

1 (a) korzystając z twierdzenia Blocha

mamy:

$$\vec{\sigma}_{n\vec{k}} = \langle \psi_{n\vec{k}} | \frac{\hbar}{im} \vec{\nabla} | \psi_{n\vec{k}} \rangle = \int d\vec{r} (u_{n\vec{k}}^*(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}) \cdot \frac{\hbar \vec{\nabla}}{im} \cdot$$

$$\cdot (u_{n\vec{k}}(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}) = \frac{\hbar}{im} \int d\vec{r} u_{n\vec{k}}^*(\vec{r}) (-i\vec{\nabla} + \vec{k}) u_{n\vec{k}}(\vec{r})$$

(b) Mamy:

$$\hat{H}_{\vec{k}+\vec{q}} = \frac{\hbar^2}{2m} (-i\vec{\nabla} + \vec{k} + \vec{q})^2 + U(\vec{r}) = \hat{H}_{\vec{k}} + \frac{\hbar^2}{m} (-i\vec{\nabla} + \vec{k}) \cdot \vec{q} + \frac{\hbar^2 q^2}{2m} =$$

$$= \hat{H}_{\vec{k}} + V_{\vec{k},\vec{q}}$$

W zerowym rzędzie dostajemy po prostu, że

$$\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}}^{(0)} = \varepsilon_{n\vec{k}}$$

w pierwszym rzędzie rachunkowe zabiegi dostajemy:

$$\varepsilon_{n,\vec{k}+\vec{q}}^{(1)} = \langle u_{\vec{k}} | V_{\vec{k},\vec{q}} | u_{\vec{k}} \rangle = \hbar \vec{q} \cdot \frac{\hbar}{m} \langle u_{n\vec{k}} | (-i\vec{\nabla} + \vec{k}) | u_{n\vec{k}} \rangle + \mathcal{O}(q^2) =$$

$$= \hbar \vec{q} \cdot \vec{\sigma}_{n\vec{k}} + \mathcal{O}(q^2)$$

czyli dla małych $\vec{q}$: $\varepsilon_{n,\vec{k}+\vec{q}} = \varepsilon_{n\vec{k}} + \hbar \vec{q} \cdot \vec{\sigma}_{n\vec{k}} + \mathcal{O}(q^2)$

$$\textcircled{2} \quad D(\epsilon) = \sum_{\sigma} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \delta(\epsilon - \epsilon_{\vec{k}}) = g_{\sigma} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \delta(\epsilon - \epsilon_{\vec{k}})$$

We współrzędnych sferycznych mamy: $\left\{ \begin{array}{l} g_{\sigma} = 2\sigma + 1 \\ \text{deg. spinowa} \end{array} \right\}$

$$d^d k = \begin{cases} 2dk & \text{dla } d=1 \\ 2\pi k dk & \text{dla } d=2 \\ 4\pi k^2 dk & \text{dla } d=3 \end{cases} \quad k = |\vec{k}|$$

w przypadku jednowymiarowym wektor falowy może być zarówno dodatni jak i ujemny, dlatego musimy dopisać czynnik 2 ($k \geq 0$).

$$\epsilon_{\vec{k}} = \epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{2m\epsilon_k}}{\hbar}, \quad dk = \left(\frac{m}{2\hbar^2 \epsilon_k} \right)^{1/2} d\epsilon_k,$$

czyli

$$D(\epsilon) = \begin{cases} \frac{g_{\sigma}}{2\pi} \int_0^{\infty} 2 \delta(\epsilon - \epsilon_k) \left(\frac{m}{2\hbar^2 \epsilon_k} \right)^{1/2} d\epsilon_k = g_{\sigma} \frac{\sqrt{2m}}{2\pi\hbar} \epsilon^{-1/2}, & d=1 \\ \frac{g_{\sigma}}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} 2\pi \delta(\epsilon - \epsilon_k) \frac{\sqrt{2m\epsilon_k}}{\hbar} \left(\frac{m}{2\hbar^2 \epsilon_k} \right)^{1/2} d\epsilon_k = g_{\sigma} \frac{m}{2\pi\hbar^2}, & d=2 \\ \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} 4\pi \frac{2m\epsilon_k}{\hbar^2} \delta(\epsilon - \epsilon_k) \left(\frac{m}{2\hbar^2 \epsilon_k} \right)^{1/2} d\epsilon_k = g_{\sigma} \frac{\sqrt{2m^3}}{2\pi^2\hbar^3} \epsilon^{1/2}, & d=3 \end{cases}$$

$$D_{1d}(\epsilon) \sim \epsilon^{-1/2}, \quad D_{2d}(\epsilon) \sim \epsilon^0, \quad D_{3d}(\epsilon) \sim \epsilon^{1/2}$$

③ (a) Niech $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3) = \vec{s}(t)$ będzie parametrem zająca krzywej leżącej na powierzchni zdefiniowanej równaniem $\epsilon_{n\vec{k}} = \epsilon$. Ponieważ $\epsilon_{n\vec{k}=\vec{s}(t)}$ jest stałą o wartości ϵ dla każdego t , czyli pochodne tej funkcji muszą zniknąć: (notacja: $\epsilon_{n\vec{k}} \equiv \epsilon_n(\vec{k})$)

$$\frac{d}{dt} \epsilon_n(\vec{s}(t)) = \sum_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial k_{\alpha}} \frac{ds_{\alpha}}{dt} = \vec{\nabla} \epsilon_n(\vec{s}(t)) \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = 0 \quad (*)$$

Ponieważ $\vec{s}(t)$ może być dowolną krzywą na powierzchni $\epsilon_{n\vec{k}} = \epsilon$ jest to także prawdziwe dla stycznej do tej krzywej $\frac{d\vec{s}}{dt}$.

Oznacza to, że równanie (*) może być ogólnie spełnione tylko gdy $\vec{\nabla} \epsilon_n(\vec{s}(t))$ jest wektorem normalnym do tej powierzchni.

(b) Biorąc $\epsilon_{n\vec{k}} = \epsilon_{\max} - k^2$ oraz $\sigma = \frac{1}{2}$,

czyli $g_{\sigma} = 2$ mamy:

$$D(\epsilon) = \frac{2}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} 2\pi k \delta(\epsilon - \epsilon_{\max} + k^2) dk =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\max} + k^2) d(k^2) = \frac{1}{2\pi} \Theta(\varepsilon_{\max} - \varepsilon),$$

czyli gęstość stanów wynosi 0 dla $\varepsilon > \varepsilon_{\max}$

oraz $\frac{1}{2\pi}$ dla $\varepsilon < \varepsilon_{\max}$. W $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$

znajduje się zatem osobliwość van Hove'a.

