Koło olimpijskie - klasa II

31.10.2020

#3 Rachunek niepewności pomiarowej

Pochodne wyższych rzędów i wzór Taylora

Pochodne wyższego rzędu:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = (x^n)' = \underline{\underline{n x^{n-1}}}$$

Pochodna drugiego rzędu to po prostu pochodna pochodnej, itd.

- $f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(f'(x)\right) = \left(f'(x)\right)'$
- $f'''(x) = \frac{d^3 f}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(f''(x)\right) = \left(f''(x)\right)'$
- pochodna n-tego rzędu

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$$

$$\left\{ \left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - f'g}{f^2} \right\}$$

pochodna ilorazu funkcji f i g.

Przykład:

$f(x) = \operatorname{tg} x \qquad f''(x) = ?$

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\overbrace{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}^{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = \left(\left[\cos x\right]^{-2}\right)' = \left\{ \frac{d\, f(g(x))}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{d\, g(x)}{dx} \right\} =$$

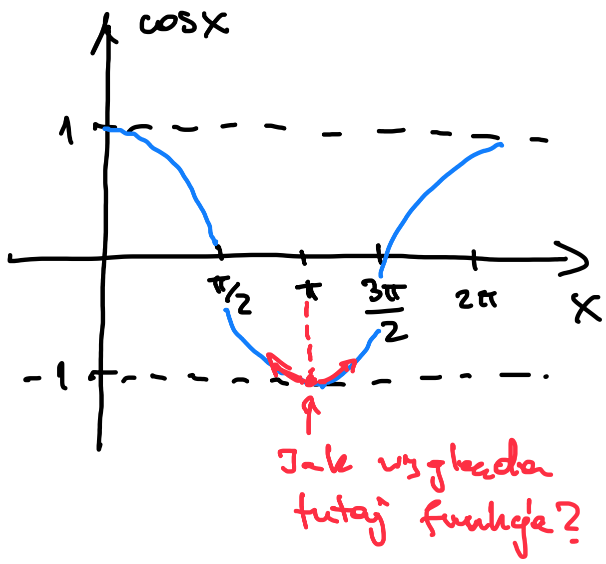
$$= \left\{ \begin{array}{l} \cos x = g \\ f = g^{-2} \end{array} \right\} = \frac{d(g^{-2})}{dg} \frac{dg}{dx} = -2 g^{-3} \frac{d \cos x}{dx} =$$

$$= -2 \cos^{-3} x \, (-\sin x) = 2 \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$$

Wzór Taylora

Dowolną funkcję różniczkowalną w danym punkcie mogę przybliżyć za pomocą wielomianu, którego mogę skonstruować za pomocą poniższego wzoru:

$$\boxed{f(x)=f(x_0)+\frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3+\dots}$$



Chcę wiedzieć jak wygląda cos x w pobliżu $x_0=\pi$ tak, aby $x=\pi+\varepsilon$?

$$\cos(x)=\cos(\pi)+\frac{1}{1!}(\cos x)'\Big|_{\pi}(x-\pi)+$$
$$+\frac{1}{2!}(\cos x)''\Big|_{\pi}(x-\pi)^2+\frac{1}{3!}(\cos x)'''\Big|_{\pi}(x-\pi)^3+\dots$$
$$=\cos\pi+(-\sin\pi)(x-\pi)+$$
$$+\frac{1}{2!}(-\cos\pi)(x-\pi)^2+\frac{1}{3!}(\sin\pi)(x-\pi)^3+\dots=$$
$$=-1+\frac{1}{2}(x-\pi)^2+\dots$$

Idea jak wykorzystać wzór Taylora do obliczania niepewności pomiarowej złożonej wielkości

$x=\bar{x}+\Delta x$ ← małe

$$f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}=$$
$$=\bar{f}+(\quad)\Delta x$$

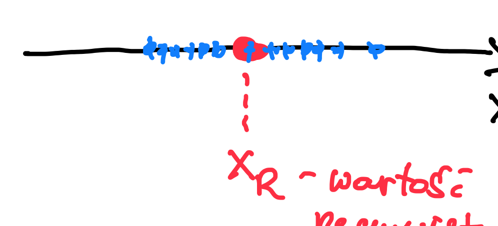
rozwinięcie (wzór Taylora)

