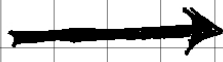


MECHANIKA KWANTOWA II B

ĆW. #3 23.10.2018

Podsumowanie wykładu:

1 cząstka



N cząstek

$$|\alpha\rangle \in \mathcal{H}_1$$

pr. Hilberta

$\{|\alpha\rangle\}$ - baza ortogonalna

$$|\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle \in \mathcal{H}_N \equiv \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{H}_1^{(i)}$$

||

$$|\alpha_1\rangle \otimes \dots \otimes |\alpha_N\rangle$$

stan produktowy

$\{|\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle\}$ - baza

(Anty) symetryzacja stanów bazowych:

$$P_{\{B\}} |\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle = \frac{1}{N!} \sum_P \sum_{\substack{\text{suma po permutacjach} \\ \text{zbiore } \{1, 2, \dots, N\}}} \underbrace{P}_{\substack{\text{znak permutacji } P \\ \text{dla fermionów}}} |\alpha_{p_1}\rangle \otimes |\alpha_{p_2}\rangle \otimes \dots \otimes |\alpha_{p_N}\rangle$$

$\sum = \begin{cases} +1, \text{ bozony} \\ -1, \text{ fermiony} \end{cases}$

Wprowadzamy oznaczenia:

$$\mathcal{B}_N = P_B \mathcal{H}_N - N\text{-cząstkowa podprzestrzeń}$$

bozonowa (symetryczna) w $\mathcal{H}_N$

$$\mathcal{F}_N = P_F \mathcal{H}_N - N\text{-cząstkowa podprzestrzeń}$$

fermionowa (antysymetryczna) w $\mathcal{H}_N$

Ponadto definiujemy stan:

$$|\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle = \sqrt{N!} P_{\{B\}} |\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle$$

Teraz zdefiniujemy operator kreacji:

$$a_{\alpha}^{\dagger} |\alpha_1 \dots \alpha_N\rangle = |\alpha \alpha_1 \dots \alpha_N\rangle$$

działa w odpowiedniej przestrzeni Focka:

- Bosony: $\mathcal{B} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{B}_N$, $a_{\alpha}^{\dagger}: \mathcal{B}_N \rightarrow \mathcal{B}_{N+1}$
- Fermiony: $\mathcal{F} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{F}_N$, $a_{\alpha}^{\dagger}: \mathcal{F}_N \rightarrow \mathcal{F}_{N+1}$
 $\uparrow$
 przestrzeń Focka

Operator anihilacji definiujemy jako

operator hermitowski sprzężony do $a_{\alpha}^{\dagger}$:

$$a_{\alpha} |\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle = \sum_{i=1}^N \overset{\substack{\uparrow \\ \text{ilość transpozycji} \\ \text{potrzebna do przestawienia} \\ \text{stanu } |\alpha_i\rangle \text{ na początek}}}{\delta_{\alpha, \alpha_i}} |\alpha_1, \dots, \overset{\substack{\leftarrow \text{oznacza brak tego stanu}}}{\alpha_i}, \dots, \alpha_N\rangle$$

ilość transpozycji
potrzebna do przestawienia
stanu $|\alpha_i\rangle$ na początek

operator ten także działa w odpowiednich przestrzeniach Focka:

- bosony, $a_{\alpha}: \mathcal{B}_N \rightarrow \mathcal{B}_{N-1}$
- fermiony, $a_{\alpha}: \mathcal{F}_N \rightarrow \mathcal{F}_{N-1}$

Na operatory kreacji i anihilacji
nawracamy relacje komutacyjne:

$$\left. \begin{aligned} [a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger]_{-\zeta} &= a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger - \zeta a_\beta^\dagger a_\alpha^\dagger = 0 \\ [a_\alpha, a_\beta]_{-\zeta} &= a_\alpha a_\beta - \zeta a_\beta a_\alpha = 0 \\ [a_\alpha, a_\beta^\dagger]_{-\zeta} &= a_\alpha a_\beta^\dagger - \zeta a_\beta^\dagger a_\alpha = \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \right\} \zeta = \begin{cases} +1, \text{ bozony} \\ -1, \text{ fermiony} \end{cases}$$

Ponadto: $a_\alpha |0\rangle = 0$
 $\uparrow$ stan próżni (bez cząstek)

① Operator tożsamościowy w pręstnieu Focka

Pokazać, że $\frac{1}{N!} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} |\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle \langle \alpha_1, \dots, \alpha_N| = \mathbb{1}$

w pręstnieu B_N i F_N . Uogólnić
ten wynik na pręstnieu Focka B i F .

