

Mechanika kwantowa IIB: Zadania domowe #3

Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski — 23 listopada 2018



Info: * - oznacza, że zadanie to jest nieobowiązkowe

Zadanie 1: Prędkość elektronów w stanach Blocha

Równanie Schrödingera dla elektronów w stanach Blocha,

$$\left[\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + U(\mathbf{r}) \right] \psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \varepsilon_{n\mathbf{k}} \psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}),$$

gdzie n to numer pasma, a $\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, gdzie $u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ jest funkcją periodyczną o okresie odpowiadającym periodyczności kryształu, jest równoważne równaniu $\hat{H}_{\mathbf{k}} u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \varepsilon_{n\mathbf{k}} u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, gdzie hamiltonian Blocha jest dany równaniem

$$\hat{H}_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2}{2m} (-i\nabla + \mathbf{k})^2 + U(\mathbf{r}).$$

(a) Prędkość elektronów w stanach Blocha $\mathbf{v}_{n\mathbf{k}}$ jest kwantową wartością oczekiwaną operatora prędkości $\hbar\nabla/im$ na stanie $\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$. Pokazać, że

$$\mathbf{v}_{n\mathbf{k}} = \frac{\hbar}{m} \int d\mathbf{r} u_{n\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) (-i\nabla + \mathbf{k}) u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}).$$

(b) Zapisz hamiltonian Blocha dla pędu $\mathbf{k} + \mathbf{q}$ w postaci $\hat{H}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} = \hat{H}_{\mathbf{k}} + V_{\mathbf{k},\mathbf{q}}$. Oblicz $\varepsilon_{n,\mathbf{k}+\mathbf{q}}$ traktując $V_{\mathbf{k},\mathbf{q}}$ jako małe zaburzenie i pokaż, że w liniowym rzędzie w $\mathbf{q}$ otrzymujemy

$$\varepsilon_{n,\mathbf{k}+\mathbf{q}} = \varepsilon_{n,\mathbf{k}} + \hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{n\mathbf{k}},$$

co oznacza, że $\mathbf{v}_{n\mathbf{k}} = \frac{\partial \varepsilon_{n\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}}$.

Zadanie 2: Gęstość stanów

Gęstość stanów jest funkcją opisującą liczbę dostępnych stanów kwantowych na jednostkę energii. W praktyce gęstość stanów możemy obliczyć posługując się wzorem

$$D(\varepsilon) = \frac{1}{V} \sum_{\sigma} \sum_{i=1}^N \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{k}_i}) \xrightarrow[V \rightarrow \infty]{n=N/V=\text{const}} \sum_{\sigma} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{k}}),$$

gdzie V to objętość układu, a d to wymiarowość problemu. Dla swobodnych fermionów ($\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / 2m$) o spinie σ oblicz gęstości stanów w granicy termodynamicznej dla $d = 1, 2$ i 3 . Porównaj zależność $D(\varepsilon)$ od ε w tych przypadkach.

Zadanie 3: Osobliwości van Hove'a

Osobliwością van Hove'a nazywamy punkt w którym gęstość stanów dla krystalicznych ciał stałych nie jest funkcją gładką.

(a) Rozważ powierzchnię stałej energii zdefiniowaną równaniem $\varepsilon = \varepsilon_{\mathbf{k}}$. Pokaż, że $\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon_{\mathbf{k}}$ jest prostopadły do wszystkich wektorów leżących w płaszczyźnie równoległej to powierzchni stałej energii, a zatem wektor $\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon_{\mathbf{k}}$ jest normalny do powierzchni stałej energii.

(b) Powiedzmy, że mamy dwuwymiarowy kryształ dla którego w pobliżu punktu $\mathbf{k}$ odpowiada relacji dyspersji $\varepsilon_{\mathbf{k}} \approx \varepsilon_{max} - k^2$. Znajdź osobliwości, które pojawiają się w tym przypadku w gęstości stanów $D(\varepsilon)$.

(c) Powtórz rachunki dla analogicznej sytuacji w trójwymiarowym kryształ.