(c) W przypadku trójwymiarowym mamy

$$\begin{aligned} D(\varepsilon) &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} 4\pi k^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\max} + k^2) dk = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} k \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\max} + k^2) d(k^2) = \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{\varepsilon_{\max} - \varepsilon} \Theta(\varepsilon_{\max} - \varepsilon) \end{aligned}$$

Tu także w $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$ mamy do czynienia

z osobliwością van Hove'a, ale tym razem

gęstość stanów jest w tym punkcie ciągła.

$$(4) \quad \varepsilon_{\vec{k}} \approx \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \left(1 - \alpha \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \right) \quad (*)$$

chcemy odwrócić tę relację, dlatego

$$\text{postulujemy, że } \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \approx \varepsilon_{\vec{k}} (1 + A \varepsilon_{\vec{k}} + \dots)$$

wstawiamy to do (*) i otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\vec{k}} &= \varepsilon_{\vec{k}} (1 + A \varepsilon_{\vec{k}} + \dots) \left(1 - \alpha \varepsilon_{\vec{k}} (1 + A \varepsilon_{\vec{k}} + \dots) \right) = \\ &= \varepsilon_{\vec{k}} (1 + A \varepsilon_{\vec{k}}) (1 - \alpha \varepsilon_{\vec{k}} - \alpha A \varepsilon_{\vec{k}}^2 + \dots) = \varepsilon_{\vec{k}} (1 + A \varepsilon_{\vec{k}} - \alpha \varepsilon_{\vec{k}} + \dots), \end{aligned}$$

$$\text{czyli } A - \alpha = 0 \Rightarrow A = \alpha$$

Mamy zatem, $\bar{\epsilon}$ $\frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \approx \epsilon_{\vec{k}} (1 + \alpha \epsilon_{\vec{k}})$,
czyli

$$k \approx \frac{[2m^* \epsilon_{\vec{k}} (1 + \alpha \epsilon_{\vec{k}})]^{1/2}}{\hbar} \approx \frac{(2m^* \epsilon_{\vec{k}})^{1/2}}{\hbar} \left(1 + \frac{\alpha}{2} \epsilon_{\vec{k}}\right),$$

$\uparrow$ d-matka!

zatem

$$k dk = \frac{m^*}{\hbar^2} (1 + 2\alpha \epsilon_{\vec{k}}) d\epsilon_{\vec{k}} \quad (**)$$

$$\begin{aligned} (a) \quad D(\epsilon) &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \delta(\epsilon_{\vec{k}} - \epsilon) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \delta(\epsilon_{\vec{k}} - \epsilon) = \\ &\approx \frac{(2m^*)^{1/2}}{\pi^2 \hbar^3} m^* \int_0^\infty d\epsilon' (1 + 2\alpha \epsilon') \left(1 + \frac{\alpha}{2} \epsilon'\right) \delta(\epsilon' - \epsilon) \approx \\ &\approx \frac{\sqrt{2} m^{*3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \epsilon^{1/2} \left(1 + \frac{5}{2} \alpha \epsilon\right) \end{aligned}$$

(b) Korzystając z (**) dostajemy:

$$v(k) = \frac{1}{\hbar} \frac{d\epsilon_{\vec{k}}}{dk} \approx \frac{\hbar k}{m^*} (1 - 2\alpha \epsilon_{\vec{k}})$$

(c) Energię wewnętrzne będziemy chcieli
powiązać z koncentracją cząstek n .

Rachunki wykonamy w pierwszym rzędzie

w α : $\left(\nu_0 = \frac{\sqrt{2} m^{*3/2}}{\pi^2 \hbar^3}\right)$

$$N = V \int_0^\infty d\epsilon D(\epsilon) \theta(\epsilon_F - \epsilon) d\epsilon \stackrel{T=0}{=} V \nu_0 \int_0^{\epsilon_F} \epsilon^{1/2} \left(1 + \frac{5}{2} \alpha \epsilon\right) d\epsilon =$$

$$= \frac{2}{3} \nu_0 V \varepsilon_F^{3/2} \left(1 + \frac{3}{2} \alpha \varepsilon_F\right), \text{ czyli}$$

$$n = \frac{2}{3} \nu_0 \varepsilon_F^{3/2} \left(1 + \frac{3}{2} \alpha \varepsilon_F\right)$$

Odwroćmy teraz relację wyrażając tym samym

ε_F przez n . Po pierwsze: $\downarrow$ może α

$$\underbrace{\left(\frac{3}{2} \frac{n}{\nu_0}\right)^{2/3}}_{\eta \text{ - oznaczenie}} = \varepsilon_F \left(1 + \alpha \frac{3}{2} \varepsilon_F\right)^{2/3} \approx \varepsilon_F (1 + \alpha \varepsilon_F)$$

η - oznaczenie

Postulujemy, że $\varepsilon_F = \eta (1 + A\eta + \dots)$

i wstawiamy wyżej, wtedy

$$\eta = \eta (1 + A\eta) \left(1 + \alpha (1 + A\eta) \eta\right) = \eta (1 + A\eta) (1 + \alpha \eta + \dots) =$$

$$= \eta (1 + A\eta + \alpha \eta + \dots), \text{ czyli } A + \alpha = 0 \Rightarrow A = -\alpha,$$

czyli w pierwszym rzędzie w α mamy, że

$$\varepsilon_F = \left(\frac{3}{2} \frac{n}{\nu_0}\right)^{2/3} \left(1 - \alpha \left(\frac{3}{2} \frac{n}{\nu_0}\right)^{2/3} + \dots\right)$$

teraz możemy znaleźć energię wewnętrzno ε_F :

$$U = E = V \int_0^{\infty} D(\varepsilon) \varepsilon \theta(\varepsilon_F - \varepsilon) d\varepsilon = V \int_0^{\varepsilon_F} \nu_0 \varepsilon^{3/2} \left(1 + \frac{5}{2} \alpha \varepsilon\right) d\varepsilon =$$

$$= \frac{2}{5} V \nu_0 \varepsilon_F^{5/2} \left(1 + \frac{25}{14} \alpha \varepsilon_F\right)$$

$$\varepsilon_F^{5/2} = \eta^{5/2} (1 - \alpha \eta)^{5/2} \stackrel{\text{małe } \alpha}{\approx} \eta^{5/2} \left(1 - \frac{5}{2} \alpha \eta + \dots\right)$$

$$u = \frac{U}{V} = \frac{2}{5} v_0 \eta^{5/2} \left(1 - \frac{5}{2} \alpha \eta\right) \left(1 + \frac{25}{14} \alpha \eta (1 - \alpha \eta)\right) =$$

$$\approx \frac{2}{5} v_0 \eta^{5/2} \left(1 - \frac{5}{2} \alpha \eta\right) \left(1 + \frac{25}{14} \alpha \eta + \dots\right) \approx$$

$$\approx \frac{2}{5} v_0 \eta^{5/2} \left(1 - \frac{5}{2} \alpha \eta + \frac{25}{14} \alpha \eta + \dots\right) =$$

$$= \frac{2}{5} v_0 \left(\frac{3}{2} \frac{n}{v_0}\right)^{5/3} \left(1 - \frac{5}{7} \alpha \left(\frac{3}{2} \frac{n}{v_0}\right)^{2/3} + \dots\right),$$

czyli $U = V \frac{2}{5} v_0 \left(\frac{3}{2} \frac{n}{v_0}\right)^{5/3} \left(1 - \frac{5}{7} \alpha \left(\frac{3}{2} \frac{n}{v_0}\right)^{2/3} + \dots\right)$

