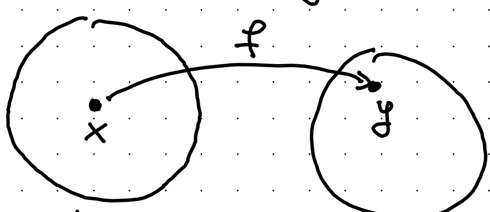
Koło olimpijskie VLO (klasy II) 10.10.2020

#1 Funkcje i ich granice

① Funkcje

Funkcją f odwzorowującą zbiór X w Y, tj. $f: X \longrightarrow Y$, nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi $x \in X$ dokładnie jednego elementu $y \in Y$, co zapisujemy jako:

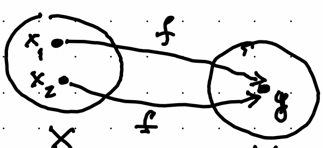
$$f: x \longmapsto y = f(x), \quad \text{gdzie } x \in X, y \in Y$$



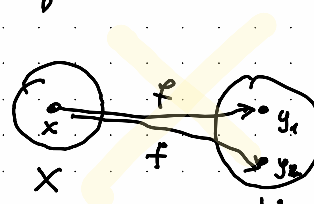
X dziedzina

Y przeciwdziedzina (zbiór wartości)

UWAGA! Funkcja jest przyporządkowaniem jednoznacznym, czyli

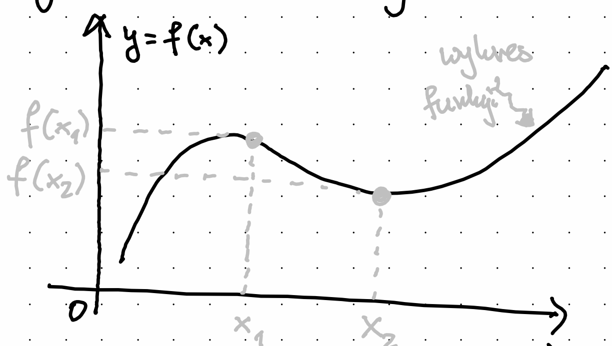


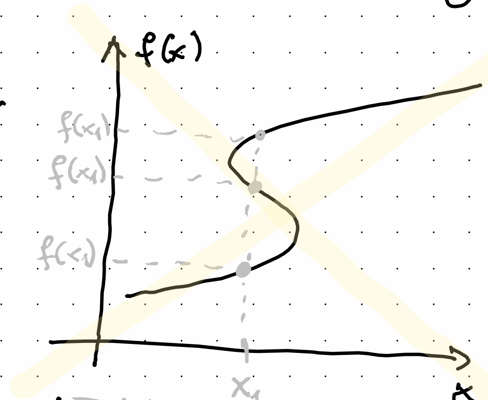
To jest dobrze określona funkcja



To nie jest funkcja jednoznaczna! Nie będziemy się takimi zajmować.

Funkcję możemy interpretować geometrycznie jako zbiór par $(x, y=f(x))$, gdzie $x \in X$ naniesiony na płaszczyznę w kartezjańskim układzie współrzędnych. Zbiór ten nazywamy wykresem funkcji.





Funkcje dla której X i Y są podzbiorami $\mathbb{R}$ nazywamy f. liczbowymi.

Taki wykres jest niedozwolony – niejednoznaczność!