Zadanie 4: Półprzewodnik o nie parabolicznej relacji dyspersji

Relację dyspersji elektronu w paśmie przewodnictwa półprzewodnika często przybliża się parabolicznym wyrażeniem $\varepsilon_{\mathbf{k}} \approx \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$, gdzie m^* jest masą efektywną elektronu. Przybliżenie to dla dużych k nie daje dobrych wyników i należy do powyższego wyrażenia dodać poprawkę rzędu k^4 :

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} \approx \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \left(1 - \alpha \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \right),$$

gdzie parametr α mierzy odchylenie od paraboliczności.

(a) Oblicz gęstość stanów $D(\varepsilon)$ w tym przypadku w pierwszym rzędzie w parametrze α .

(b) Także w pierwszym rzędzie w parametrze α znajdź prędkość grupową $\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon(\mathbf{k})/\hbar$ w funkcji k .

(c) Policz energię wewnętrzną elektronów w takim półprzewodniku w zerowej temperaturze posługując się relacjami

$$E = \int_0^\infty \varepsilon D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon$$

oraz

$$N = \int_0^\infty D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon,$$

gdzie $f(\varepsilon) = [\exp(\varepsilon/k_B T) + 1]^{-1}$ jest rozkładem Fermiego-Diraca, przy czym $\lim_{T \rightarrow 0} f(\varepsilon) = \theta(\varepsilon_F - \varepsilon)$.

Zadanie 5: Białe karły. Granica Chandrasekhara

Gwiazdy ciągu głównego takie jak Słońce pozostają w równowadze dzięki równowadze pomiędzy ciśnieniem grawitacyjnym starającym się dokonać kolapsu gwiazdy, a ciśnieniem wywieranym przez promieniowanie produkowane w trakcie fuzji termojądrowej w jej wnętrzu. U kresu ich życia fuzja ustaje i zaczyna dominować grawitacja zgniatając je. Jeżeli dana gwiazda jest odpowiednio mało masywna ciśnienie Pauliego zdegenerowanego gazu elektronów w jej wnętrzu jest w stanie zrównoważyć ciśnienie grawitacyjne i zapobiegnać dalszemu kolapsowi. Powstała w ten sposób gwiazda jest nazywana *białym karłem*. Rozważmy prosty model takich gwiazd i przedyskutujemy ich stabilność.

(a) Energia całkowita białego karła może być zapisana w postaci $E = K + U$, gdzie K jest energią kinetyczną silnie zdegenerowanego gazu elektronów, a U jest grawitacyjną energią potencjalną gwiazdy. Przyjmując najprostszy model w którym gwiazda jest jednorodną kulą o promieniu R i masie M oblicz ile wynosi U w tym przypadku. Wnętrze białego karła składa się głównie z atomów takich jak C^{12} , O^{16} , etc., które zawierają równą liczbę protonów, neutronów i elektronów, czyli $M \approx 2Nm_p$, gdzie N jest liczbą elektronów, a m_p jest masą protonu ($m_p \approx m_n$, m_n - masa neutronu). Wzbudzenia termiczne dla zdegenerowanego gazu fermionów mogą zachodzić tylko w pobliżu powierzchni Fermiego, która dla olbrzymiej liczby fermionów jest pomijalna z wnętrzem morza Fermiego. Oznacza to, że możemy przybliżyć zdegenerowany gaz elektronów w białym karle przyjmując, że jego temperatura wynosi zero (mimo iż powierzchnia typowego białego karła ma temperaturę 25000 K!). Korzystając z tego przybliżenia oblicz K zakładając, że elektrony w tym przypadku są opisywane relacją dyspersji $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m_e$, gdzie m_e to masa elektronu.

(b) Znajdując minimum energii całkowitej E białego karła znajdź równowagowy promień R_* takiej gwiazdy. Jak zależy uzyskany promień w funkcji masy gwiazdy? Wyraż uzyskany wynik przy pomocy masy Słońca

$M_\odot$ i jego promienia $R_\odot$ w postaci $\frac{R_*}{R_\odot} = C \times f(\frac{M}{M_\odot})$, gdzie C to jakaś stała liczbowa, a $f(\cdot)$ to pewna funkcja.

