

Mechanika kwantowa IIB: Ćwiczenia #3

mgr Piotr Zdybel

piotr.zdybel@fuw.edu.pl

www.fuw.edu.pl/~pzdybel/kwant18.html

Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski — 23 października 2018

Zadanie 1: Operator tożsamościowy w przestrzeni Focka

Pokazać, że

$$\frac{1}{N!} \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_N} |\alpha_1 \dots \alpha_N\rangle \langle \alpha_1 \dots \alpha_N| = \mathbb{1}$$

w $\mathcal{B}_N, \mathcal{F}_N$.

Zadanie 2: Normalizacja stanów zszytyzowanych

Pokazać, że $\{\alpha'_1 \dots \alpha'_N | \alpha_1 \dots \alpha_N\} = \zeta^P \prod_{\alpha} (n_{\alpha}!)$, gdy $(\alpha'_1 \dots \alpha'_N)$ jest permutacją $(\alpha_1 \dots \alpha_N)$, przy czym n_{α} jest ilością cząstek w stanie α oraz $\{\alpha'_1 \dots \alpha'_N | \alpha_1 \dots \alpha_N\} = 0$ jeżeli nie jest permutacją.

Zadanie 3: 3 bezspinowe bozony w pudle

3 bezspinowe bozony znajdują się w jednowymiarowym pudle o długości L z periodycznymi warunkami brzegowymi. Dana jest baza stanów $\{|k\rangle\}$, gdzie $k = \frac{2\pi n}{L}$ ($n \in \mathbb{Z}$), przy czym funkcje falowe to $\langle x|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx}$. Rozważyć trzy bozony znajdujące się w stanach $k_1 = 0$, $k_2 = \frac{2\pi}{L}$ oraz $k_3 = k_2$.

- Wypisz $|k_1, k_2, k_3\rangle$ oraz $|k_1, k_2, k_3\rangle$.
- Oblicz $\{k_1, k_2, k_3 | k_1, k_2, k_3\}$ oraz $\langle k_1, k_2, k_3 | k_1, k_2, k_3\rangle$.
- Jak działa operator a_k na $|k_1, k_2, k_3\rangle$ dla dowolnego k ?
- Oblicz $a_i^\dagger a_i |k_1, k_2, k_3\rangle$ dla $i = 1, 2, 3$.

Zadanie 4: 3 elektrony w pudle

3 elektrony o spinie $\frac{1}{2}$ znajdują się w jednowymiarowym pudle o długości L z periodycznymi warunkami brzegowymi. Rozważyć trzy elektrony w stanie $|\psi\rangle = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle$, przy czym elektrony znajdują się w stanach jednocząstkowych $\alpha_1 = (0, \uparrow)$, $\alpha_2 = (0, \downarrow)$ oraz $\alpha_3 = (\frac{2\pi}{L}, \uparrow)$, gdzie $\alpha_i = (k_i, \sigma_i)$. Podziać na $|\psi\rangle$ następującymi operatorami $a_{\frac{2\pi}{L}, \uparrow}^\dagger, a_{\frac{2\pi}{L}, \downarrow}^\dagger, a_{0, \uparrow}, a_{0, \downarrow}, a_{\frac{2\pi}{L}, \uparrow}$ oraz $a_{\frac{2\pi}{L}, \downarrow}$.

Omawiane zagadnienia

- Wprowadzenie do II kwantyzacji. Wprowadzenie oznaczenia stanów produktowych jako $|\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle$, stanów zszytyzowanych jako $|\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle$ oraz stanów unormowanych jako $|\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle$.
- Definicja operatorów kreacji i anihilacji działających w przestrzeni Focka. Definicja przestrzeni Focka. Relacje komutacyjne dla operatorów anihilacji/kreacji.
- Pokazanie, że baza stanów przestrzeni Focka jest zbiorem zupełnym. Jedynka operatorowa w przestrzeni Focka.

- 4) Normalizacja stanów zsymetryzowanych i pokazanie roli uporządkowania bazy stanów jednocząstkowych w konstrukcji II kwantyzacji.
- 5) Wykorzystanie powyższych definicji w przypadku 3 cząstkowego problemu bozonowego i fermionowego. Pokazanie interpretacji operatora $a_i^\dagger a_i$ jako operatora liczby obsadzeń stanu jednocząstkowego $|i\rangle$.