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} |\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle \langle \alpha_1, \dots, \alpha_N| &= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} |\alpha_1 \times \alpha_1| \otimes \dots \otimes |\alpha_N \times \alpha_N| = \\ &= \left(\sum_{\alpha_1} |\alpha_1 \times \alpha_1| \right) \otimes \dots \otimes \left(\sum_{\alpha_N} |\alpha_N \times \alpha_N| \right) = \underset{\mathbb{1}}{\mathbb{1}_{(N)}} \otimes \dots \otimes \underset{\mathbb{1}}{\mathbb{1}_{(N)}} = \mathbb{1} \text{ w } \mathcal{H}_N \end{aligned}$$

$$\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} |\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle \{\alpha_1, \dots, \alpha_N| = N! \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{F}} \mathcal{P}_{\{\mathbb{F}\}} |\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle (\alpha_1, \dots, \alpha_N| \mathcal{P}_{\{\mathbb{F}\}} =$$

$$\mathcal{P}_{\{\mathbb{F}\}}^+ = \mathcal{P}_{\{\mathbb{F}\}}$$

$$= N! \mathcal{P}_{\{\mathbb{F}\}} \mathbb{1}_{\{\mathbb{F}\}} = N! \mathbb{1}_{\{\mathbb{F}\}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N!} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} |\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle \{\alpha_1, \dots, \alpha_N| = \mathbb{1} \text{ w } \mathcal{B}_N / \mathcal{F}_N$$

w przypadku przestrzeni Focka musimy
wysumować operatory tożsamościowe
dla wszystkich przestrzeni odpowiadających
różnym liczbom cząstek, tj.:

$$\mathbb{1}_{\text{Fock}} = \mathbb{1}_{(0 \text{ cząstek})} + \mathbb{1}_{(1 \text{ cząstka})} + \mathbb{1}_{(2 \text{ cząstki})} + \dots =$$

$$= |0\rangle\langle 0| + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} |\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle \{\alpha_1, \dots, \alpha_N| =$$

$$\equiv \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} |\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle \{\alpha_1, \dots, \alpha_N|$$

2

Normalizacja stanów zesymetryzowanych

Pokazać, że $\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_N | \alpha_1, \dots, \alpha_N\} = \sum_p \prod_{\alpha} (n_{\alpha}!)$,

gdy $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_N)$ jest permutacją $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$

oraz $\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_N | \alpha_1, \dots, \alpha_N\} = 0$ w przeciwnym przypadku.

Rozwiązanie:

$$\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_N | \alpha_1, \dots, \alpha_N\} = N! (\alpha'_1, \dots, \alpha'_N | \mathcal{P}_{\{\frac{N}{2}\}}^2 | \alpha_1, \dots, \alpha_N) =$$

$$= N! (\alpha_1, \dots, \alpha_N | \mathcal{P}_{\{\frac{N}{2}\}} | \alpha_1, \dots, \alpha_N) =$$

$$= \frac{N!}{N!} \sum_p \sum_{\alpha} \langle \alpha'_1 | \alpha_{p_1} \rangle \dots \langle \alpha'_N | \alpha_{p_N} \rangle,$$

ponieważ baza $\{|\alpha\rangle\}$ jest ortonormalna,

wiec $\langle \alpha'_i | \alpha_{p_i} \rangle \neq 0$, gdy $\alpha'_i = \alpha_{p_i}$

dla każdego $i \in \{1, \dots, N\}$

W przypadku fermionów maksymalne

obsadzenie danego stanu to 1 (zasad Pauliego)

w związku z tym:

$$\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_N | \alpha_1, \dots, \alpha_N\} = (-1)^p$$

znaki permutacji
 $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$
 $\downarrow$
 $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_N)$

w przypadku bozonów możemy mieć wielokrotne absorbienie n_i danego stanu $|\alpha_i\rangle$. W tym przypadku musimy policzyć ilość wszystkich możliwych permutacji zbioru $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ w zbiór $\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_N\}$, co daje:

$$\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_N | \alpha_1, \dots, \alpha_N\} = n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_p!$$

konstansując z tego, że

$$n_i \in \{0, 1\} \quad \text{dla fermionów}$$

$$n_i \in \mathbb{N} \quad \text{dla bozonów}$$

mamy:

$$\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_N | \alpha_1, \dots, \alpha_N\} = \sum_{\alpha} \prod_{\alpha} (n_{\alpha}!),$$

gdzie $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ jest permutacją $\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_N\}$

oraz

$$\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_N | \alpha_1, \dots, \alpha_N\} = 0$$

w przeciwnym przypadku, bo wtedy

w co najmniej jednym przypadku $\langle \alpha_i | \alpha_{p_i} \rangle = 0$.

