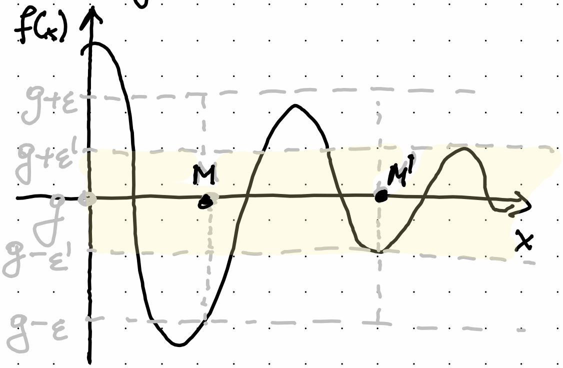
Koło olimpijskie (klasa II)

17.10.2020

#2 Pochodne funkcji

Uzupełnienie: granice funkcji w punkcie niewłaściwym.

Granicę funkcji w punkcie niewłaściwym $x \to \pm\infty$ definiujemy jako:



$$\left[\lim_{x\to+\infty} f(x) = g\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{M\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{x>M}{\forall}\ |f(x)-g|<\varepsilon\right]$$

a także

$$\left[\lim_{x\to-\infty} f(x) = g\right] \iff \left[\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{M\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{x<M}{\forall}\ |f(x)-g|<\varepsilon\right]$$

Przykłady obliczania granic z definicji

1°) Wykazać na podstawie definicji granicy z poprzednich zajęć, że $\lim\limits_{x\to-3}\left(\frac{x^2-9}{x+3}\right)=-6$.

Mamy wykazać, że dla dowolnego dodatniego ε istnieje takie $\delta>0$, że dla x znajdującego się w sąsiedztwie punktu $x_0=-3$ takiego, że $x_0-\delta<x<x_0+\delta$. Dla każdego x z tego przedziału spełniona jest nierówność $|f(x)-g|<\varepsilon$.

Przyjmijmy, że $x \neq -3$ i wykonajmy obliczenia dla $g=-6$ jak to wiemy z treści zadania:

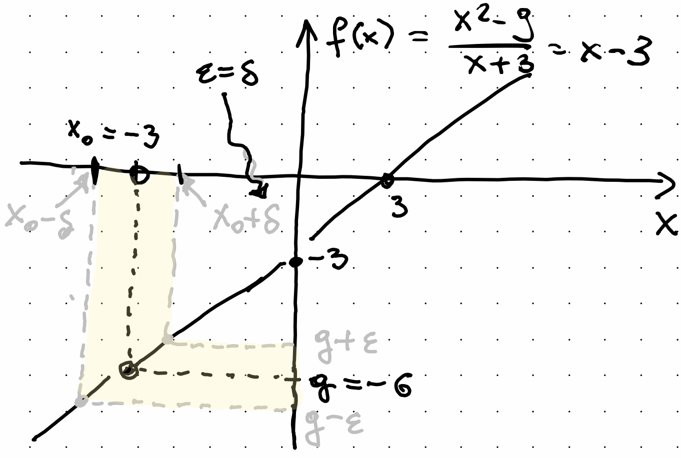
$$|f(x)-g|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x^2-9}{x+3}-(-6)\right|<\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\cancel{(x+3)}(x-3)}{\cancel{x+3}}+6\right|<\varepsilon \Rightarrow |x+3|<\varepsilon$$

Wiemy, że $|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$, czyli

$$|x+3|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<x+3<\varepsilon \Rightarrow -3-\varepsilon<x<-3+\varepsilon,$$

ale pamiętamy, że $x_0=-3$, czyli dostaliśmy, że $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$, jeżeli przyjmiemy, że $\delta=\varepsilon$, wtedy rzeczywiście pokazaliśmy, że dla dowolnego ε mogę znaleźć takie δ, że $|f(x)-g|<\varepsilon$ jest spełnione, gdy $x_0-\delta<x<x_0+\delta$.