Zwróćmy uwagę, że w zerowym momencie

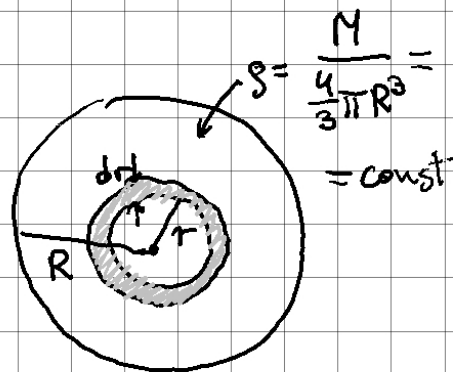
$U \propto n^{5/3} V$, czyli tak być powinno.

⑤ (a) Zaczniemy od policzenia grawitacyjnej energii potencjalnej gwiazdy:

$$U = - \int_0^R \frac{G \left(\frac{4}{3} \pi \rho r^3\right) (4 \pi r^2 \rho dr)}{r} =$$

$$= - \frac{16}{3} \pi^2 G \rho^2 \int_0^R r^4 dr = - \frac{16}{15} \pi^2 \rho^2 G R^5 =$$

$$= - \frac{3}{5} \frac{G M^2}{R}$$



Możemy teraz analogicznie jak na
ćwiczeniach obliczyć energię zdegenerowanego
gazu elektronów:

$$n = \frac{N}{V} = 2 \int_0^{k_F} \frac{4\pi k^2}{(2\pi)^3} dk = \frac{1}{3\pi^2} k_F^3 \Rightarrow k_F = \frac{p_F}{\hbar} = (3\pi^2)^{1/3} \left(\frac{N}{V}\right)^{1/3},$$

przy czym w dalszych rachunkach konystrujemy
z oznaczenia $p_F = \Lambda \left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}$, gdzie $\Lambda = (3\pi^2)^{1/3} \hbar$,
ponadto pamiętamy, że $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Energia kinetyczna wynosi zatem

$$K = 2 \int_0^{k_F} V \frac{4\pi k^2}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} dk = \frac{3V}{\Lambda^3} \int_0^{p_F} \frac{p^2}{2m_e} p^2 dp =$$

$$= \frac{3}{5} \frac{V}{\Lambda^3} \frac{p_F^5}{2m_e} = \frac{3}{5} N \frac{\Lambda^2}{2m_e} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3},$$

przy czym pamiętamy, że $M = 2m_p N$.

Energia całkowita białego karła w funkcji
promienia gwiazdy ma w tym przypadku

postać:

$$E = \underbrace{\frac{A}{R^2}}_K - \underbrace{\frac{B}{R}}_U, \text{ gdzie}$$

$$A = \frac{3}{20} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m_e} \left(\frac{M}{m_p} \right)^{5/3}$$

$$B = \frac{3}{5} G M^2$$

(b) Promień równowagowy białego karła R_x minimalizuje energię, czyli:

$$\left. \frac{dE}{dR} \right|_{R^*} = \left(\frac{B}{R^2} - \frac{2A}{R^3} \right) \Big|_{R^*} = 0 \Rightarrow R^* = \frac{2A}{B},$$

$$\text{czyli } R_x = \frac{(9\pi)^{2/3}}{8} \frac{\hbar^2}{m_e} \frac{1}{G m_p^{5/3} M^{1/3}},$$

wynik ten można przepisać wykorzystując promień $R_\odot = 7 \times 10^5 \text{ km}$ i masę $M_\odot = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$ Słońca, co daje:

$$\frac{R_x}{R_\odot} = 0,010 \left(\frac{M_\odot}{M} \right)^{1/3},$$

czyli biały karł o masie naszego Słońca ma promień wynoszący 7000 km, co jest niedużo promienia Ziemi.

(c) Energia kinetyczna elektronów
 zależy się z masą gwiazdy
 jak $K \propto M^{4/3}$. Oznacza to, że
 dla dostatecznie masywnej gwiazdy
 elektrony stają się relatywistyczne.

Rozważmy przypadek ultra-relatywistyczny,

tj. $p \gg m_e c$, wtedy

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{3V}{\Lambda^3} \int_0^{p_F} (p^2 c^2 + m_e^2 c^4)^{1/2} p^2 dp \quad \leftarrow p \gg m_e c \\
 &\approx \frac{3V}{\Lambda^3} \int_0^{p_F} \left(p^3 + \frac{m_e^2 c^2}{2} p + \dots \right) dp = \\
 &\approx \frac{3}{4} \frac{V c}{\Lambda^3} \left[p_F^4 + m_e^2 c^2 p_F^2 + \dots \right]
 \end{aligned}$$

(d) Energia całkowita w tym przypadku

wynosi:

$$E \approx \frac{A-B}{R} + C R,$$

gdzie $A = \frac{3}{8} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \hbar c \left(\frac{M}{m_p} \right)^{4/3}$

$$B = \frac{3}{5} G M^2$$

$$C = \frac{3}{4} \frac{1}{(9\pi)^{1/3}} \frac{m_e^2 c^3}{\hbar} \left(\frac{M}{m_p} \right)^{2/3}$$

Tak jak poprzednio minimum energii odpowiada promieniowi równowagowemu R_* .

W przypadku ultrarelatywistycznym minimum istnieje tylko, gdy $A-B > 0$. W przeciwnym

wypadku $A-B < 0$ ciśnienie zdegenerowanego

gazu elektronów jest zbyt małe by

zrównoważyć ciśnienie grawitacyjne

i gwiazda kontynuuje zapadanie

do gwiazdy neutronowej lub czarnej dziury.