niepewność

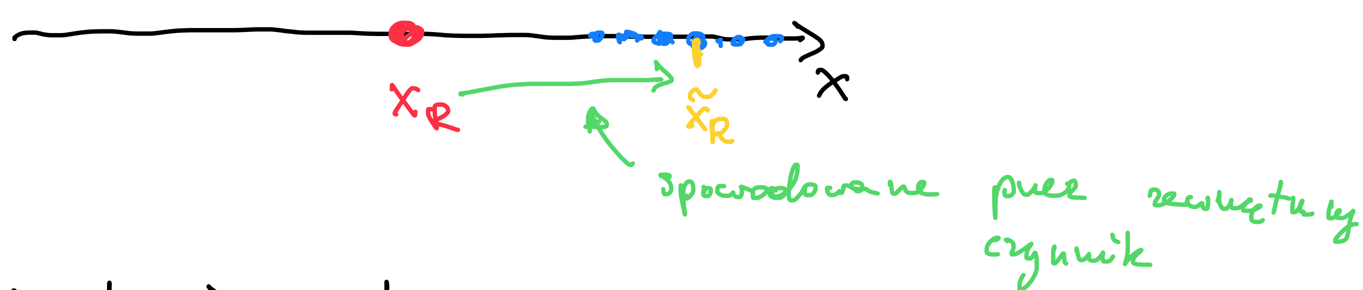
Rachunek niepewności pomiarowej

- Rodzaje błędów pomiaru

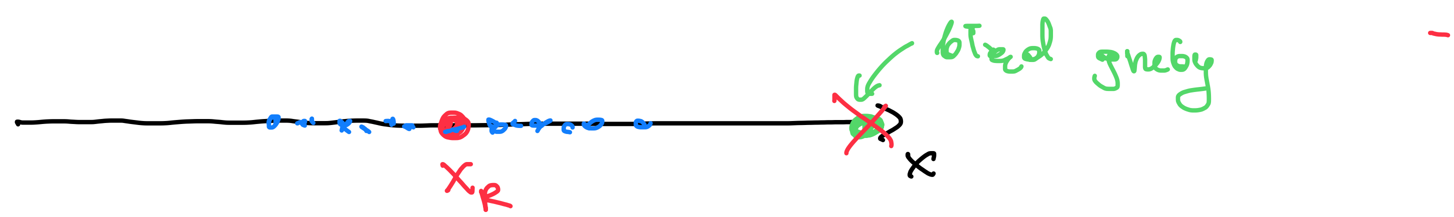
 – błąd przypadkowy jest spowodowany losowym odchyleniem wyniku pomiaru od wartości rzeczywistej



– <u>błąd systematyczny</u> występuje, gdy przy powtarzaniu pomiaru występuje ta sama różnica między wynikami pomiarów, a wartością rzeczywistą



– <u>błąd gruby</u> występuje, gdy różnica między wynikiem pomiaru a wartością rzeczywistą jest bardzo duża.



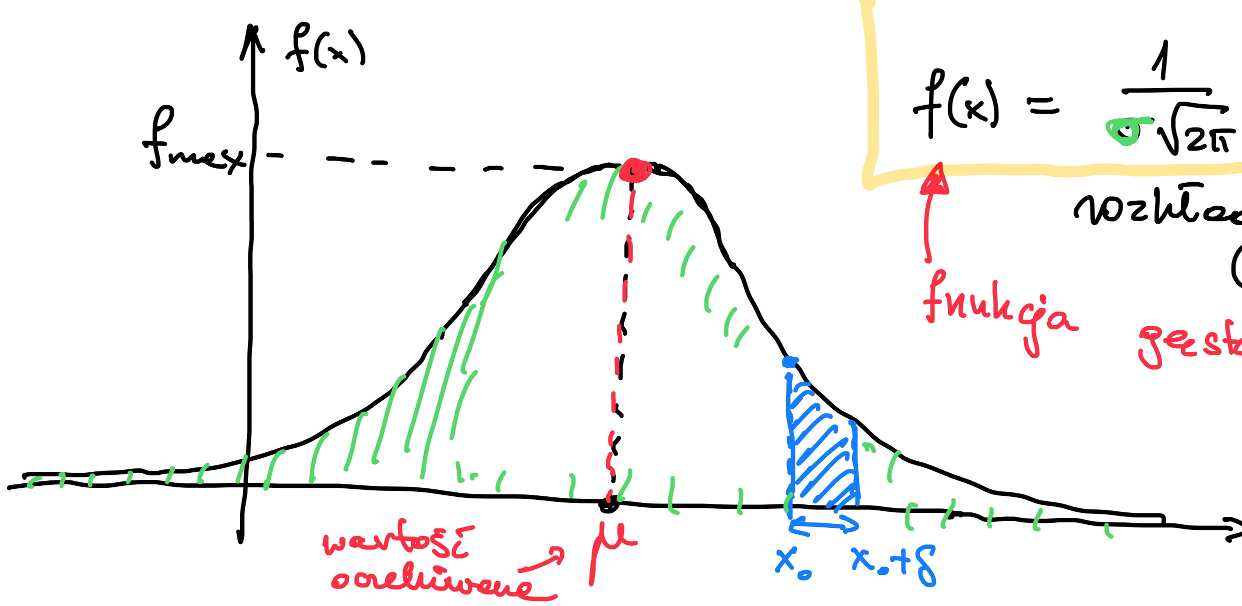
• Rozkład normalny i estymacja wartości pomiaru oraz jego niepewności