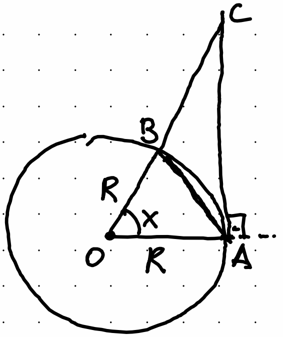


2°) Pokazać, że granica $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

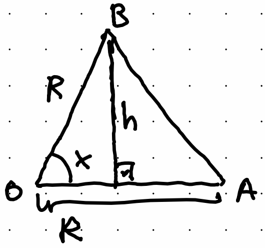
Niech $0 < x < \frac{\pi}{2}$, bo interesuje nas granica $x \to 0$. Zaczniemy od pokazania, że

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

Przyjrzyjmy się rysunkowi obok z którego możemy odczytać, że



$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{pole trójkąta} \\ AOB}}{P_{\Delta AOB}} < \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pole} \\ \text{wycinka } AOB}}{P_{\triangleleft AOB}} < P_{\Delta OAC}$$

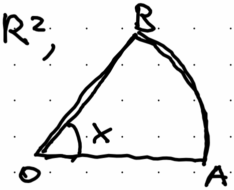


$$\sin x = \frac{h}{R} \Rightarrow h = R \sin x,$$

czyli

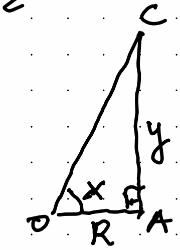
$$P_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} R \cdot h = \frac{R^2}{2} \sin x$$

Pole koła wynosi $P_{\odot} = \pi R^2$, czyli pole wycinka o kącie rozwarcia wynosi:



$$P_{\triangleleft OAB} = P_{\odot} \frac{x}{2\pi} = \pi R^2 \frac{x}{2\pi} = \frac{1}{2} R^2 x$$

Pozostało znaleźć $P_{\Delta OAC}$:



$$y = R \operatorname{tg} x, \text{ czyli}$$

$$P_{\Delta OAC} = \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x$$

czyli $$\frac{1}{2}R^2\sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x,$$

mamy więc, że $\sin x < x < \operatorname{tg} x$

Nierówność tą możemy teraz przekształcić:

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \boxed{\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1} \Rightarrow$$

dzieląc obustronnie przez sin x

biorę odwrotność tej nierówności

odejmuję obustronnie 1 i mnożę przez (−1)

$$\Rightarrow \boxed{1-\cos x > 1-\frac{\sin x}{x} > 0}$$

Nim przejdziemy dalej najpierw geometrycznie pokażemy, że spełniona jest tożsamość:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Dowód:

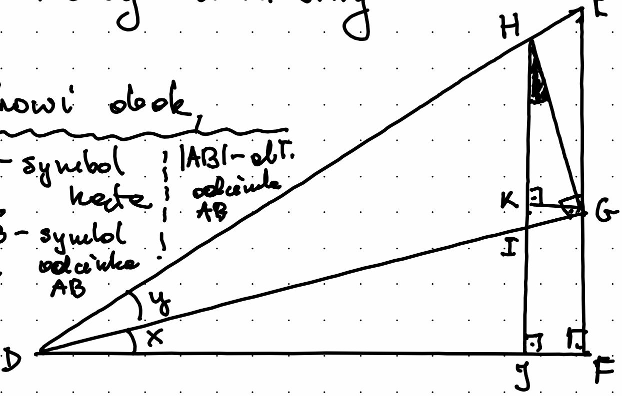
Przyjrzyjmy się rysunkowi obok, wtedy:

Oznaczenie: ∡ – symbol kąta; $\overline{AB}$ – symbol odcinka AB; |AB| – dł. odcinka AB

•) $\sphericalangle JDH = x+y$

z ΔJDH mamy, że

$$\cos(x+y) = \frac{|DJ|}{|DH|} \quad (*)$$



bok $\overline{HJ}$ dzieli bok $\overline{DF}$ na dwie części tak, że

$$|DF| = |DJ| + |JF| \Rightarrow |DJ| = |DF| - |JF|$$

wstawiamy to do (*) i otrzymujemy:

$$\cos(x+y) = \frac{|DF| - |JF|}{|DH|} = \frac{|DF|}{|DH|} - \frac{|JF|}{|DH|},$$

ponadto z rysunku mamy, że $|JK| = |KG|$, cyli

$$\cos(x+y) = \frac{|DF|}{|DH|} - \frac{|KG|}{|DH|} \quad (**)$$

•) z trójkąta ΔFDG możemy napisać, że

$$\cos x = \frac{|DF|}{|DG|} \Rightarrow |DF| = |DG| \cos x,$$

cyli wstawiając to do $(**)$ mamy:

$$\cos(x+y) = \frac{|DG|}{|DH|}\cos x - \frac{|KG|}{|DH|} \quad (***)$$

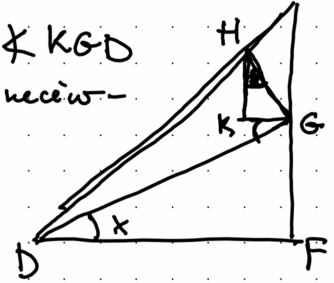
Odcinki $\overline{DG}$ i $\overline{DH}$ są bokami ΔGDH, cyli

$$\cos y = \frac{|DG|}{|DH|}$$

wstawiając to do $(***)$ mamy:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \frac{|KG|}{|DH|} \quad (\Delta)$$

•) Zwróćmy uwagę, że $\sphericalangle KGD$ i $\sphericalangle GDF$ są kątami naprzeciwległymi, cyli



$$\sphericalangle GDF = \sphericalangle KGD = x$$

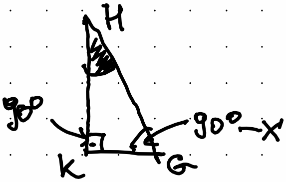
bo $\overline{KG} \parallel \overline{DF}$

równoległy do

ponadto $\sphericalangle DGH = 90°$, cyli $\sphericalangle KGH = 90° - x$

a zatem (patrz rys. obok)

$\sphericalangle KHG = x$



Oznacza to, że ΔFDG i ΔKHG są trójkątami podobnymi.

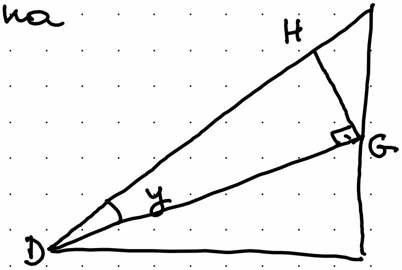
•) Z rysunku w rogu widać, że

$$\sin x = \frac{|KG|}{|HG|} \Rightarrow |KG| = |HG| \sin x$$

wstawiając to do równania (Δ) mamy

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \frac{|HG|}{|DH|} \quad (\Delta\Delta)$$

czyli znowu patrząc na rysunek dostajemy, że



$$\sin y = \frac{|HG|}{|DH|}$$

wstawiamy to do $(\Delta\Delta)$ i dostajemy tezę:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \square$$

Przypomnijmy, że pokazaliśmy, że

$$1-\cos x > 1 - \frac{\sin x}{x} > 0$$

Jeżeli w powyższym wzorze wstawię:

$$\cos(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}x) = \cos(x) = \cos^2 \tfrac{1}{2}x - \sin^2 \tfrac{1}{2}x$$

używając „1" trygonometrycznej $1 = \sin^2(\frac{1}{2}x) + \cos^2(\frac{1}{2}x)$

$$\Rightarrow \cos^2 \tfrac{1}{2}x = 1 - \sin^2\left(\tfrac{1}{2}x\right),$$ czyli

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\left(\tfrac{1}{2}x\right) \Rightarrow 2\sin^2\left(\tfrac{x}{2}\right) = 1 - \cos x$$

Mamy więc, że

pokazaliśmy wcześniej, że $\sin x < x$

$$1 - \cos x = 2\sin^2\left(\tfrac{x}{2}\right) < 2\sin\left(\tfrac{x}{2}\right) < 2 \cdot \tfrac{x}{2} < x$$

bo jeżeli $a < 1$ to $a^2 < a$.

Otrzymujemy, że $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x$,

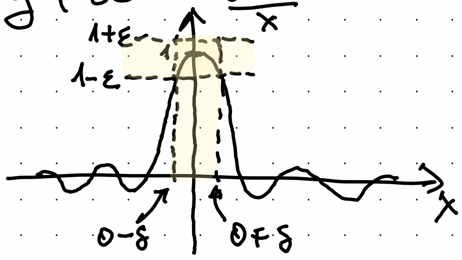
a stąd wynika nierówność:

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < |x|$$

Jest ona słuszna dla wszystkich $x \neq 0$, gdy $|x| < \frac{1}{2}\pi$.