(c) Im większą masę ma gwiazda tym większą muszą mieć energię kinetyczną elektrony w jej wnętrzu, aby zrównoważyć ciśnienie grawitacyjne. Oznacza to, że dla dostatecznie ciężkich gwiazd elektrony trzeba będzie traktować relatywistycznie, tj. $\varepsilon_k = \sqrt{\hbar^2 k^2 c^2 + m_e^2 c^4}$, gdzie c to prędkość światła. W przypadku ultrarelatywistycznym, tj. $p \gg m_e c$ uwzględniając dwa pierwsze wyrazy w rozwinięciu powyższego pierwiastka w ε_k oblicz energię kinetyczną K ultrarelatywistycznego silnie zdegenerowanego gazu elektronów.

(d) W przypadku ultrarelatywistycznym dla odpowiednio dużych mas gwiazdy M jej kolaps spowodowany ciśnieniem grawitacyjnym nie może zostać zrównoważony przez ciśnienie zdegenerowanego gazu w jej wnętrzu. Znajdź wartość masy krytycznej M_c przy której wygrywa przyciąganie grawitacyjne i wyraż ją przy pomocy masy Słońca $M_\odot$. Wynik ten jest nazywany *granica Chandrasekhara*, przy czym w swojej oryginalnej pracy z 1931 roku Chandrasekhar uwzględnił, że rozkład masy w realistycznej gwiazdzie nie jest jednorodny uzyskując tym samym wynik $M = 1.4 M_\odot$. Wynik ten jest niezwykle ważny dla astronomii obserwacyjnej. Mając białego karła w układzie podwójnym z inną masywną gwiazdą następuje transfer masy w kierunku białego karła. Osiągając masę przewidzianą przez Chandrasekhara wybucha on dając początek *supernowej typu Ia* o ściśle określonej jasności (jasność supernowej zależy od masy wybuchającej gwiazdy). Oznacza to, że tego typu supernowa może być wykorzystana jako *świeca standardowa* za pomocą której można wyznaczyć odległość do takiego obiektu.

Zadanie 6: Dwupasmowy model ciasnego wiązania

Rozwiązać jednowymiarowy model w przybliżeniu ciasnego wiązania dla sieci składającej się na przemian z atomów A i B dla którego hamiltonian jest dany równaniem:

$$\hat{H} = -t \sum_i \left(a_i^\dagger b_i + b_i^\dagger a_{i+1} + H.c. \right) + V_a \sum_i a_i^\dagger a_i + V_b \sum_i b_i^\dagger b_i,$$

gdzie operatory a_i i b_i są fermionowymi operatorami anihilacji odpowiednio dla podsieci A i B , t jest całką przeskoku, a V_i jest energią potencjalną elektronu na danym węźle.

(a) Zapisać ten hamiltonian w przestrzeni pędowej stosując dyskretną transformatę Fouriera dla operatorów kreacji i anihilacji.

(b) Zapisz hamiltonian w postaci macierzowej:

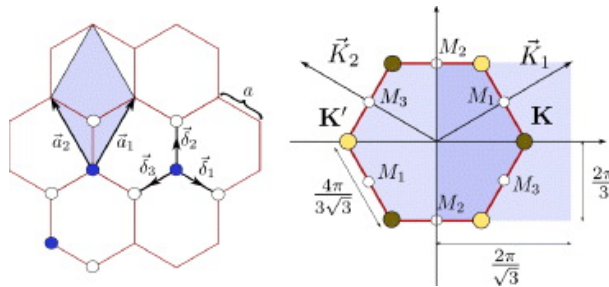
$$\hat{H} = \sum_{k \in 1BZ} \Psi_k^\dagger \mathcal{H}_k \Psi_k,$$

gdzie $\Psi_k = (a_k, b_k)^T$, a $1BZ$ to pierwsza strefa Brillouina.

(c) Znaleźć relację dyspersji dla tego hamiltonianu.

(d) Czy ten model ma przerwę energetyczną?

