

MECHANIKA KWANTOWA II B ĆW.#1 9.10.2018

Mechanika kwantowa pojedynczej cząstki
nierelatywistycznej

① Stany:

$|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ - przestrzeń Hilberta
↑
wektor stanu (ket)

Iloczyn skalarny: $\langle \phi | \psi \rangle \in \mathbb{C}$

Interpretacja: amplituda prawdopodobieństwa
przejścia ze stanu $|\psi\rangle$ do
stanu $|\phi\rangle$

Warunek normalizacji: $\sum_n |\langle \phi_n | \psi \rangle|^2 = 1$,

gdzie $p_n = |\langle \phi_n | \psi \rangle|^2$ - prawdopodobieństwo

uzyskania w wyniku pomiaru

stanu $|\phi_n\rangle$ wykonanego na

układzie przygotowanego w stanie $|\psi\rangle$

ket: $|\psi\rangle \rightarrow$ „wektor kolumnowy” $\in V$ - przestrzeń
wektorowa

bra: $\langle \psi| \rightarrow$ „wektor wierszowy” $\in V^*$ - pr. wektorowa
dualna do V

② Observable

Każdej wielkości mierzalnej (observable) A przyporządkujemy operator hermitowski $\hat{A}$ działający na przestrzeni stanów:

$$\hat{A}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

Spójnienie hermitowskie: $\langle \hat{A}^\dagger \phi | \psi \rangle = \langle \phi | \hat{A} \psi \rangle$

Własności:

$$1^\circ) (\lambda \hat{A} + \mu \hat{B})^\dagger = \lambda^* \hat{A}^\dagger + \mu^* \hat{B}^\dagger,$$

gdzie $\hat{A}, \hat{B}$ - operatory, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$$2^\circ) (\hat{A}^\dagger)^\dagger = \hat{A}$$

$$3^\circ) (\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$$

Operator hermitowski to taki dla którego $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$

Zagadnienie własne dla operatora hermitowskiego:

$$\hat{A} |\psi_\alpha\rangle = \omega_\alpha |\psi_\alpha\rangle$$

↑
stan własny

↑
niezwykłe wartości własne

Wartości własne operatora $\hat{A}$ są
dozwolonymi wynikami pomiaru
obserwacji $\hat{A}$, np.

$$\hat{H} |\psi_\alpha\rangle = E_\alpha |\psi_\alpha\rangle$$

$\uparrow$ operator energii całkowitej (hamiltonian) $\nwarrow$ energie własne

Dowolny stan możemy przedstawić
jako kombinację liniową stanów
własnych operatora $\hat{A}$:

$$|\phi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\psi_{\alpha}\rangle,$$

gdzie $c_{\alpha} = \langle \psi_{\alpha} | \phi \rangle$.

W szczególności mamy:

$$\hat{A} |\phi\rangle = \hat{A} \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\psi_{\alpha}\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \hat{A} |\psi_{\alpha}\rangle =$$

$$= \sum_{\alpha} c_{\alpha} \omega_{\alpha} |\psi_{\alpha}\rangle = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} |\psi_{\alpha}\rangle \langle \psi_{\alpha} | \phi \rangle,$$

czyli

$$\hat{A} = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} \underbrace{|\psi_{\alpha}\rangle \langle \psi_{\alpha}|}_{\text{operator rzutowy na stan } |\psi_{\alpha}\rangle} \leftarrow \text{rozkład spektralny operatora}$$

Komutator: $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$

dla $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ nie można jednocześnie
„zmierzyć obserwacji” reprezentowanych
przez operatory $\hat{A}$ i $\hat{B} \rightarrow$ zasada nieoznaczoności
Heisenberga

Szczególne rolę w mechanice kwantowej
pełni operator energii – hamiltonian,
który generuje ewolucję czasową stanu:

$$i\hbar \partial_t |\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$$

równanie
Schrödingera

W standardowym sformułowaniu MK
szczególną rolę pełnią stany własne
operatora położenia i pędu:

$|\vec{r}\rangle \rightarrow \hat{\vec{r}}|\vec{r}\rangle$ – stan w którym cząstka
ma określone położenie