Otrzymana nierówność dowodzi, że $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Rzeczywiście dla danego dowolnego $\varepsilon > 0$, za δ wystarcza wybrać mniejszą z liczb ε lub $\frac{1}{2}\pi$, przy czym $|x| < \delta$ daje się przede wszystkim zastosować to nierówność, a na jej mocy mamy, że

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon.$$



■ Pochodne funkcji i ich zastosowania

Pojęcie pochodnej funkcji jest jednym z najważniejszych narzędzi wykorzystywanych do analizy problemów fizycznych. Systematyczne sformułowanie rachunku różniczkowego zawdzięczamy I. Newtonowi oraz G.W. Leibnitzowi (XVII w.).

Do oznaczania pochodnej funkcji $f(x)$ będziemy stosować kilka notacji, których użyteczność zależy od konkretnego problemu. Pochodną oznaczać będziemy jako: f', $\frac{df}{dx}$ lub w przypadku funkcji od czasu t jako $\dot{f}$.

Definicja pochodnej:

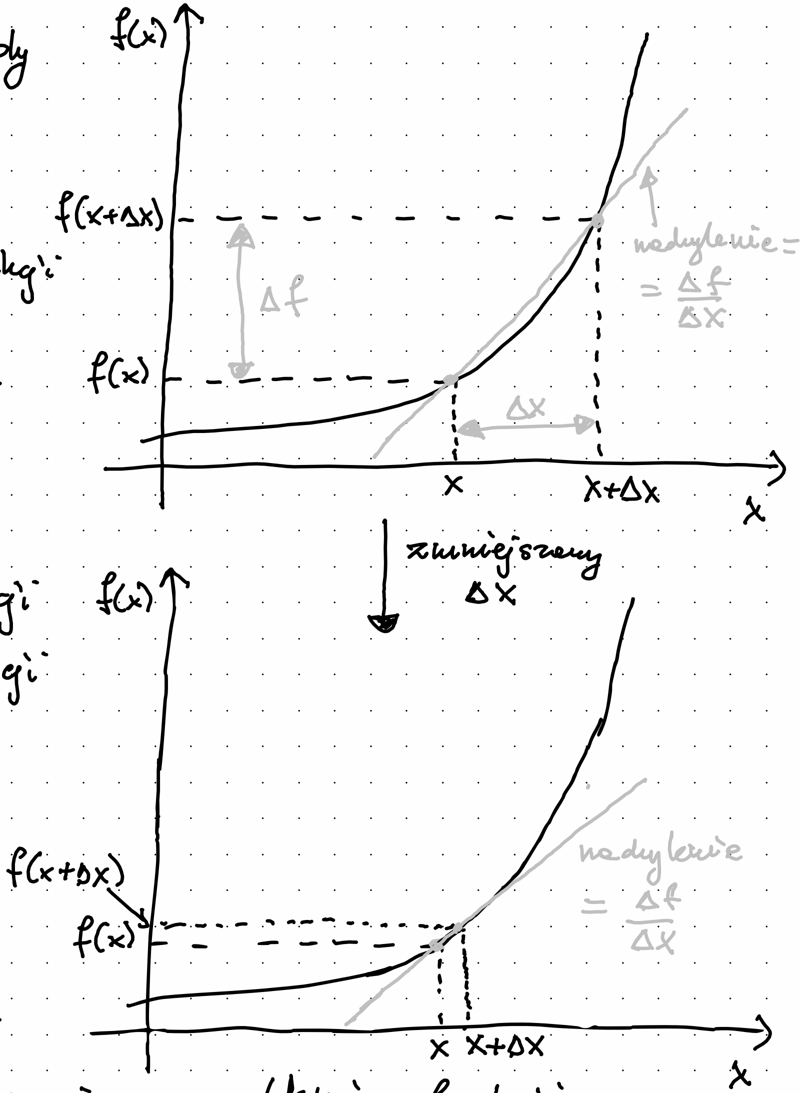
$$\boxed{f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{\frac{\Delta f}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

jest to tzw. iloraz różnicowy.

Interpretacja graficzna:

Iloraz różnicowy $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ jest współczynnikiem kierunkowym prostej przechodzącej przez punkt $(x, f(x))$ oraz $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$.