Zadanie 7: Model Haldane'a



Rozważyć *model Haldane'a* dla grafenu, który poza standardową częścią odpowiadającą przybliżeniu ciasnego wiązania dopuszcza także na hopping pomiędzy kolejnymi najbliższymi sąsiadami. Hamiltonian

w tym przypadku w przestrzeni rzeczywistej dany jest równaniem:

$$\hat{H}_{hal} = -t \sum_{\langle i,j \rangle} (a_i^\dagger b_j + H.c.) + \\ -t' \sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle} \left[(e^{i\phi} a_i^\dagger a_j + H.c.) + (e^{-i\phi} b_i^\dagger b_j + H.c.) \right],$$

gdzie $\langle i, j \rangle$ oznacza parę najbliższych sąsiadów, $\langle\langle i, j \rangle\rangle$ oznacza parę kolejnych najbliższych sąsiadów. Operatory a_i i b_i są fermionowymi operatorami anihilacji odpowiednio dla podsięci A i B , t i t' są odpowiednimi całkami przeskoku, a ϕ jest pewną fazą. $H.c.$ oznacza sprzężenie hermitowskie. Zwróćmy uwagę, że w powyższym przypadku całka przeskoku dla kolejnych najbliższych sąsiadów jest zespolona ($t_{NNN} = t' e^{i\phi}$). Jest to możliwe, gdy w naszym układzie zachodzi efekt Aharonowa-Bohma lub mamy do czynienia ze sprzężeniami spin-orbita. Model ten został wprowadzony przez Haldane'a w 1988 roku jako pierwszy przykład izolatora topologicznego w którym zachodzi kwantowy efekt Halla bez związanych z nim poziomów Landaua.

Przyjmując, że stała sieci w tym przypadku wynosi a należy:

(a) Zapisać ten hamiltonian w przestrzeni pędowej stosując dyskretną transformatę Fouriera dla operatorów kreacji i anihilacji.

(b) Zapisz hamiltonian w postaci macierzowej:

$$\hat{H}_{hal} = \sum_{\vec{k} \in BZ} \Psi_{\vec{k}}^\dagger \mathcal{H}_{\vec{k}} \Psi_{\vec{k}},$$

gdzie $\Psi_{\vec{k}} = (a_{\vec{k}}, b_{\vec{k}})^T$, a $1BZ$ to pierwsza strefa Brillouina.

(c) Znaleźć relację dyspersji dla tego hamiltonianu.

(d) Co będzie działo z przerwą energetyczną w punkcie Diraca (jest to punkt $\mathbf{K} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}a}(1, 0, 0)$ w strefie Brillouina) przy zmienianiu ϕ od 0 do π ?

(e) Pokaż, że macierz tego hamiltonianu można zapisać w postaci:

$$\mathcal{H}_{\vec{k}} = H_{\vec{k}}^0 \mathbb{1} + \vec{H}_{\vec{k}} \cdot \vec{\sigma},$$

gdzie $\vec{\sigma}$ jest wektorem zbudowanym z macierzy Pauliego, a $\mathbb{1}$ jest macierzą jednostkową. Pokazać, że w takim przypadku relację dyspersji można zapisać w postaci $\varepsilon_{\pm}(\mathbf{k}) = H_{\vec{k}}^0 \pm \sqrt{\vec{H}_{\vec{k}}^2}$.

(f) W powyższym modelu możemy dopisać wyrazy odpowiadające energii potencjalnej o następującej formie

$$\hat{H}_{pot} = (V + M) \sum_i a_i^\dagger a_i + (V - M) \sum_i b_i^\dagger b_i$$

Jak będzie wyglądał wyraz $H_{\vec{k}}^z$ z wektora $\vec{H}_{\vec{k}}$ przy uwzględnieniu tego wyrazu dla punktu $\mathbf{K} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}a}(1, 0, 0)$ i $\mathbf{K}' = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}a}(-1, 0, 0)$ w strefie Brillouina. Okazuje się, że jeżeli $H_{\vec{k}}^z$ ma taki sam znak w punkcie K i K' , wtedy możemy pokryć całą strefę Brillouina jedną funkcją falową. Natomiast gdy znak $H_{\vec{k}}^z$ w punkcie K i K' jest przeciwny sterfa Brillouina ma inną, nietrywialną topologię i nie jest możliwe opisanie jej jedną funkcją falową co oznacza, że model ten opisuje w tym przypadku izolator topologiczny. Korzystając z tej informacji znajdź wartość parametru M dla której następuje topologiczna przemiana fazowa.

