \frac{l_0\alpha^2}{6}$$

$$\alpha \simeq \sqrt{\frac{6\Delta l}{l_0}}$$

$$\cos\alpha \simeq \overset{1}{\cos 0} + \frac{1}{1!}(\overset{0}{-\sin 0})\,\alpha + \frac{1}{2!}(\underset{-1}{-\cos 0})\,\alpha^2 + \ldots = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \ldots$$

$$d = R\left(1 - 1 + \tfrac{1}{2}\alpha^2\right) \simeq \frac{R}{2}\alpha^2 = \frac{1}{2}\frac{l_0}{2\alpha}\alpha^2 = \frac{1}{2}\frac{l_0}{2}\alpha = \frac{l_0}{4}\sqrt{\frac{6\Delta l}{l_0}} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{6 l_0 \Delta l} \simeq 0{,}95\,m$$

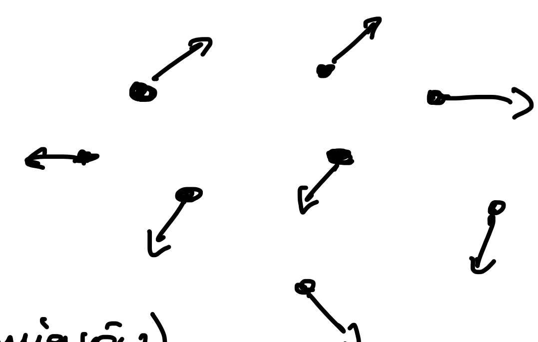


Dostajemy, że

$$0{,}95\,m \le d \le 1{,}1\,m$$

Gaz doskonały

Gazem doskonałym nazywamy taki gaz w którym:



- atomy mogą traktować jak punkty materialne (nie mające rozmiarów)
- poruszają się po liniach prostych, a zderzenia między nimi są idealnie sprężyste
- atomy w gazie doskonałym nie oddziałują ze sobą.

Fakty doświadczalne:

1°) W trakcie procesu izotermicznego (T = const): $pV = \text{const}$ (prawo Boyle'a-Mariotte'a)

2°) W trakcie procesu izochorycznego (V = const) $\frac{T}{p} = \text{const}$ (prawo Charlesa)

3°) W trakcie procesu izobarycznego (p = const) $\frac{T}{V} = \text{const}$ (prawo Gay-Lussaca)

Równanie stanu gazu doskonałego (Clapeyrona):

$$\boxed{pV = n\underbrace{R}_{\text{stała}}T}$$

$n = \text{const}$ ← l. moli

$R = 8{,}31 \frac{J}{mol \cdot K}$ – uniwersalna stała gazowa

Każdy rozrzedzony gaz można traktować jak gaz doskonały.