$|\vec{p}\rangle \rightarrow \hat{\vec{p}}|\vec{p}\rangle$ – stan w którym cząstka
ma określony pęd

Funkcja falowa odpowiadająca stanowi $|\phi\rangle$

$$\phi(\vec{r}) := \langle \vec{r} | \phi \rangle$$

Niech $\phi(\vec{r})$ to unormowana funkcja falowa, wtedy $|\phi(\vec{r})|^2$ to gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w stanie $|\phi\rangle$ i punkcie $\vec{r}$.

$$1 = \int d\vec{r} |\phi(\vec{r})|^2 = \int d\vec{r} \underbrace{\langle \phi | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \phi \rangle}_{\phi^*(\vec{r}) := \langle \vec{r} | \phi \rangle^*} =$$

$$= \langle \phi | \underbrace{\int d\vec{r} |\vec{r}\rangle \langle \vec{r}|}_{\mathbb{1} - \text{operator identycznościowy}} | \phi \rangle = \langle \phi | \phi \rangle$$

$$\Rightarrow \int d\vec{r} |\vec{r}\rangle \langle \vec{r}| = \mathbb{1} \quad \text{zupełność bazy}$$

Ile wynosi $\langle \vec{r} | \vec{r}' \rangle$?

$$\psi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi \rangle = \langle \vec{r} | \int d\vec{r}' \underbrace{|\vec{r}'\rangle \langle \vec{r}'|}_{\psi(\vec{r}')} | \psi \rangle =$$

$$= \int d\vec{r}' \langle \vec{r} | \vec{r}' \rangle \psi(\vec{r}') \Rightarrow \langle \vec{r} | \vec{r}' \rangle = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

ortogonalność bazy

Niech $\{|\nu\rangle\}$ będzie zupełnym zbiorem stanów, które są unormowane i ortogonalne (tj. ortonormalne).

$$\sum_{\nu} |\nu\rangle\langle\nu| = \mathbb{1}$$

$$\begin{aligned}\psi(\vec{r}) &= \langle \vec{r} | \psi \rangle = \langle \vec{r} | \mathbb{1} | \psi \rangle = \langle \vec{r} | \sum_{\nu} |\nu\rangle\langle\nu| \psi \rangle = \\ &= \sum_{\nu} \langle \vec{r} | \nu\rangle \underbrace{\langle \nu |}_{\mathbb{1}} \psi \rangle = \sum_{\nu} \psi_{\nu}(\vec{r}) \int d\vec{r}' \langle \nu | \vec{r}' \rangle \psi(\vec{r}') =\end{aligned}$$

$$= \int d\vec{r}' \underbrace{\sum_{\nu} \psi_{\nu}^*(\vec{r}') \psi_{\nu}(\vec{r})}_{\delta(\vec{r}-\vec{r}')} \psi(\vec{r}')$$

$$\Rightarrow \sum_{\nu} \psi_{\nu}^*(\vec{r}') \psi_{\nu}(\vec{r}) = \delta(\vec{r}-\vec{r}') \quad (\square)$$

Wiedząc, że $\langle \vec{r} | \vec{r}' \rangle = \delta(\vec{r}-\vec{r}')$, $\langle \vec{p} | \vec{p}' \rangle = \delta(\vec{p}-\vec{p}')$

oraz $\langle \vec{r} | \vec{p} \rangle = (2\pi\hbar)^{-3/2} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}\right)$. Jak

działają operatory położenia i pędu w reprezentacji położeniowej?

$$\langle \vec{r} | \underbrace{\hat{r}}_{\mathbb{1}} | \phi \rangle = \langle \vec{r} | \hat{r} \int d\vec{r}' \underbrace{|\vec{r}'\rangle\langle\vec{r}'|}_{\phi(\vec{r}')} | \phi \rangle =$$

$$= \int d\vec{r}' \vec{r}' \underbrace{\langle \vec{r} | \vec{r}' \rangle}_{\delta(\vec{r} - \vec{r}')} \phi(\vec{r}') = \vec{r} \phi(\vec{r})$$