Zadanie 8*: Prosty model izolatora topologicznego. Liczba Cherna

W tym zadaniu przyjrzymy się prostemu modelowi nietrywialnego dwupasmowego izolatora topologicznego i wprowadzimy niezmiennik topologiczny jakim jest *liczba Cherna*. Rozważany przez nas model jest zadany przez jądro macierzowe hamiltonianu o postaci

$$\mathcal{H}_{\vec{k}} = \begin{bmatrix} -2t \cos k_x - 2t \cos k_y - \mu, & \Delta(\sin k_x - i \sin k_y) \\ \Delta(\sin k_x + i \sin k_y), & 2t \cos k_x + 2t \cos k_y + \mu \end{bmatrix},$$

gdzie $\Delta > 0$, $t > 0$ i μ są rzeczywistymi parametrami (uwaga: μ nie ma tu nic wspólnego z potencjałem chemicznym). Powyższy hamiltonian odpowiada dwuwymiarowej sieci regularnej z dwoma stanami

kwantowymi w każdym z węzłów.

(a) Pokaż, że macierz tego hamiltonianu można zapisać w postaci:

$$\mathcal{H}_{\mathbf{k}} = H_{\mathbf{k}}^0 \mathbb{1} + \vec{H}_{\mathbf{k}} \cdot \vec{\sigma},$$

gdzie $\vec{\sigma}$ jest wektorem zbudowanym z macierzy Pauliego, a $\mathbb{1}$ jest macierzą jednostkową. Znajdź relacje dyspersji $E_{\pm}(\mathbf{k})$ i sprawdź czy istnieje przerwa energetyczna w tym przypadku.

(b) Pokaż, że wektor własny $\mathbf{u}_{-}^{(1)}(\mathbf{k})$ odpowiadający energii $E_{-}(\mathbf{k})$ jest postaci

$$\mathbf{u}_{-}^{(1)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mathcal{N}^{(1)}} \begin{pmatrix} H_{\mathbf{k}}^z - |\vec{H}_{\mathbf{k}}| \\ H_{\mathbf{k}}^x + iH_{\mathbf{k}}^y \end{pmatrix},$$

gdzie $\mathcal{N}^{(1)}$ jest stałą normalizacji. Pokaż, że uzyskana funkcja falowa jest źle zdefiniowana, gdy $H_{\mathbf{k}}^x = H_{\mathbf{k}}^y$ oraz $H_{\mathbf{k}}^z > 0$. Powyższą funkcję falową można przepisać mnożąc ją przez czynnik fazowy $e^{i\phi_{\mathbf{k}}}$, przy czym możemy, go wybrać na przykład jak niżej

$$e^{i\phi_{\mathbf{k}}} = \frac{\frac{H_{\mathbf{k}}^z + |\vec{H}_{\mathbf{k}}|}{H_{\mathbf{k}}^x + iH_{\mathbf{k}}^y}}{\left| \frac{H_{\mathbf{k}}^z + |\vec{H}_{\mathbf{k}}|}{H_{\mathbf{k}}^x + iH_{\mathbf{k}}^y} \right|}.$$

Pokaż w takim przypadku, że

$$\mathbf{u}_{-}^{(2)}(\mathbf{k}) = \mathbf{u}_{-}^{(1)}(\mathbf{k}) e^{i\phi_{\mathbf{k}}} = \frac{1}{\mathcal{N}^{(2)}} \begin{pmatrix} -H_{\mathbf{k}}^x + iH_{\mathbf{k}}^y \\ H_{\mathbf{k}}^z + |\vec{H}_{\mathbf{k}}| \end{pmatrix},$$