Z warunku $A=B$ możemy wyznaczyć

masę krytyczną białego karła M_c także,

że gdy $M < M_c$, wtedy biały karol

jest stabilny. Dostajemy, więc

$$M_c = \frac{15}{64} (5\pi)^{1/2} \frac{(\hbar c/G)^{1/2}}{m_p^2} = 1,72 M_\odot$$

Przy uwzględnieniu niejednorodnego rozkładu

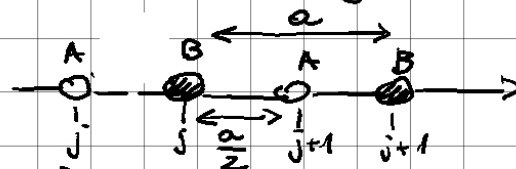
masy otrzymuje się $M_c = 1,4 M_\odot$ i

wynik ten jest nazywany granicą Chandrasekhara.

$$\textcircled{6} \quad \hat{H} = -t \sum_i (a_i^\dagger b_i + b_i^\dagger a_{i+1} + \text{h.c.}) + V_a \sum_i a_i^\dagger a_i + V_b \sum_i b_i^\dagger b_i$$

Niech położenie j -tego węzła w podsięci A wynosi:

$$r = a x_j + r_a,$$



a w podsięci B wynosi: $r = a x_j + r_b$

(a) Konsystujemy z dyskretną transformacją Fouriera:

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i a_i e^{ikx_i}, \quad a_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k a_k e^{-ikx_i}$$

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i b_i e^{ikx_i}, \quad b_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k b_k e^{-ikx_i}$$

Mamy, zatem:

$$\sum_j a_j^\dagger b_j = \sum_j \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k a_k^\dagger e^{-ik(a_j + r_a)} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k'} b_{k'} e^{ik'(a_j + r_b)} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_k \sum_{k'} a_k^\dagger b_{k'} \sum_j e^{-ik(a_j + r_a) + ik'(a_j + r_b)} =$$

$$= \sum_{kk'} a_k^\dagger b_{k'} \delta_{kk'} e^{-ikr_a} e^{ik'r_b} = \sum_k a_k^\dagger b_k e^{ik(r_b - r_a)}$$

Analogicznie dostajemy $\sum_j b_j^\dagger a_{j+1} = \sum_k b_k^\dagger a_k e^{ik(r_b - r_a)}$,

gdy $r_b - r_a = \frac{a}{2}$, wtedy

$$\sum_j a_j^\dagger b_j = \sum_k e^{ika/2} a_k^\dagger b_k$$

$$\sum_j b_j^\dagger a_{j+1} = \sum_k b_k^\dagger a_k e^{-ika/2}$$

$$\sum_i a_i a_i = \sum_k a_k^\dagger a_k$$

analogicznie dla $\sum_i b_i^\dagger b_i$

Zatem hamiltonian ma postać:

$$\hat{H} = -t \sum_k \left(a_k^\dagger b_k e^{ika/2} + b_k^\dagger a_k e^{ika/2} + b_k^\dagger a_k e^{-ika/2} + a_k^\dagger b_k e^{-ika/2} \right) + V_a \sum_k a_k^\dagger a_k + V_b \sum_k b_k^\dagger b_k =$$

$$= -2t \sum_k \left[a_k^\dagger b_k \cos\left(\frac{ka}{2}\right) + b_k^\dagger a_k \cos\left(\frac{ka}{2}\right) \right] + \sum_k \left(V_a a_k^\dagger a_k + V_b b_k^\dagger b_k \right)$$

(b) Hamiltonian ten możemy zapisać przy pomocy macierzy:

$$\hat{H} = \sum_k (a_k^\dagger, b_k^\dagger) \mathcal{H}_{\vec{k}} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}, \text{ gdzie}$$

$$\mathcal{H}_{\vec{k}} = \begin{bmatrix} V_a & -2t \cos\left(\frac{ka}{2}\right) \\ -2t \cos\left(\frac{ka}{2}\right) & V_b \end{bmatrix}$$

(c) Relacje dyspersji znajdziemy rozwiązując równanie własne:

$$\det[\mathcal{H}_{\vec{k}} - \epsilon \mathbb{1}] = 0, \text{ co prowadzi}$$

do wyniku

$$\epsilon_{\pm} = \frac{V_a + V_b}{2} \pm \sqrt{\left(2t \cos\left(\frac{ka}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{V_a - V_b}{2}\right)^2}$$

(d) Model ten posiada przewidywanie, która nie zanika się dla dowolnego k :

$$\Delta E = \epsilon_+ - \epsilon_- = 2 \sqrt{\left(2t \cos\left(\frac{ka}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{V_a - V_b}{2}\right)^2}$$

7) Zadanie to będzie dla nas okazją do barokiej szeregółowego przyjrzenia się grafenom.

(a, b, c i d)

Zacniemy od części hamiltonianu opisującej najbliższych sąsiadów:

$$\hat{H}_{NN} = -t \sum_{\langle ij \rangle} (a_i^\dagger b_j + b_j^\dagger a_i) =$$

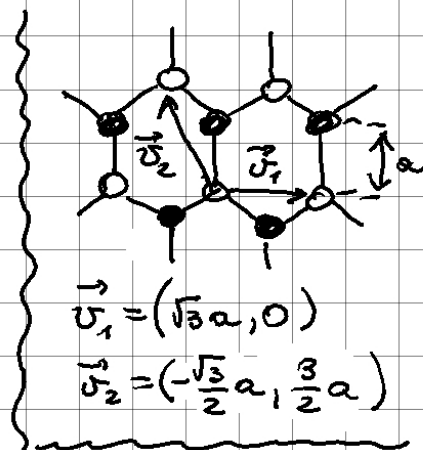
$$= -t \sum_i \left(a_{\vec{r}_i}^\dagger b_{\vec{r}_i + \vec{e}_1} + a_{\vec{r}_i}^\dagger b_{\vec{r}_i + \vec{e}_2} + a_{\vec{r}_i}^\dagger b_{\vec{r}_i + \vec{e}_3} + h.c. \right),$$

gdzie

$$\vec{e}_1 = (0, a)$$

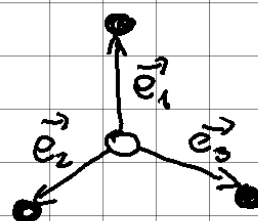
$$\vec{e}_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, -\frac{a}{2} \right)$$

$$\vec{e}_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, -\frac{a}{2} \right)$$



$$\vec{v}_1 = (\sqrt{3}a, 0)$$

$$\vec{v}_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{3}{2}a \right)$$



Wykonujemy dyskretną transformację Fouriera:

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_i} a_i, \quad a_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_i} a_k$$

dla operatorów $b^\dagger$ i b mamy analogiczne relacje.

$$-t \sum_i a_{\vec{r}_i}^\dagger b_{\vec{r}_i + \vec{e}_1} = -\frac{t}{N} \sum_i \sum_{k, k'} a_k^\dagger e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_i} b_{k'} e^{-i\vec{k}' \cdot (\vec{r}_i + \vec{e}_1)} =$$

$$= -t \sum_{kk'} a_k^+ b_{k'} e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{e}_1} \frac{1}{N} \sum_i e^{i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{r}_i} =$$

$$= -t \sum_{kk'} a_k^+ b_{k'} e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{e}_1} \delta_{kk'} = -t \sum_k a_k^+ b_k e^{-i\vec{k} \cdot \vec{e}_1}$$