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

rozkład normalny (Gaussa)

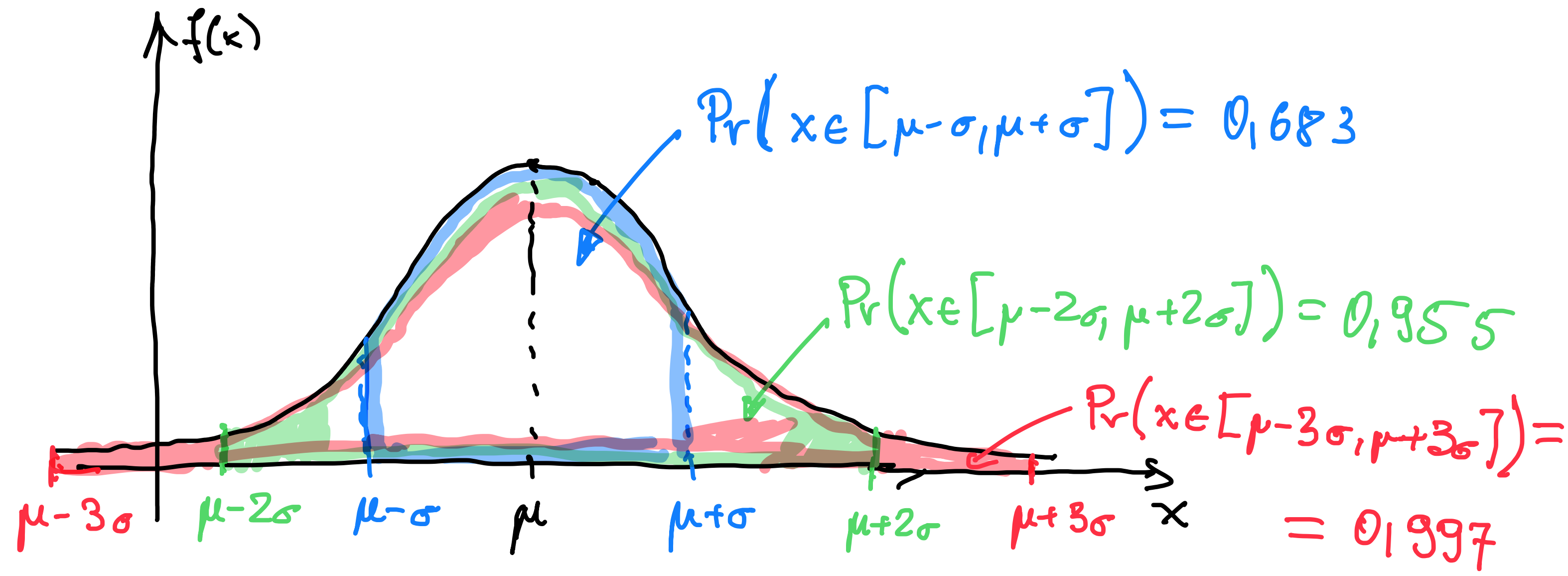
funkcja gęstości prawdopodobieństwa

odchylenie standardowe



Prawdopodobieństwo, że $x \in [x_0, x_0+\delta]$ wynosi

$$Pr(x \in [x_0, x_0+\delta]) = \frac{\text{Pole pod wykresem między } x_0 \text{, a } x_0+\delta}{\underset{=1}{\text{Pole pod całym wykresem od } -\infty \text{ do } +\infty}}$$