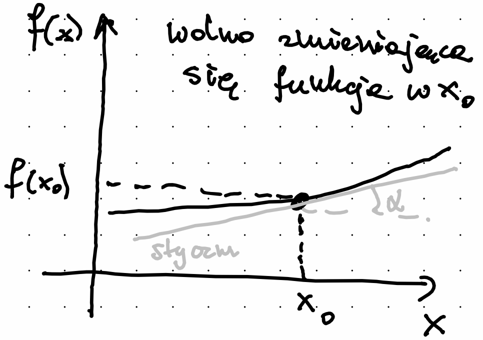
Gdy $\Delta x \to 0$, wtedy prosta ta dąży do prostej stycznej do wykresu funkcji w punkcie x. Interpretacja ta oznacza, że w maksimum lub minimum funkcji pochodna funkcji jest równa 0, co można wykorzystać do szukania tych punktów dla występującej w problemie funkcji.

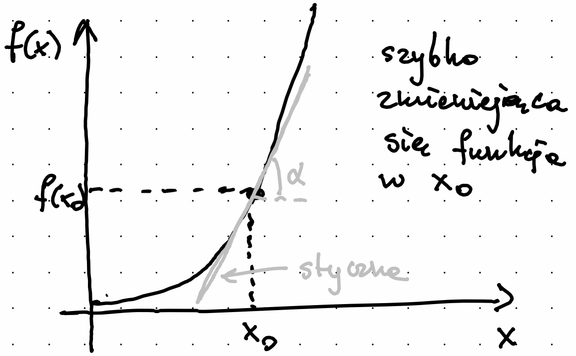


Podsumowując:

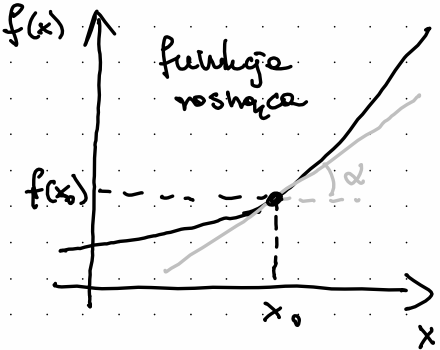
Graficznie pochodna f(x) odpowiada nachyleniu stycznej do wykresu funkcji w danym punkcie.

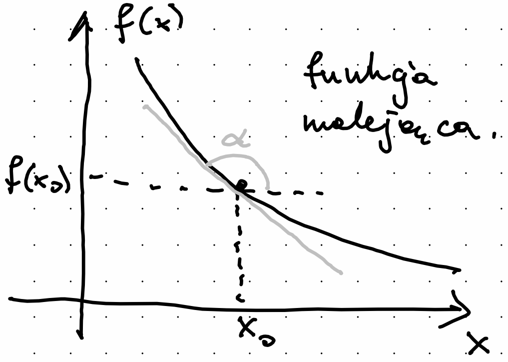
Wartość pochodnej jest tym większa im funkcja szybciej się w danym punkcie zmienia.





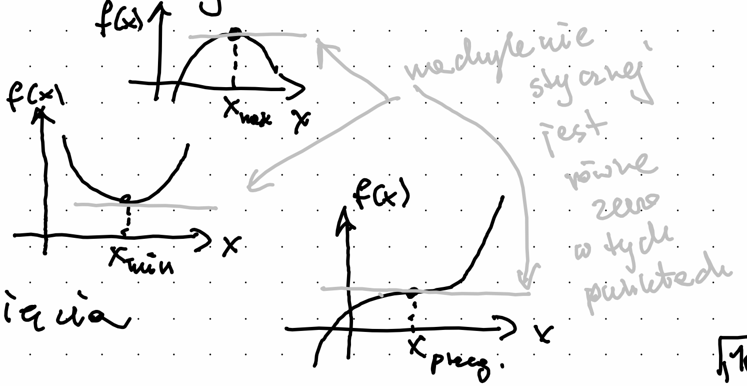
Gdy funkcja maleje pochodna jest ujemna, a gdy rośnie pochodna jest dodatnia.