Wprowadzamy w związku z tym oznaczenie:

$$|\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{\prod \alpha_i!}} |\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle$$

ponadto nazywamy stanami fermionowymi określone kolejności np. wraz z własną energią własną odpowiadającą temu stanowi jednoznacznie, tj. $|\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle$
 $\uparrow$
 $|\alpha_1\rangle$ ma większą energię niż $|\alpha_N\rangle$.

Z definicji mieliśmy, że:

$$a_i^+ |\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle \stackrel{\text{d.f.}}{=} |\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle,$$

czyli

$$a_i^+ |\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle = \frac{\sqrt{n_i+1}}{\sqrt{(n_1!)\dots(n_i!)(n_{i+1})\dots}} |\alpha_i, \alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle =$$

$$= \sqrt{n_i+1} |\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_N\rangle \}^{i-1} \leftarrow \text{ilość koniecznych transpozycji, aby umieścić } |\alpha_i\rangle \text{ na swoim miejscu}$$

$$a_{\alpha_i} |\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_N\rangle = \left((n_1!) \dots (n_{i-1}!) \cdot n_i \dots \right)^{-1/2} \cdot$$

$$\sum_{j=1}^N j^{j-1} \delta_{\alpha_j, \alpha_i} |\alpha_1, \dots, \overset{\vee}{\alpha_j}, \dots, \alpha_N\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n_i}} \sum_{j=1}^N j^{j-1} \delta_{\alpha_i, \alpha_j} |\alpha_1, \dots, \overset{\vee}{\alpha_j}, \dots, \alpha_N\rangle$$

③ 3 bezspinowe bozony w pudle

3 bezspinowe bozony znajdują się w jednowymiarowym pudle o długości L z okresowymi warunkami brzegowymi.

Dana jest baza stanów $\{|k\rangle\}$, gdzie

$$k = \frac{2\pi n}{L} \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad \text{przy czym funkcje}$$

$$\text{falowe to } \langle x | k \rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp(ikx). \text{ Rozważyć}$$

trzy bozony w stanach $k_1 = 0$,

$$k_2 = \frac{2\pi}{L} \quad \text{oraz} \quad k_2 = k_3.$$

(a) Wypisz $|k_1, k_2, k_2\rangle$ oraz $|k_1, k_2, k_2\rangle$

(b) Oblicz $\{k_1, k_2, k_2 | k_1, k_2, k_2\}$ oraz

$$\langle k_1, k_2, k_2 | k_1, k_2, k_2 \rangle$$

(c) Jak działają operatory a_k na $|k_1, k_2, k_3\rangle$ dla dowolnego k ?

(d) Oblicz $a_i^\dagger a_i |k_1, k_2, k_3\rangle$ dla $i = k_1, k_2$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} (a) \quad |k_1, k_2, k_3\rangle &= \sqrt{3!} P_0 |k_1, k_2, k_3\rangle = \\ &= \frac{\sqrt{3!}}{3!} \sum_p (+1)^p |k_{p1}, k_{p2}, k_{p3}\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3!}} \left[|k_1 k_2 k_3\rangle + |k_3 k_1 k_2\rangle + |k_2 k_3 k_1\rangle + \right. \\ &\quad \left. |k_3 k_2 k_1\rangle + |k_1 k_3 k_2\rangle + |k_2 k_1 k_3\rangle \right] = \end{aligned}$$

$k_2 = k_3$

↓

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \left[|011\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |110\rangle + \right.$$

↑
wygodne oznaczenie

$$+ |011\rangle + |101\rangle \Big] =$$

$$|k_1, k_2, k_3\rangle = |n_1, n_2, n_3\rangle,$$

$$\text{gdzie } k_i = \frac{2\pi n_i}{L}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}} \left[|011\rangle + |101\rangle + |110\rangle \right]$$

$$|k_1, k_2, k_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{\prod_k n_k!}} |k_1, k_2, k_2\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{6}} [|110\rangle + |101\rangle + |011\rangle] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} [|110\rangle + |101\rangle + |011\rangle]$$

