

Mechanika kwantowa IIB: Ćwiczenia #2

mgr Piotr Zdybel

piotr.zdybel@fuw.edu.pl

www.fuw.edu.pl/~pzdybel/kwant18.html

Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski — 16 października 2018

Zadanie 1: Operator (anty)symetryzacji jako operator rzutowy

Pokazać, że operator symetryzacji/antysymetryzacji $\mathcal{P}_{(F/B)}$ jest operatorem rzutowym, przy czym

$$\mathcal{P}_{(F/B)}\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \frac{1}{N!} \sum_P \zeta^P \psi(\vec{r}_{P1}, \dots, \vec{r}_{PN}),$$

gdzie P jest permutacją zbioru $\{1, \dots, N\}$, a $\zeta = 1$ dla bozonów i $\zeta = -1$ dla fermionów.

Zadanie 2: Pomiary dla układu dwóch spinów w stanie singletowym

Rozpatrujemy układ dwóch spinów połówkowych A i B w stanie singletowym.

(a) Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania w wyniku pomiaru na spinie A wartości $S_{Az} = \frac{\hbar}{2}$, jeżeli nie wykonano pomiaru na spinie B?

(b) Pomiar spinu B wykazał, że $S_{Bz} = \frac{\hbar}{2}$. Jaki wtedy będzie wynik pomiaru S_{Az} na spinie A?

Zadanie 3: Rachunek zaburzeń dla układu dwóch oddziałujących bozonów w jednowymiarowej pułapce harmoniczej

Dwa identyczne bozony o masie m , poruszają się w jednowymiarowym potencjale harmonicznym $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Bozony ponadto oddziałują ze sobą za pomocą potencjału:

$$V_{int}(x_1, x_2) = \alpha e^{-\beta(x_1 - x_2)^2},$$

gdzie β jest dodatnim parametrem. Oblicz energię stanu podstawowego w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń.

Zadanie 4: Wyznaczniki Slatera dla jednowymiarowego układu dwóch oddziałujących elektronów w nieskończonej jamie potencjału



Info: Wygodnym sposobem zapisywania fermionowej funkcji falowej układu składającego się z N cząstek jest wykorzystanie tzw. wyznacznika Slatera:

$$\psi(\vec{r}_1\sigma_1, \dots, \vec{r}_N\sigma_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_1(\vec{r}_1\sigma_1) & \psi_2(\vec{r}_1\sigma_1) & \dots & \psi_N(\vec{r}_1\sigma_1) \\ \psi_1(\vec{r}_2\sigma_2) & \psi_2(\vec{r}_2\sigma_2) & \dots & \psi_N(\vec{r}_2\sigma_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_1(\vec{r}_N\sigma_N) & \psi_2(\vec{r}_N\sigma_N) & \dots & \psi_N(\vec{r}_N\sigma_N) \end{vmatrix},$$

gdzie $\psi_i(\vec{r}_j\sigma_j)$ jest i -tym spinorbitalem (tj. iloczynem przestrzennej i spinowej części jednocząstkowej funkcji falowej) opisującym j -tą cząstkę.

Rozważ dwa elektrony (o masie m i spinie $1/2$) zamknięte w jednowymiarowej nieskończonej jamie potencjału o długości L . Elektrony oddziałują ze sobą za pomocą odpychającego potencjału $V(x_1 - x_2)$, który nie zależy od spinowych stopni swobody i może być traktowany jak niewielka perturbacja. Sklasyfikuj trzy najniższe stany energetyczne w terminach stanów jednocząstkowych i spinów każdej z cząstek. Oblicz w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń poprawki do energii dla dwóch pierwszych stanów wzbudzonych. Wyniki pozostaw w postaci całek.

Omawiane zagadnienia

- 1) Omówienie struktury wielkocząstkowej przestrzeni Hilberta. Pokazanie, że podprzestrzeń symetryczna i antysymetryczna odpowiadają stanom bozonowym i fermionowym. Komentarz dotyczący anyonów.
- 2) Przypomnienie zagadnień związanych z pomiarami w mechanice kwantowej. Komentarz dotyczący struktury przestrzeni Hilberta dla cząstek posiadających położeniowe i spinowe stopnie swobody. Intuicja dotycząca iloczynu tensorowego.
- 3) Przypomnienie pierwszego rzędu rachunku zaburzeń na przykładzie dwóch oddziałujących bozonów w jednym wymiarze. Ciąg dalszy przypomnienia kwantowego oscylatora harmonicznego - funkcja falowa stanu podstawowego.
- 4) Wprowadzenie pojęcia wyznacznika Slatera i przedyskutowanie jego znaczenia i konstrukcji na przykładzie dwóch oddziałujących elektronów w jednowymiarowej nieskończonej jamie potencjału. Przypomnienie pojęcia degeneracji stanów energetycznych. Pokazanie na przykładzie antysymetryczność fermionowej funkcji falowej.