Pochodna funkcji przyjmuje wartość 0, gdy w tym punkcie funkcja ma:

- maksimum
- minimum
- punkt przegięcia



Teraz policzymy dwie ważne pochodne z definicji:

1°) $f(x)=x^n$

Dygresja: Nim przejdziemy do rachunków krótka dygresja o dwumianie Newtona. Wiemy, że

- $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$
- $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

Ogólne wyrażenia dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$ ma postać:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \ldots + \binom{n}{n}y^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

tzw. symbol Newtona — symbol sumy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0 \leq k \leq n$$

oraz $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$ i $0!=1$.

Współczynniki występujące w dwumianie Newtona pojawiają się w trójkącie Pascala:

1

1 + 1 ------- n=1

1 + 2 + 1 ------ n=2

1 3 3 1 --- n=3

1 4 6 4 1 -- n=4

1 5 10 10 5 1 -- n=5

Skorzystajmy z definicji:

$$f'(x) = (x^n)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n + x^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots + x^n}{\Delta x} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1 \\ \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{(n-1)!}{(n-1)!}\, n = n \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^n} + n x^{n-1} \Delta x + \ldots - \cancel{x^n}}{\Delta x} =$$

$\swarrow$ wyrazy rzędu $(\Delta x)^2$ i wyższe

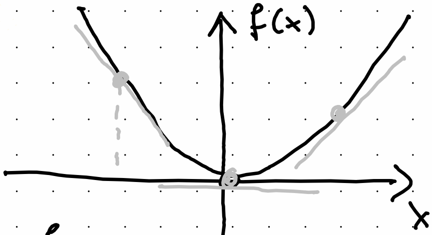
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(n x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \overset{\nearrow 0}{\Delta x} + \ldots \right) = n x^{n-1},$$

$\uparrow$ ten i kolejne wyrazy znikają dla $\Delta x \to 0$

czyli $(x^n)' = n x^{n-1}$

N.p. $f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$



Gdy $x < 0$, $f'(x) < 0$ - f. malejąca

Gdy $x > 0$, $f'(x) > 0$ - f. rosnąca

Gdy $x = 0$, $f'(x) = 0$ - minimum funkcji.

Warto zauważyć, że gdy $n=0$, wtedy $x^0 = 1$, czyli $(1)' = 0$, czyli pochodna funkcji stałej jest równa zero!

2°) $f(x) = \cos(x)$

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} =$$

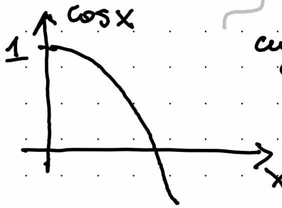
$= \Big\{$ Korzystamy z:

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

dowiedliśmy tego wcześniej $\Big\} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\cos x \; \overset{\sim 1}{\cos\Delta x}} - \sin x \sin\Delta x - \cancel{\cos x}}{\Delta x} =$$

$= \Big\{$



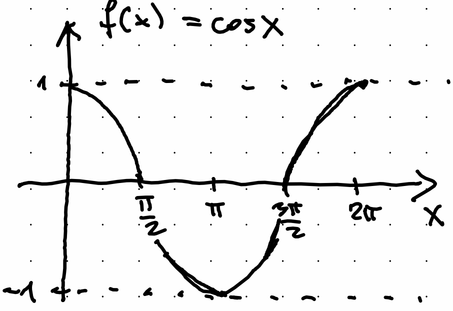
czyli

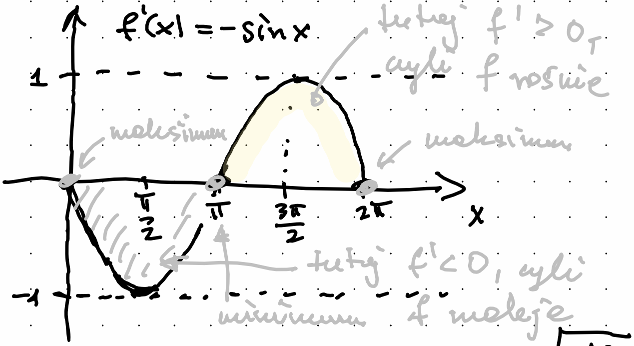
$\cos\Delta x \xrightarrow[\Delta x \to 1]{} 1$ $\Big\} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} -\sin x \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} = \left\{ \Delta x \text{ występuje tylko w } \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} \right\} =$$

$$= -\sin x \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\Delta x}{\Delta x}}_{\substack{\shortparallel \\ 1}} = -\sin x$$