$\uparrow$
 $\vec{r} | \vec{r}' \rangle = \vec{r}' | \vec{r}' \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \vec{r} | \hat{\vec{p}} | \phi \rangle &= \langle \vec{r} | \hat{\vec{p}} \int d\vec{p} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| \phi \rangle = \\ &\quad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ &\quad \mathbb{1} \qquad \qquad \qquad \hat{\vec{p}} |\vec{p}\rangle = \vec{p} |\vec{p}\rangle \\ &= \int d\vec{p} \vec{p} \underbrace{\langle \vec{r} | \vec{p} \rangle}_{\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}}} \langle \vec{p} | \phi \rangle = \frac{\hbar}{i} \partial_{\vec{r}} \langle \vec{r} | \int d\vec{p} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| \phi \rangle = \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \vec{p} \langle \vec{r} | \vec{p} \rangle = \frac{\hbar}{i} \partial_{\vec{r}} \langle \vec{r} | \vec{p} \rangle \end{aligned}$$

$$= \frac{\hbar}{i} \partial_{\vec{r}} \langle \vec{r} | \phi \rangle = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \phi(\vec{r})$$

$\uparrow$
 $\partial_{\vec{r}} \equiv \vec{\nabla}$

Ponadto podobnie do ($\square$) mamy:

$$\psi_{\mu}(\vec{r}) = \sum_{\nu} \psi_{\nu}(\vec{r}) \int d\vec{r}' \psi_{\nu}^*(\vec{r}') \psi_{\mu}(\vec{r}'),$$

$$\text{stad} \quad \delta_{\mu\nu} = \int d\vec{r} \psi_{\nu}^*(\vec{r}) \psi_{\mu}(\vec{r})$$

KWANTOWY OSCYLATOR HARMONICZNY (d=1)

$$\text{Hamiltonian: } \hat{H} = \hat{H}_{\text{kin}} + \hat{H}_{\text{pot}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2$$

w reprezentacji położeniowej:

$$\langle x | \hat{x} | \psi \rangle = x \psi(x), \quad \langle x | \hat{p} | \psi \rangle = \frac{\hbar}{i} \partial_x \psi(x)$$

Ponadto $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \hat{1}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Zagadnienie własne: } \hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle \\ \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right] \psi(x) = E \psi(x) \end{array} \right\}$

Wprowadzamy zmienne bezwymiarowe:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{x} \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \hat{X} \\ \hat{p} \equiv \sqrt{m\hbar\omega} \hat{P} \end{array} \right\} \Rightarrow [\hat{X}, \hat{P}] = i\hat{1} \quad (*)$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega (\hat{P}^2 + \hat{X}^2) \rightarrow \hat{H} = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} = \frac{1}{2}(\hat{P}^2 + \hat{X}^2)$$

Tu nie odwołujemy się do żadnej wybranej reprezentacji, a jedynie do definicji przestrzeni Hilberta i relacji (*).

Wprowadzamy operatory:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P}) \\ \hat{a}^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P}) \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \\ \hat{P} = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \end{array} \right.$$

jest to para operatorów hermitowsko sprzężonych.

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \frac{1}{2} \left(\underbrace{-i}_{i} [\hat{X}, \hat{P}] + \underbrace{i}_{-i} [\hat{P}, \hat{X}] \right) = \hat{1} \quad (**)$$

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2 + \frac{1}{2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 \right) = \\
 &= \frac{1}{4} \left(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} \right) = \frac{1}{2} [\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger] = \\
 &\stackrel{(\ast\ast)}{=} \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \equiv \hat{N} + \frac{1}{2}, \text{ gdzie } \hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger\hat{a} \text{ def.}
 \end{aligned}$$

Rozwiązane przez nas zadanie własne prowadzi się do konstrukcji stanów własnych operatora $\hat{N}$:

$$\begin{aligned}
 [\hat{N}, \hat{a}] &= \hat{N}\hat{a} - \hat{a}\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} = \underbrace{\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}}_{\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1} - \hat{a} = \\
 &= -\hat{a} \Rightarrow [\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] &= \hat{N}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} = \underbrace{\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}}_{\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1} = \\
 &= \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} = \hat{a}^\dagger \\
 &\Rightarrow [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger
 \end{aligned}$$