Analogicznie postępujemy z pozostałymi
wiazaniami i dostajemy:

$$\hat{H}_{NN} = -t \sum_i \left(a_{\vec{r}_i}^+ b_{\vec{r}_i + \vec{e}_1} + a_{\vec{r}_i}^+ b_{\vec{r}_i + \vec{e}_2} + a_{\vec{r}_i}^+ b_{\vec{r}_i + \vec{e}_3} + h.c. \right) =$$

$$= -t \sum_k a_k^+ b_k \left(e^{-i\vec{k} \cdot \vec{e}_1} + e^{-i\vec{k} \cdot \vec{e}_2} + e^{-i\vec{k} \cdot \vec{e}_3} \right) + h.c. =$$

$$= \sum_k (a_k^+ b_k^+) \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{H}_{12} \\ \mathcal{H}_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}, \text{ gdzie}$$

$$\mathcal{H}_{12}(\vec{k}) = -t \sum_{j=1}^3 \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{e}_j)$$

$$\mathcal{H}_{21}(\vec{k}) = -t \sum_{j=1}^3 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{e}_j)$$

Diagonalizujemy ten hamiltonian:

$$\det(\mathcal{H}_{\vec{k}} - \epsilon \mathbb{1}) = 0 \Rightarrow \epsilon_{\pm}(\vec{k}) = \pm |\mathcal{H}_{12}(\vec{k})| =$$

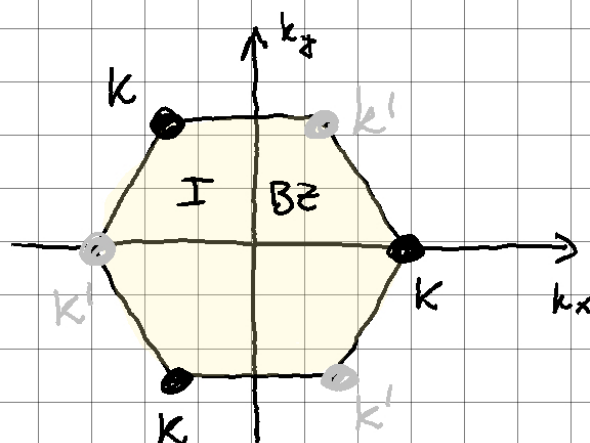
$$= \pm |t| \sqrt{3 + 2\cos(\sqrt{3}k_x a) + 4\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_x a\right)\cos\left(\frac{3}{2}k_y a\right)}$$

Pierwsza energetyczna:

$$\Delta \epsilon = \epsilon_+ - \epsilon_- = 2|t| \sqrt{3 + 2\cos(\sqrt{3}k_x a) + 4\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_x a\right)\cos\left(\frac{3}{2}k_y a\right)}$$

W tym przypadku
pierwsza strefa

Brillouina jest
przedstawiona obok.



Nas będą szczególnie interesowały
punkty $\vec{K} = \left(\frac{4\pi}{3\sqrt{3}a}, 0\right)$ i $\vec{K}' = \left(-\frac{4\pi}{3\sqrt{3}a}, 0\right)$

W punktach tych oba pasma energetyczne
są zdegenerowane, tj. $\epsilon_+ = \epsilon_- = 0$, co

oznacza zanikanie przerwy energetycznej.

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon(\vec{K}) &= 2|t| \sqrt{3 + 2\cos\left(\frac{\sqrt{3}4\pi}{3\sqrt{3}a}a\right) + 4\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{4\pi}{3\sqrt{3}a}a\right)\cos\left(\frac{3}{2}\cdot 0\right)} = \\ &= 2|t| \sqrt{3 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 4\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = 2|t| \sqrt{3 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 4\left(-\frac{1}{2}\right)} = 0 \end{aligned}$$

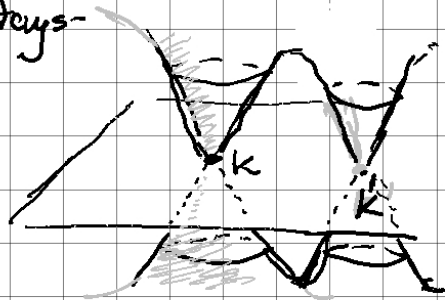
Przypomnijmy sobie dla tego punkty $\vec{K}$ i $\vec{K}'$

są szczególnie przez rozwiniecie $\epsilon_{\pm}(\vec{k})$

w pobliżu $\vec{K}$:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\pm}(\vec{K} + \vec{q}) &= \pm |t| \left(3 + 2\cos\left(\sqrt{3}\left(\frac{4\pi}{3\sqrt{3}a} + q_x\right)a\right) + 4\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{4\pi}{3\sqrt{3}a} + q_x\right)a\right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \cos\left(\frac{3}{2}q_y a\right) \right)^{1/2} \approx \pm \frac{3}{2}|t|a \sqrt{q_x^2 + q_y^2} + \mathcal{O}(q^2) = \pm \frac{3}{2}|t|eq + \mathcal{O}(q^2) \end{aligned}$$

Relacje dyspersji w otoczeniu punktu K i K' jest stożkowe. Jest to charakterystyczna relacje dyspersji dla materiałów relatywistycznych, dlatego punkty K i K' nazywamy punktami Diraca.



W pobliżu punktu K macierz hamiltonianu ma postać:

$$\mathcal{H}_{\vec{K}+\vec{q}} = \frac{3}{2} \text{ta} \begin{pmatrix} 0 & q_x - i q_y \\ q_x + i q_y & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(q^2) = \frac{3}{2} \text{ta}(q_x \sigma_x + q_y \sigma_y) = \hbar v_F \vec{q} \cdot \vec{\sigma}$$

Natomiast w pobliżu punktu K' mamy:

$$\mathcal{H}_{\vec{K}'+\vec{q}} = -\frac{3}{2} \text{ta} \begin{pmatrix} 0 & q_x + i q_y \\ q_x - i q_y & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(q^2) = -\frac{3}{2} \text{ta}(q_x \sigma_x - q_y \sigma_y) = -\hbar v_F \vec{q} \cdot (\sigma_x \vec{\sigma} \sigma_x)$$

powyższe hamiltoniany opisują fermiony Weyla o precyzyjnie określonych chiralnościami.

