

Mechanika kwantowa IIB: Ćwiczenia #1

mgr Piotr Zdybel

piotr.zdybel@fuw.edu.pl

www.fuw.edu.pl/~pzdybel/kwant18.html

Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski — 9 października 2018



Info: Warunkiem koniecznym uzyskania oceny z przedmiotu jest przystąpienie do egzaminu. Prawo przystąpienia do egzaminu przysługuje studentom, którzy znajdą się na liście przedmiotu w systemie USOS w dniu 20.X.2018. Przypadki studentów nie spełniających tego warunku mogą być rozpatrzone przez wykładowcę indywidualnie. Egzamin składa się z części pisemnej oraz ustnej. Egzamin pisemny zawiera część testową oraz zadania. Warunkiem przystąpienia do egzaminu ustnego jest zdanie każdej z części egzaminu pisemnego. Student ma prawo nie przystępować do egzaminu ustnego i zaliczyć przedmiot jedynie na podstawie wyniku części testowej egzaminu pisemnego (w takiej sytuacji może otrzymać maksymalnie ocenę 3+) bądź na podstawie całości egzaminu pisemnego (w tej sytuacji może uzyskać maksymalnie ocenę 4+). Uzyskanie pozytywnego wyniku z każdej z części kolokwium zwalnia z egzaminu pisemnego. Punkty uzyskane na kolokwium traktowane są w takiej sytuacji jako punkty egzaminacyjne.

Konsultacje: Czwartki, godz. 15:15-17:00, pokój 5.56

Zadanie 1: Kwantowy oscylator harmoniczny

Rozważyć problem jednowymiarowego kwantowego oscylatora harmonicznego, którego hamiltonian dany jest poniżej

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2.$$

Znaleźć spektrum hamiltonianu oraz jego stany własne wykorzystując do tego operatory drabinkowe.

(a) Przepisać hamiltonian przy pomocy operatorów $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P})$ oraz $a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P})$, gdzie

$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\hat{X}$, $\hat{p} = \sqrt{m\hbar\omega}\hat{P}$. Oliczyć komutator $[a, a^\dagger]$.

(b) Oblicz komutator $[\hat{H}, a]$ oraz $[\hat{H}, a^\dagger]$.

(c) Pokazać, że jeżeli $|\nu\rangle$ jest stanem własnym operatora $\hat{N} = a^\dagger a$ o wartości własnej ν wtedy spełnione są własności:

1) $\nu \geq 0$,

2) jeżeli $\nu = 0$ to $a|\nu\rangle = 0$, jeżeli nie to $a|\nu\rangle$ jest niezerowym wektorem o normie $\nu\langle\nu|\nu\rangle$, wtedy $\hat{N}a|\nu\rangle = (\nu - 1)a|\nu\rangle$,

3) jeżeli $a^\dagger|\nu\rangle$ jest niezerowym wektorem o normie $(\nu + 1)\langle\nu|\nu\rangle$, wtedy $\hat{N}a^\dagger|\nu\rangle = (\nu + 1)a^\dagger|\nu\rangle$.

(d) zapisać dowolny unormowany stan własny hamiltonianu za przypomocy operatorów drabinkowych oraz podać spektrum hamiltonianu.

Omawiane zagadnienia

- 1) Przypomnienie podstawowych postulatów mechaniki kwantowej dotyczących stanów, obserwabli, pomiarów kwantowomechanicznych oraz ewolucji czasowej stanów.
- 2) Przypomnienie notacji Diraca, pojęć ortonormalności stanów oraz zupełności bazy.

- 3) Jednowymiarowy kwantowy oscylator harmoniczny - rozwiązanie wykorzystujące operatory drabinowe.
- 4) Interpretacja operatorów kreacji i anihilacji. Wyrażenie ich w bazie stanów własnych operatora $\hat{N}$ ("reprezentacja liczby obsadzeń").
- 5) Komentarz dotyczący wykorzystania operatorów kreacji i anihilacji w wielociałowej mechanice kwantowej. Przykład swobodnego pola elektromagnetycznego.