(b)

$$\{k_1, k_2, k_2 | k_1, k_2, k_2\} = \frac{4}{6} \left[\underset{\substack{\parallel \\ 1}}{(011|011)} + \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{(101|101)} + \right. \\ \left. + \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{(110|110)} + \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{(011|101)} + \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{(101|011)} + \dots \right] =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$$

$$\langle k_1, k_2, k_2 | k_1, k_2, k_2 \rangle = \frac{1}{2} \{k_1, k_2, k_2 | k_1, k_2, k_2\} = \\ = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$(c) \quad a_\alpha | \alpha_1, \dots, \alpha_N \rangle = \sum_{i=1}^N \zeta^{i-1} a_{\alpha_i} | \alpha_1, \dots, \overset{\vee}{\alpha_i}, \dots, \alpha_N \rangle$$

$$a_{k_i} \equiv a_{n_i} \quad , \text{ угли } \sim$$

$$a_{k_1} \equiv a_0$$

$$a_{k_2} = a_{k_3} \equiv a_1$$

$$a_0 |011\rangle = \sum_{i=1}^3 (+1)^{i-1} \delta_{0,i} |0\dots\overset{i}{1}\rangle =$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{niezerowe} \\ \text{tylko dla pierwszej pozycji}}}{1} |11\rangle$$

$$a_1 |011\rangle = \sum_{i=1}^3 (+1)^{i-1} \delta_{1,i} |01\overset{i}{1}\rangle =$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ i=2}}{|01\rangle} + \underset{\substack{\uparrow \\ i=3}}{|01\rangle} = 2|01\rangle$$

$$a_n |011\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ n \neq 0,1}}{=} 0$$

$$(d) \quad a_0^+ a_0 |011\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} a_0^+ a_0 |011\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} a_0^+ |11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |011\rangle = 1 \cdot |011\rangle$$

$$a_1^+ a_1 |011\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} a_1^+ a_1 |011\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} a_1^+ 2|01\rangle =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} |101\rangle = \frac{2}{\sqrt{2}} |011\rangle = 2 \cdot |011\rangle$$

ustawienie
w dobrej kolejności

Komentarz: operator $a_k^+ a_k$ międy obsadzenie stanu $|k\rangle$

④ 3 elektrony w pudle

3 elektrony o spinie $\frac{1}{2}$ znajdujące się w jednowymiarowym pudle

o długości L z okresowymi warunkami brzegowymi. Rozważyć ich stan

$|\psi\rangle = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle$, przy czym elektrony znajdują się w stanach jednoznaczowych: $\alpha_1 = (0, \uparrow)$, $\alpha_2 = (0, \downarrow)$ oraz $(\frac{2\pi}{L}, \uparrow)$, gdzie $\alpha_i = (k_i, \sigma_i)$.

Posiadając na $|\psi\rangle$ następujące cyfry operatorami $a_{\frac{2\pi}{L}, \uparrow}^+$; $a_{\frac{2\pi}{L}, \downarrow}^+$; $a_{0\uparrow}$; $a_{0\downarrow}$; $a_{\frac{2\pi}{L}, \uparrow}$ oraz $a_{\frac{2\pi}{L}, \downarrow}$.

Rozwiązanie:

Niech $\alpha_4 = (\frac{2\pi}{L}, \downarrow)$

$$|\psi\rangle = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle + |\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2\rangle + |\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1\rangle - |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1\rangle - |\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2\rangle - |\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3\rangle \right]$$

$$a_{\alpha_3}^+ |\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3\rangle = |\alpha_3 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3\rangle =$$

$$= |\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_3\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{(-1)^2} = -|\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_3\rangle = 0$$

zakaz
Pauliego!
nie może być
dwóch fermionów
w tym samym stanie

$$a_{\alpha_4}^+ |\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3\rangle = |\alpha_4 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3\rangle = -|\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4\rangle$$

$$a_{\alpha_1} |\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3\rangle = |\alpha_2 \alpha_3\rangle$$

$$a_{\alpha_2} |\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3\rangle = -a_{\alpha_2} |\alpha_2 \alpha_1 \alpha_3\rangle = -|\alpha_1 \alpha_3\rangle$$

$$a_{\alpha_3} |\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3\rangle = (-1)^2 a_{\alpha_3} |\alpha_3 \alpha_1 \alpha_2\rangle = |\alpha_1 \alpha_2\rangle$$

$$a_{\alpha_4} |\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3\rangle = 0$$

↑
brak okupowanego
stanu $|\alpha_4\rangle$