Pokażemy, że jeżeli $|\nu\rangle$ jest stanem własnym $\hat{N}$ z wartością własną ν

to zachodzą relacje:

1°) $v \geq 0$

2°) jeśli $v=0$ to $\hat{a}|v\rangle=0$, jeśli nie
to $\hat{a}|v\rangle$ jest niezerowym wektorem
stanu o normie $v\langle v|v\rangle$ spełniającym
 $\hat{N}\hat{a}|v\rangle = (v-1)|v\rangle$

3°) $\hat{a}^+|v\rangle$ jest niezerowym wektorem
stanu o normie $(v+1)\langle v|v\rangle$
spełniającym $\hat{N}\hat{a}^+|v\rangle = (v+1)\hat{a}^+|v\rangle$

{ Komentarz: cykle $\hat{a}|v\rangle$ i $\hat{a}^+|v\rangle$ są
stanami własnymi $\hat{N}$
o wartości własnej $v-1$ i $v+1$ }

Dowód:

Z założenia $\hat{N}|v\rangle = v|v\rangle$, $\langle v|v\rangle \geq 0$

Normy $\hat{a}|v\rangle$ i $\hat{a}^+|v\rangle$:

$$\langle v|\hat{a}^+\hat{a}|v\rangle = \langle v|\hat{N}|v\rangle = v\langle v|v\rangle$$

$$\langle v|\hat{a}\hat{a}^+|v\rangle = \langle v|\hat{N}+1|v\rangle = (v+1)\langle v|v\rangle$$

Norma wektora z przestrzeni Hilberta jest nieujemna. Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby wektor był zerowym, Skoro norma wektora

$\hat{a}|\nu\rangle$ jest równa $\sqrt{\langle \nu | \nu \rangle}$ to $\nu \geq 0$, a to dowodzi 1°) oraz pierwszą część 2°), czyli $\nu = 0 \Rightarrow \hat{a}|\nu\rangle = 0$.

Dalej mamy:

$$\underbrace{\hat{N}\hat{a}}_{\hat{a}\hat{N}-\hat{a}}|\nu\rangle = \hat{a}(\hat{N}-\mathbb{1})|\nu\rangle = (\nu-1)\hat{a}|\nu\rangle$$

$$\underbrace{\hat{N}\hat{a}^+}_{\hat{a}^+\hat{N}+\hat{a}^+}|\nu\rangle = \hat{a}^+(\hat{N}+\mathbb{1})|\nu\rangle = (\nu+1)\hat{a}^+|\nu\rangle,$$

co dowodzi 2°) i 3°). $\square$

Jeżeli $\nu > 0$ to powyższe stwierdzenie można zastosować do wektora $\hat{a}|\nu\rangle$ o wartości własnej $(\nu-1)$. Jeżeli $\nu \neq 0$ to $\nu \geq 1$. Można w ten sposób

stworzyć ciąg wektorów własnych $\hat{N}$:
 $|v\rangle, \hat{a}|v\rangle, \hat{a}^2|v\rangle, \dots, \hat{a}^g|v\rangle, \dots$ z
wartościami własnymi $v, v-1, v-2, \dots, v-g, \dots$.
Ten zbiór musi być ograniczony, bo
wartości własne $\hat{N}$ są ograniczone
przez 0 od dołu. Ponieważ $v \in \mathbb{N}$,
gdyż inaczej dla pewnego g dostalibyśmy
wektor $\hat{a}^g|v\rangle$ o ujemnej normie.

Działając $\hat{a}^+$ możemy wygenerować
ciąg (nieograniczony) wektorów własnych $\hat{N}$.

Ważny wniosek:

- 1°) spektrum $\hat{N}$ jest tworzone przez
zbiór $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- 2°) działając $\hat{a}^+$, bądź $\hat{a}$ na wektor
własny $\hat{N}$ generujemy inny wektor
własny operatora $\hat{N}$

(Można pokazać, że ten wygenerowany
zbiór jest zupełny).

Wektory własne $\hat{N}$, które konstruujemy
nie są unormowane do 1.