Warto tu dodać, że punkty Diraca są stabilne dla sieci heksagonalnej dopóki

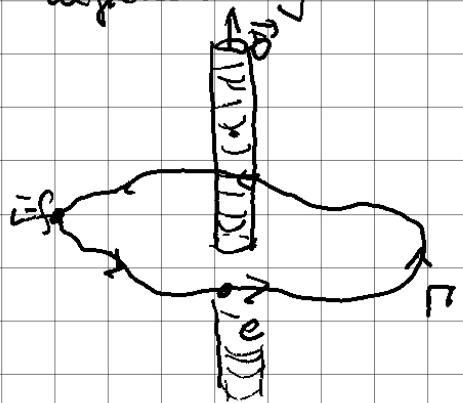
symetria inwersji ($r \rightarrow -r$) oraz symetria odbicia w czasie ($t \rightarrow -t$) są zachowane.

Teraz зайmiemy się częścią odpowiadającą kolejnym najbliższym sąsiadom.

Tak jak to było wspomniane w treści zadania jednym ze sposobów na

wprowadzenie zespokłego hoppingu jest efekt Aharonowa - Bohma. Jeżeli cząstka porusza się po zamkniętej krzywej, wtedy faza którą nabywa po wykonaniu pełnego okrążenia jest proporcjonalna do strumienia pola magnetycznego przechodzącego przez powierzchnię rozpiętą na wyznaczonym konturze.

$$\phi = \frac{e}{\hbar} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{e}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$$



zespólny hopping także symetrie
odbicia w czasie, bo $\vec{B} \rightarrow -\vec{B}$ po
zastosowaniu tej symetrii.

$$\hat{H}_{NNN} = -t' e^{i\phi} \sum_i \left(a_{\vec{r}_i}^+ a_{\vec{r}_i + \vec{v}_1} + a_{\vec{r}_i + \vec{v}_1}^+ a_{\vec{r}_i - \vec{v}_3} + a_{\vec{r}_i - \vec{v}_3}^+ a_{\vec{r}_i} \right) +$$

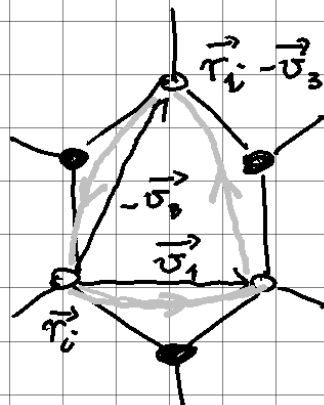
$$+ h.c. + (a \rightarrow b \quad ; \quad \phi \rightarrow -\phi),$$

ponadto

$$\vec{v}_1 = (\sqrt{3}a, 0)$$

$$\vec{v}_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{3}{2}a\right)$$

$$\vec{v}_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, -\frac{3}{2}a\right)$$



Wykonujemy transformację Fouriera analogicznie

jak dla $\hat{H}_{NN}$ i otrzymujemy:

$$\hat{H}_{NNN} = -t' e^{i\phi} \sum_k a_k^+ a_k \sum_{j=1}^3 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{v}_j} + h.c. + (a \rightarrow b \quad ; \quad \phi \rightarrow -\phi) =$$

$$= -2t' \sum_k a_k^+ a_k \sum_j \cos(\vec{k} \cdot \vec{v}_j - \phi) - 2t' \sum_k b_k^+ b_k \sum_j \cos(\vec{k} \cdot \vec{v}_j + \phi),$$

czyli

$$\hat{H} = \hat{H}_{NN} + \hat{H}_{NNN} = \sum_k (a_k^+, b_k^+) \underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{H}_{11} & \mathcal{H}_{12} \\ \mathcal{H}_{21} & \mathcal{H}_{22} \end{pmatrix}}_{\mathcal{H}_{\vec{k}}} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix},$$

gdzie $\mathcal{H}_{12} = -t \sum_{j=1}^3 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{e}_j}$, $\mathcal{H}_{21} = \mathcal{H}_{12}^*$

$$\mathcal{H}_{11} = -2t' \sum_{j=1}^3 \cos(\vec{k} \cdot \vec{v}_j - \phi)$$

$$\mathcal{H}_{22} = -2t' \sum_{j=1}^3 \cos(\vec{k} \cdot \vec{v}_j + \phi)$$

(d) ie) Powyższy hamiltonian możemy przepisać w następującej postaci:

$$\mathcal{H}_{\vec{k}} = H_{\vec{k}}^0 \mathbb{1} + \vec{H}_{\vec{k}} \cdot \vec{\sigma} = H_{\vec{k}}^0 \mathbb{1} + H_{\vec{k}}^x \sigma_x + H_{\vec{k}}^y \sigma_y + H_{\vec{k}}^z \sigma_z,$$

gdzie $H_{\vec{k}}^0 = \frac{\mathcal{H}_{11} + \mathcal{H}_{22}}{2} = -2t' \cos\phi \sum_{j=1}^3 \cos(\vec{k} \cdot \vec{v}_j)$

$$H_{\vec{k}}^z = \frac{\mathcal{H}_{11} - \mathcal{H}_{22}}{2} = -2t' \sin\phi \sum_{j=1}^3 \sin(\vec{k} \cdot \vec{v}_j)$$

$$H_{\vec{k}}^x = \text{Re}[\mathcal{H}_{21}] = -t \sum_{j=1}^3 \cos(\vec{k} \cdot \vec{e}_j)$$

$$H_{\vec{k}}^y = \text{Im}[\mathcal{H}_{21}] = -t \sum_{j=1}^3 \sin(\vec{k} \cdot \vec{e}_j)$$

Diagonalizując ten hamiltonian dostajemy:

$$\varepsilon_{\pm}(\vec{k}) = H_{\vec{k}}^0 \pm \sqrt{(H_{\vec{k}}^x)^2 + (H_{\vec{k}}^y)^2 + (H_{\vec{k}}^z)^2} = H_{\vec{k}}^0 \pm |\vec{H}_{\vec{k}}|$$

Pierwa energetyczna wynosi wtedy:

$$\Delta E(\vec{k}) = 2 \sqrt{(H_{\vec{k}}^x)^2 + (H_{\vec{k}}^y)^2 + (H_{\vec{k}}^z)^2}$$

W punkcie $\vec{K}$ dostajemy:

$$\Delta E(\vec{K}) = 2|H_{\vec{K}}^z| \stackrel{!}{=} 6\sqrt{3} t' \sin \phi$$

$$H_{\vec{K}}^z = -3\sqrt{3} t' \sin \phi$$

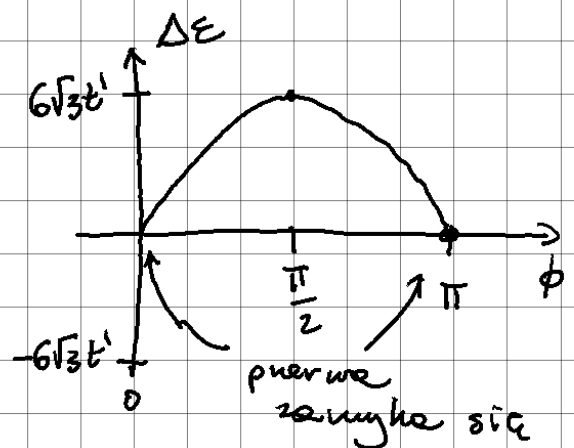
w punkcie $\vec{K}'$ dostajemy to samo,
ale $H_{\vec{K}'}^z = 3\sqrt{3} t' \sin \phi$.