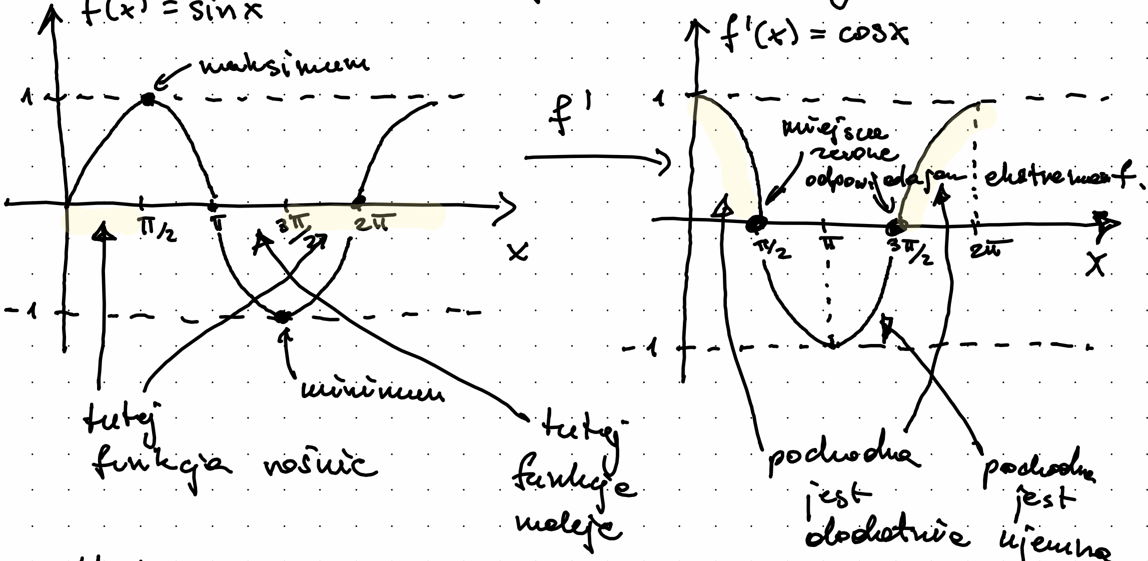
1 – pokazaliśmy wcześniej.





Patrząc na wykres funkcji można wiele powiedzieć o jej pochodnej, np.

$f(x) = \sin x$ – f. okresowa, czyli także $f'(x)$ musi być okresowa.



Niektóre ważne pochodne

1°) $(\mathrm{const})' = 0$

2°) $(x^n)' = n x^{n-1}$

3°) $(\sin x)' = \cos x$

4°) $(\cos x)' = -\sin x$

5°) $(e^x)' = e^x$, gdzie $e = 2{,}718\ldots$

6°) $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

Inne ważne wzory:

1°) $(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$

2°) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ – reguła Łańcuchowe

3°) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$, $g(x) \neq 0$

4°) $[f(g(x))]' = \frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg(x)}{dx}$

Przykład:

$$f(x) = 3x^2\cos x + \underbrace{e^{x^3}}_{\text{f. złożona}}$$

$$f' = (3x^2\cos x + e^{x^3})' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{korzystamy z 1°)}}}{=} (3x^2\cos x)' + (e^{x^3})' =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{korzystamy} \\ \text{z 2°)}}}{=} (3x^2)'\cos x + 3x^2(\cos x)' + (e^{x^3})' =$$

$$= 3\cdot 2x\cos x + 3x^2(-\sin x) + (e^{\overbrace{x^3}^{g(x) = x^3}})' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{korzystamy} \\ \text{z 4°)}}}{=}$$

$$= 6x\cos x - 3x^2\sin x + \underbrace{\frac{de^g}{dg}}_{(e^g)' = e^g}\underbrace{\frac{dg(x)}{dx}}_{(x^3)' = 3x^2} =$$

$$= 6x\cos x - 3x^2\sin x + 3e^{x^3}x^2$$

Do przećwiczenia:

1°) $(\operatorname{tg} x)' = ?$

2°) $(x\ln x - x)' = ?$

3°) $(x^{x^x})' = ?$ (uwaga ten przykład jest trudny)