Dla rozkładu normalnego prawdopodobieństwo tego, że wartość pomiaru x znajduje się w przedziale:

stopień ufności

- od $\mu-\sigma$ do $\mu+\sigma$ jest równe 68,26 %
- od $\mu-2\sigma$ do $\mu+2\sigma$ jest równe 95,46 %
- od $\mu-3\sigma$ do $\mu+3\sigma$ jest równe $\underbrace{99{,}74\%}_{\text{poziom ufności}}$

przedział ufności

Okazuje się, że najlepszym estymatorem wartości oczekiwanej μ dla serii pomiarowej, którą przyjmujemy jako wartość rzeczywistą mierzonej wartości, jest wartość średnia z wykonanych pomiarów:

estymator

przyjmujemy, że $\bar{x} = x_R$

$$\boxed{\bar{x} = E(\mu) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

wartość średnia — l. pomiarów — wartości pomiarowe

Niepewnością pomiaru nazywamy różnicę między wartością zmierzoną, a wartością rzeczywistą:

$$\underbrace{\Delta x}_{\text{niepewność pomiaru}} = x - x_R$$

wynik pomiaru — wartość rzeczywista

(niepewność bezwzględna)

Względna niepewność pomiaru:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x_R} = \frac{x - x_R}{x_R}$$ ← wielkość bezwymiarowa!

Będziemy przyjmować odchylenie standardowe za miarę niepewności pomiaru. Najlepszym estymatorem odchylenia standardowego pojedynczego pomiaru:

$$\boxed{s(x_i) = E(\sigma) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}$$

ilość pomiarów

wynik pomiaru

wartość średnia

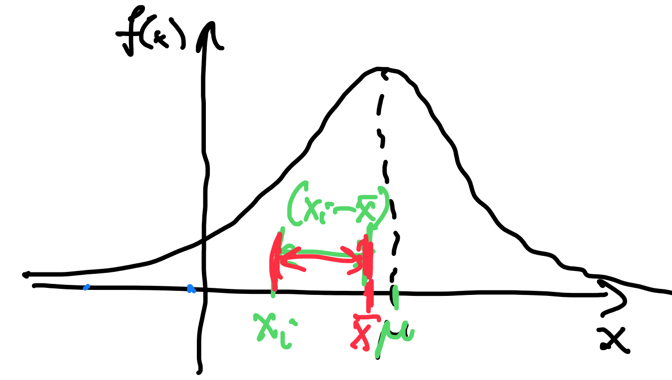
Najlepszym estymatorem odchylenia standardowego dla wartości średniej jest:

$$\boxed{s(\bar{x}) = \frac{s(x_i)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}$$

Wykonując serię pomiarów zwiększamy dokładność pomiaru zwiększając liczbę pomiarów!

$$s(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{(x_i-\bar{x})^2}_{\text{zawsze dodatnie}}}$$

tym większe im większa różnica $x_i - \bar{x}$



Gdy w wyniku serii pomiarowej dostaniemy n pomiarów: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, wtedy

wartość pomiaru $\rightarrow$ $$\boxed{X = \bar{X} \pm \underbrace{\Delta X}_{\text{niepewność}} = \bar{X} \pm k \cdot s(\bar{x})}$$

stopień ufności

wartość średnia

- Typy niepewności

– Typ A. Niepewność w tym przypadku wyznaczamy z serii pomiarowej i wzoru:

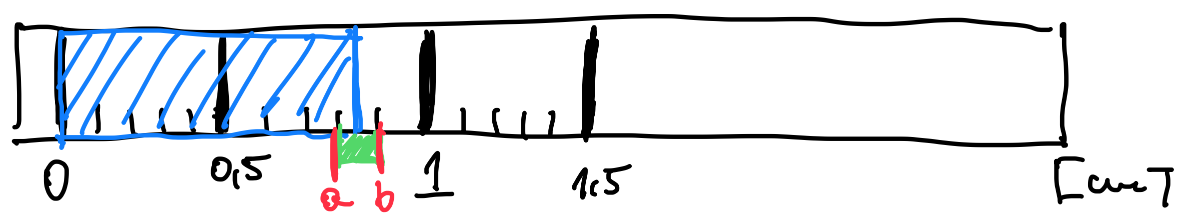
  - wynik pomiaru jest dany średnią

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

  - niepewność pomiaru jest wyrażona jej odchyleniem standardowym

$$\Delta x = k\, s(\bar{x})$$

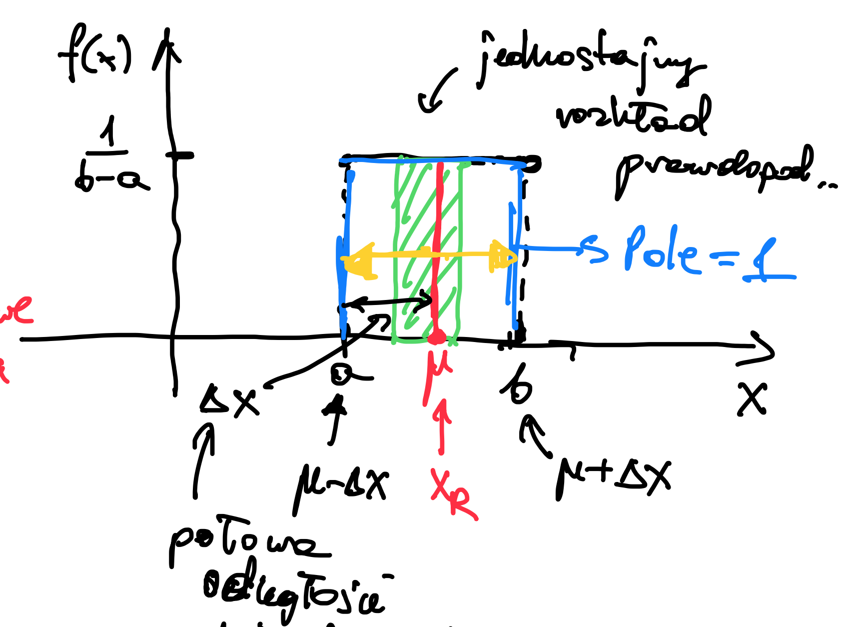
– Typ B. Nie występuje tutaj rozrzut wyników, tj. wszystkie wyniki są takie same. W tym przypadku głównym czynnikiem powodującym błąd jest niepewność przyrządu pomiarowego.



$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

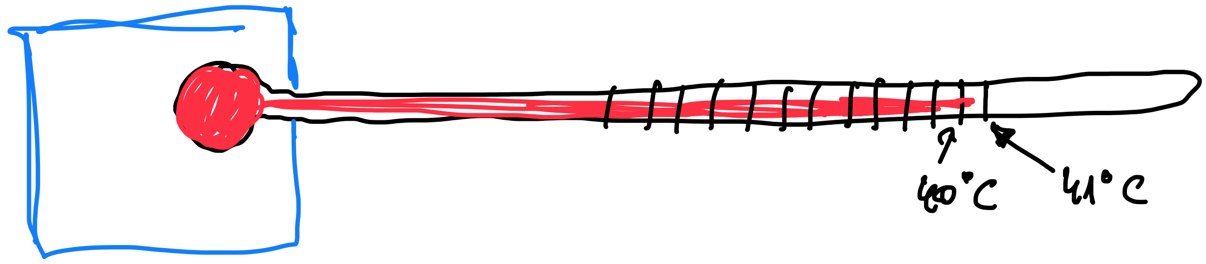
odchylenie standardowe dla tego rozkładu



$$s(\bar{x}) = \sqrt{\sigma^2} = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}$$

$\bar{x}$ – wartość która wypadłaby w połowie skali,

niepewność pomiaru $= \dfrac{\Delta x}{\sqrt{3}}$



$$2\Delta x = 1^\circ C$$
$$\Delta x = 0{,}5^\circ C$$

$$x = 40{,}5^\circ C \pm \frac{0{,}5^\circ C}{\sqrt{3}} = 40{,}5^\circ C \pm 0{,}3^\circ C$$

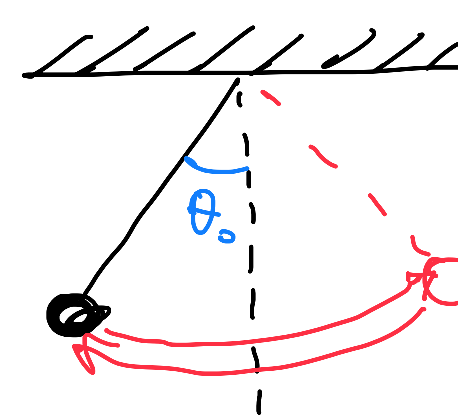
W domu spróbujcie wykonać pomiar okresu drgań wahadła matematycznego:

1°) Po pierwsze wykonujcie serię pomiarów w której pojedynczy pomiar jest dany po prostu przez pomiar pojedynczego okresu, a później wykonajcie analogiczny pomiar w którym pojedynczy punkt pomiarowy jest czasem po 10 okresach podzielonym przez 10. Który z tych pomiarów jest dokładniejszy?

2°) Okres drgań wahadła zależy od początkowego wychylenia θ_0 spróbuj wyznaczyć jak wygląda funkcja $T(\theta_0)$ powyżej $\theta_0 = 15^\circ$ powinno być widoczne odchylenie od wzoru na okres wahadła $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ znanego ze szkoły.

$$T = f(\theta_0)\sqrt{\frac{l}{g}}$$

początkowy kąt wychylenia



$\theta_0 < 15^\circ \longrightarrow f(\theta_0) = 2\pi$