Zwróćmy uwagę, że

w punktach K i K'

wyraz $H_{\vec{K}}^z$ ma przeciwne

znaki. Oznacza to, że



nie możemy zdefiniować jednej funkcji
falonej dla całej strefy Brillouina.

Ponadto $H_{\vec{K}}^z = H_{\vec{K}'}^z$ tylko, wtedy gdy

$\phi = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Wartość ta odpowiada

zerowaniu się przerwy energetycznej.

$$(f) \hat{H}_{\text{pot}} = (V+M) \sum_i a_i^\dagger a_i + (V-M) \sum_i b_i^\dagger b_i$$

Ponieważ linia rozrostek jest zachowywana,

wieć $c_{\text{to}} n \sim V$ jest tywny i daje $V \cdot N$,

więc wyraz ten zaniedbamy.

$$\hat{H}_{\text{pot}} = M \sum_i a_i^\dagger a_i - M \sum_i b_i^\dagger b_i = \sum_k (a_k^\dagger, b_k^\dagger) M \sigma_z \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$$

W związku z tym wyraz H_k^z i $H_{k'}^z$

przy uwzględnieniu $\hat{H}_{\text{pot}}$ obostajemy:

$$H_k^z = M - 3\sqrt{3} t' \sin \phi \quad \text{dla punktu } K$$

$$H_{k'}^z = M + 3\sqrt{3} t' \sin \phi \quad \text{dla punktu } K'.$$

Gdy $|M| < |3\sqrt{3} t' \sin \phi|$ układ jest izolatorem topologicznym, bo nie możemy pokryć całej strefy Brillouina jedną funkcją falową (H_k^z zmienia znak).

Gdy $|M| > |3\sqrt{3} t' \sin \phi|$ układ jest trywialny topologicznie. Gdy

$M = 3\sqrt{3} t' \sin \phi$ mamy do czynienia z topologiczną przemianą fazową.

$$\textcircled{8^*} \quad \mathcal{H}_{\vec{k}} = \begin{pmatrix} -2t \cos k_x - 2t \cos k_y - \mu, & \Delta(\sin k_x - i \sin k_y) \\ \Delta(\sin k_x + i \sin k_y), & 2t \cos k_x + 2t \cos k_y + \mu \end{pmatrix}$$

(a) Zapiszemy powyższy hamiltonian w postaci:

$$\mathcal{H}_{\vec{k}} = H_k^0 \mathbb{1} + H_k^x \sigma_x + H_k^y \sigma_y + H_k^z \sigma_z$$

w naszym przypadku:

$$H_z^0 = 0, \quad H_x^x = \Delta \sin k_x, \quad H_y^y = \Delta \sin k_y,$$

$$H_z^z = -2t \cos k_x - 2t \cos k_y - \mu$$

Podobnie jak poprzednio relacje dyspersji:

$$\text{wynosi: } \varepsilon_{\pm}(\vec{k}) = \pm |\vec{H}_{\vec{k}}| = \pm \sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2}$$

(b) Wektory własne znajdujemy z równania:

$$\begin{bmatrix} H_z + |\vec{H}|, & H_x - iH_y \\ H_x + iH_y, & -H_z + |\vec{H}| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gdy $H_x + iH_y \neq 0$, wtedy

$$\vec{u}_{-}^{(1)}(\vec{k}) = \begin{pmatrix} H_z - |\vec{H}| \\ H_x + iH_y \end{pmatrix} \frac{1}{\omega^{(1)}}$$

Gdy $H_x - iH_y \neq 0$, wtedy

$$\vec{u}_{-}^{(2)}(\vec{k}) = \frac{1}{\omega^{(2)}} \begin{pmatrix} -H_x + iH_y \\ H_z + |\vec{H}| \end{pmatrix}$$

Rozważmy sytuację $H_x(\vec{k}) = H_y(\vec{k}) = 0, H_z > 0$

$$\vec{u}_{-}^{(1)} = \frac{1}{\omega^{(1)}} \begin{pmatrix} H_z - |H_z| \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega^{(1)}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cały wektor własny jest osobliwy
 przy takich założeniach. Powyższy
 problem pojawia się, gdy $k_x = k_y = \pi$:

$$H_x = \Delta \sin(k_x) = \Delta \sin(\pi) = 0$$

$$H_y = \Delta \sin k_y = \Delta \sin \pi = 0$$

$$H_z = -2t \cosh k_x - 2t \cosh k_y - \mu = 4t - \mu > 0 \Rightarrow 4t > \mu$$

Wektor własny możemy przekształcić
 mnożąc go przez czynnik fazowy (nie zmienia
 to wartości oczekiwanych obserwacji).

$$\exp(i\phi_k) = \left(\frac{H_z + |\vec{H}|}{H_x + iH_y} \right) / \left| \frac{H_z + |\vec{H}|}{H_x + iH_y} \right|$$

$$u_-^{(2)} = u_-^{(1)} e^{i\phi_k} = \frac{1}{\mathcal{N}^{(1)}} \left(\frac{H_z - |\vec{H}|}{H_x + iH_y} \right) \frac{\frac{H_z + |\vec{H}|}{H_x + iH_y}}{\left| \frac{H_z + |\vec{H}|}{H_x + iH_y} \right|} =$$

$$= \frac{1}{\mathcal{N}^{(2)}} \left(\frac{-H_x^2 - H_y^2}{H_x + iH_y} \right) = \frac{1}{\mathcal{N}^{(2)}} \begin{pmatrix} -H_x + iH_y \\ H_z + |\vec{H}| \end{pmatrix}$$

ta funkcja fahowa jest osobliwa,
 gdy $H_x = H_y = 0$, ale $H_z < 0$, ale
 nie wykazuje osobliwosci dla $H_x = H_y = 0$
 oraz $H_z > 0$. Powyzsza sytuacja

odpowiada $k_x = k_y = 0$, wtedy

$$H_x = H_y = \Delta \sin(0) = 0$$

$$H_z = -2t \cos(0) - 2t \cos(0) - \mu = -4t - \mu < 0 \Rightarrow \mu > -4t$$

Oznacza to, ze musimy podzielic
 strefe Brillouina na dwa obszary

opisywane przez funkcje fahowe

$\vec{u}_{-}^{(1)}$ i $\vec{u}_{-}^{(2)}$. Sa one poteznane

transformacja cechowania:

$$\vec{u}_{-}^{(2)} = \vec{u}_{-}^{(1)} e^{i\phi_{\vec{k}}}$$

gdzie $\vec{A}_{-}^{(2)}(\vec{k}) = \vec{A}_{-}^{(1)}(\vec{k}) + \vec{\nabla} \phi_{\vec{k}}$,

ponadto $\vec{A}_{-}^{(i)} = -i \langle u_{-}^{(i)}(\vec{k}) | \vec{\nabla}_{\vec{k}} | u_{-}^{(i)}(\vec{k}) \rangle$

jest koneksja Berry'ego.