A. Funkcje złożone

Rozważmy dwie funkcje f i g takie, że

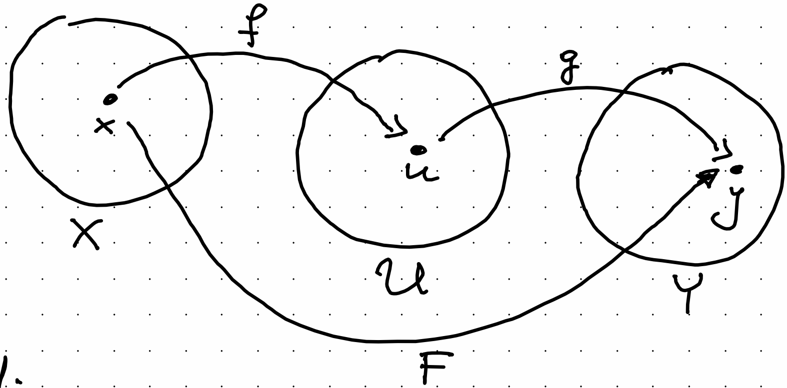
$f: X \to U$, $g: U \to Y$, czyli

$u = f(x)$, $y = g(u)$, $x \in X$, $u \in U$ i $y \in Y$.

W ten sposób każdemu elementowi zbioru X jest przyporządkowany dokładnie jeden element zbioru Y. Przyporządkowanie to nazywamy funkcją złożoną F z funkcji f i g:

$$F(x) = g(f(x)),$$ wtedy

x to zmienna niezależna, y – zmienna zależna, f jest funkcją wewnętrzną, a g jest funkcją zewnętrzną.



Przykład:

Przyjrzyjmy się funkcji złożonej: $F(x)=\frac{1}{2}\left(1-\operatorname{sgn}(\cos(x))\right)$,

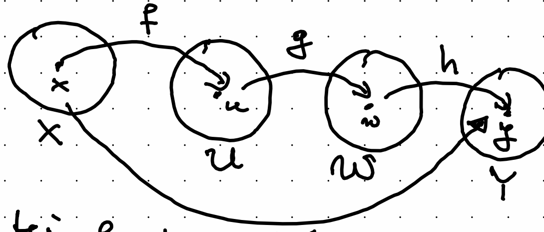
gdzie $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ jest tzw. funkcją znaku (signum).

W tym przypadku mamy do czynienia z trzema funkcjami:

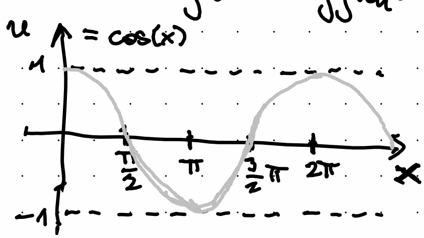
$u = f(x) = \cos(x)$

$w = g(u) = \operatorname{sgn}(u)$

$y = h(w) = \frac{1}{2}(1-w)$

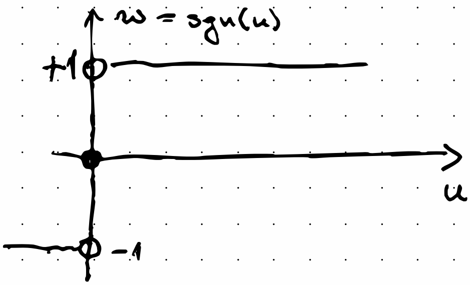


Jak wygląda wykres tej funkcji F(x) oraz jak wyglądają zbiory X, U, W i Y?

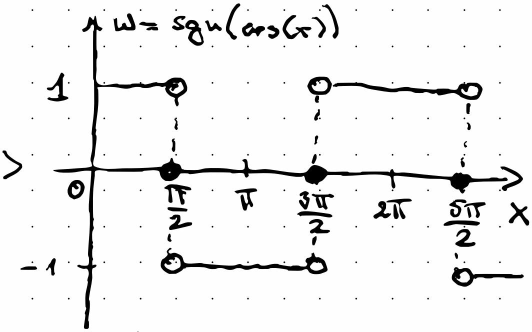


$f: \underset{X}{\underset{\parallel}{\mathbb{R}}} \longrightarrow \underset{\mathcal{U}}{\underset{\equiv}{\langle -1, 1\rangle}}$