Normalizacja: $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots, |n\rangle, \dots$

wartości własne: $0, 1, 2, \dots, n, \dots$ ↑
unormowane
wektory
własne $\hat{N}$

Mamy: $\langle n | \hat{a} \hat{a}^\dagger | n \rangle = (n+1) \langle n | n \rangle$

$$\langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle = n \langle n | n \rangle$$

zatem: $\hat{a}^\dagger | n \rangle = \sqrt{n+1} | n+1 \rangle$

$$\hat{a} | n \rangle = \sqrt{n} | n-1 \rangle \quad (n \neq 0)$$

$$\hat{a} | 0 \rangle = 0$$

stąd: $| n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n | 0 \rangle$

oraz $\hat{N} | n \rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle = \sqrt{n} \hat{a}^\dagger | n-1 \rangle =$
 $= (\sqrt{n})^2 | n \rangle = n | n \rangle$

ponadto $\langle n | n' \rangle = \delta_{nn'}$

Reprezentacja $\hat{a}$ i $\hat{a}^\dagger$ w bazie stanów
własnych operatora $\hat{N}$ (reprezentacja
liczby obsadzeń):

$$\hat{N} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ 0 & & & 3 & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \nwarrow \text{diagonala}$$

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & & \\ & 0 & \sqrt{2} & \\ & & 0 & \sqrt{3} & \\ 0 & & & 0 & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \nwarrow \text{diagonala}$$

$$a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \sqrt{1} & 0 & & \\ & \sqrt{2} & 0 & \\ & & \sqrt{3} & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \nwarrow \text{diagonala}$$

Wracając do $\hat{H}$ mamy:

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right), \quad \text{gdyli } \hat{H} \text{ jest}$$

diagonalny w bazie stanów własnych $\hat{N}$ ($[\hat{H}, \hat{N}] = 0$) i ma spektrum $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, gdzie $n \in \mathbb{N}$.

Operatory kreacji i anihilacji

Powyższe rozwiązanie zagadnienia własnego $\hat{H}$ wykorzystując $a^\dagger$ i a można traktować jak sprytne triki, ale ponieważ

kolejne poziomy energetyczne są oddalone o $\hbar\omega$ możliwa jest

inna, barokiej owocha, interpretacja:

$|n\rangle$ = stan zawierający n identycznych
"cząstek / kwantów"

$|0\rangle$ = stan "próżni",

wtedy $\hat{a}^+$ ze stanu $|n\rangle$ "tworzy"

stan $|n+1\rangle$, czyli "kreuje cząstkę",

a $\hat{a}$ ze stanu $|n\rangle$ "tworzy" stan

$|n-1\rangle$, czyli "niszczy / anihiluje cząstkę".

Ta interpretacja okaże się być niezwykle ważna w kwantowej teorii wielu ciał.

Przykład:

(Pole elektromagnetyczne) = $\left(\begin{array}{l} \text{superpozycja} \\ \text{płaszczyzn} \\ \text{polaryzacji} \\ \text{falewymi} \end{array} \begin{array}{l} \text{o} \\ \vec{E} \\ \vec{k} \end{array} \begin{array}{l} \text{fale} \\ \text{danej} \\ \text{wielkości} \end{array} \right)$

Kwantowanie tego pola prowadzi do fotonów o energii $\hbar\omega$, wtedy hamiltonian swobodnego pola elektromagnetycznego ma postać:

$$\hat{H}_{EM} \propto \sum_{\vec{k}, \vec{\epsilon}} \hbar\omega_{\vec{k}, \vec{\epsilon}} \underbrace{\hat{a}_{\vec{k}, \vec{\epsilon}}^+ \hat{a}_{\vec{k}, \vec{\epsilon}}}_{\hat{N}_{\vec{k}, \vec{\epsilon}}}$$

$\hat{N}_{\vec{k}, \vec{\epsilon}}$ - operator liczby fotonów o zadanych $\vec{k}$ i $\vec{\epsilon}$

czyli suma oscylatorów!

$\hat{a}_{\vec{k}, \vec{\epsilon}}^+ / \hat{a}_{\vec{k}, \vec{\epsilon}}$ → operatory kreacji / anihilacji fotonu "typu" $\vec{k}, \vec{\epsilon}$.