(c) Rozważany model posiada 4 szerególne punkty $\vec{k}_1 = (0, 0)$, $\vec{k}_2 = (\pi, \pi)$, $\vec{k}_3 = (\pi, 0)$ i $\vec{k}_4 = (0, \pi)$ dla których

$H_x = H_y = 0$, w punktach tych mamy:

$$H_z(\vec{k}_1) = -4t - \mu$$

$$H_z(\vec{k}_3) = -\mu$$

$$H_z(\vec{k}_2) = 4t - \mu$$

$$H_z(\vec{k}_4) = -\mu$$

Dla przypadku $\mu < -4t$ we wszystkich czterech punktach $H_z > 0$, czyli możemy całą strefę Brillouina opisać jedną funkcją folową $\vec{u}_-^{(2)}$.

$$\nu_{ch} = \frac{1}{2\pi} \oint_{BZ} d^2\vec{k} \cdot \vec{\Omega}_- = \oint_{\partial BZ} d\vec{u} \cdot \vec{A}_- = 0$$

↑
sytuacja
trywialna
topologicznie

W przypadku, gdy $\mu = -4t$ mamy:

$$H_x = H_y = H_z = 0 \quad \text{w} \quad \vec{k} = (\pi, \pi)$$

oznacza to, że przenosi się

w tym punkcie, w tym przypadku

układ zachowuje się jak półmetal
i nie możemy określić niezmiennika
topologicznego. Ponadto zmiana topologii
układu zawsze związana jest z zmianami
przerwy energetycznej.

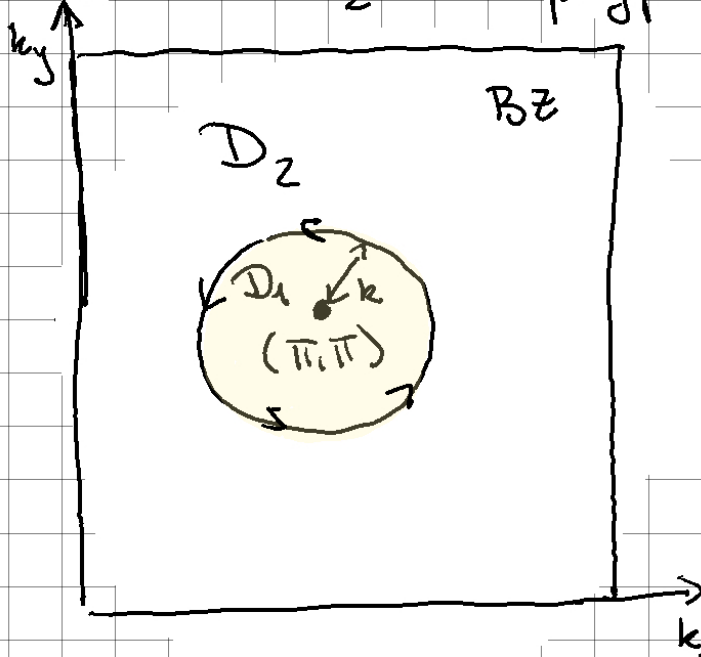
W przypadku, gdy $\mu \in [-4t, 0]$ mamy:

$$H_z < 0 \quad \text{dla } \vec{k}_2 = (\pi, \pi)$$

$$\text{i } H_z > 0 \quad \text{dla } \vec{k}_1, \vec{k}_3 \text{ i } \vec{k}_4$$

Dzielimy sferę Brillouina na
obszar D_1 wokół $\vec{k}_2$ i na

obszar D_2 w przypadku pozostałej jej części.



W obszarze D_1
funkcje faliowe
 $\vec{u}_-^{(1)}(\vec{k})$ jest
nieosobliwa, a

w obszarze D_2
funkcje faliowe $\vec{u}_-^{(2)}$
jest nieosobliwa.

Manu, więc

$$\oint_{\partial D_2} d^2 \vec{k} \cdot \vec{\Omega}_- = \iint_{D_1} d^2 \vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A}_-^{(1)} + \iint_{D_2} d^2 \vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A}_-^{(2)} =$$

$$= \oint_{\partial D_1} \vec{A}_-^{(1)} \cdot d\vec{k} + \oint_{\partial D_2} \vec{A}_-^{(2)} \cdot d\vec{k} = \oint_{\partial D_1} (\vec{A}_-^{(1)} - \vec{A}_-^{(2)}) \cdot d\vec{k} =$$

$$= - \oint_{\partial D_1} \vec{\nabla}_k \phi_{\vec{k}} \cdot d\vec{k} = - \int_0^{2\pi} \partial_\theta \phi d\theta = \phi(\theta=0) - \phi(\theta=2\pi) =$$

↑
parametryzacja konturu = $2\pi v_{ch}$

↑
 $\vec{A}_-^{(2)} = \vec{A}_-^{(1)} + \vec{\nabla}_k \phi_{\vec{k}}$

Jeżeli D_1 wybierzemy jako mały okrąg o środku w $\vec{k}_2$ i promieniu $k \ll 0$, wtedy

$$H_x = \Delta \sin k_x = \Delta k_x + \mathcal{O}(k^2)$$

$$H_y = \Delta \sin k_y = \Delta k_y + \mathcal{O}(k^2)$$

$$H_z = -2t(\cos k_x + \cos k_y) - \mu = -2t - \mu + \mathcal{O}(k^2),$$

wtedy

$$k_x + i k_y = k e^{i\theta}$$

$$e^{i\phi_{\vec{k}}} = \frac{\left(\frac{H_z + |\vec{H}|}{H_x + i H_y} \right)}{\left| \frac{H_z + |\vec{H}|}{H_x + i H_y} \right|} = \frac{|H_x + i H_y|}{H_x + i H_y} = \frac{|k_x + i k_y|}{k_x + i k_y} \downarrow = e^{-i\theta},$$

czyli $\phi(k) = -\theta$, wtedy

$$\oint_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k} \cdot \vec{\Omega} = - \int_0^{2\pi} \partial_\theta \phi_z d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi,$$

czyli $\nu_{ch} = 1$ w tym przypadku,
więc mamy do czynienia z
topologicznie nie trywialnym izolatorem.