a następnie sprawdzić, że tym razem dla $H_{\mathbf{k}}^x = H_{\mathbf{k}}^y$ oraz $H_{\mathbf{k}}^z > 0$ funkcja falowa jest dobrze określona, ale za to jest źle określona w przypadku $H_{\mathbf{k}}^x = H_{\mathbf{k}}^y$ oraz $H_{\mathbf{k}}^z < 0$. Wynik ten oznacza, że strefę Brillouina trzeba podzielić na dwie części z dwoma różnymi funkcjami falowymi związanymi ze sobą transformacją cechowania taką, że $\mathcal{A}_{-}^{(2)}(\mathbf{k}) = \mathcal{A}_{-}^{(1)}(\mathbf{k}) + \nabla_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}}$, przy czym wektor $\mathcal{A}_{-}^{(i)}(\mathbf{k})$ jest tzw. *koneksją Berry'ego*.

Koneksję Berry'ego możemy zdefiniować za pomocą relacji

$$\mathcal{A}_{-}^{(i)}(\mathbf{k}) = -i \left\langle \mathbf{u}_{-}^{(i)}(\mathbf{k}) \left| \nabla_{\mathbf{k}} \right| \mathbf{u}_{-}^{(i)}(\mathbf{k}) \right\rangle,$$

a za jej pomocą możemy policzyć krzywiznę Berry'ego $\Omega_{-} = \nabla \times \mathcal{A}_{-}$, która jest związana z ważnym niezmiennikiem topologicznym jakim jest *liczba Cherna*

$$\nu_{Ch} = \frac{1}{2\pi} \oint_{BZ} d^2\mathbf{k} \cdot \Omega_{-} = \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial BZ} d\mathbf{k} \cdot \mathcal{A}_{-} \in \mathbb{Z},$$

gdzie ∂BZ to krawędź strefy Brillouina. Powyższy wzór jest odpowiednikiem *twierdzenia Gaussa-Bonneta* z topologii, które mówi o tym, że dla zwartej rozmaitości różniczkowej $\mathcal{M}$ całka powierzchniowa z jej lokalnej krzywizny jest związana z niezmiennikiem topologicznym zwanym *genusem* ν , czyli liczbą otworów znajdujących się w tej rozmaitości

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{M}} \Omega dS = 2(1 - \nu).$$

Na przykład dla kuli $\nu = 0$, a dla torusa $\nu = 1$. Wielkość $2(1 - \nu)$ jest nazywana charakterystyką Eulera $\chi(\mathcal{M})$ dla rozmaitości orientowalnej $\mathcal{M}$.

(c) Pokaż, że gdy $\mu < -4t$, wtedy $\nu_{Ch} = 0$. Następnie sprawdź co dzieje się z przerwą energetyczną $\Delta E = E_{+} - E_{-}$ w $\mathbf{k} = (\pi, \pi)$. Gdy przejdziemy do obszaru $-4t < \mu < 0$ okazuje się, że musimy tu uwzględnić, że musimy podzielić strefę Brillouina na dwa obszary $\mathcal{D}_1$ i $\mathcal{D}_2$ w których odpowiednio funkcja falowa $\mathbf{u}_{-}^{(1)}(\mathbf{k})$ lub $\mathbf{u}_{-}^{(2)}(\mathbf{k})$ jest nieosobliwa. Przyjmując, że obszar $\mathcal{D}_1$ jest małym kołem o środku w $\mathbf{k} = (0, 0)$. Pokaż, że w tym przypadku

$$\oint_{BZ} d^2\mathbf{k} \cdot \Omega_{-} = - \oint_{\partial \mathcal{D}_1} d\theta \partial_{\theta} \phi = \phi(\theta = 0) - \phi(\theta = 2\pi).$$

Następnie zakładając, że koło $\mathcal{D}_1$ ma mały promień ($k \sim 0$) pokaż, że $\phi_{\mathbf{k}} = -\theta$ i korzystając z tego wyniku udowodnij, że liczba Cherna w tym przypadku wynosi $\nu_{Ch} = 1$, czyli mamy doczynienia z topologicznie nietrywialnym izolatorem.

Warto tu dodać, że suma liczb Cherna dla wszystkich pasm zawsze musi być równa zero, co oznacza, że dla pasma E_{+} liczba Cherna dla $-4t < \mu < 0$ jest równa $\nu_{Ch} = -1$.