przedział domknięty obustronnie

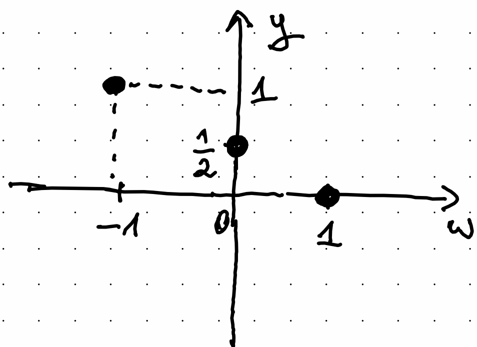


$\Longrightarrow$

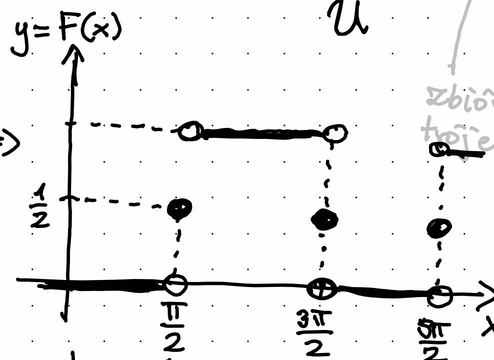


czyli w tym przypadku $g: \underset{\underset{U}{\equiv}}{\langle -1, 1\rangle} \longrightarrow \underset{\underset{W}{\equiv}}{\{-1, 0, 1\}}$

zbiór trójelementowy



$\Longrightarrow$



w tym przypadku: $h: \underset{\underset{W}{\equiv}}{\{-1, 0, 1\}} \longrightarrow \underset{\underset{Y}{\equiv}}{\{0, \tfrac{1}{2}, 1\}}$

a zatem funkcja złożona $F: \underset{\underset{X}{\parallel}}{\mathbb{R}} \longrightarrow \underset{\underset{Y}{\equiv}}{\{0, \tfrac{1}{2}, 1\}}$.

B. Funkcje różnowartościowe i funkcje odwrotne

Rozważamy $f: X \to Y$, wtedy

dla każdego $x_1 \in X$

$$\left(\begin{array}{c} f \text{ jest funkcją} \\ \text{różnowartościową} \\ \text{w zbiorze } X \end{array} \right) \Longleftrightarrow \left(\forall_{x_1 \in X} \; \forall_{x_2 \in X} \left[x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \right] \right)$$

Przykład:

Rozważmy funkcję $f(x) = x^3 + 1$, $x \in \mathbb{R}$ - l. rzeczywista.

Przyjmijmy, że $x_1 \neq x_2$ i przypuśćmy, że

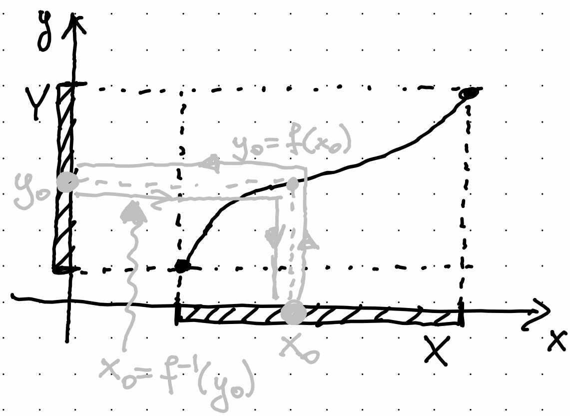
$$f(x_1)=f(x_2) \iff x_1^3+1=x_2^3+1 \iff x_1^3-x_2^3=0 \iff$$

$$\iff \underbrace{(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)}_{x_1^3+\cancel{x_1^2x_2}+\cancel{x_1x_2^2}-\cancel{x_1^2x_2}-\cancel{x_1x_2^2}-x_2^3}=0 \iff x_1-x_2=0 \iff x_1=x_2,$$

czyli sprzeczność ↯

Funkcja $f(x)=x^3+1$ jest f. różnowartościowa.

Funkcja f jest różnowartościowa w swej dziedzinie X jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznym, gdy każdemu elementowi $x_0 \in X$ jest przyporządkowany dokładnie jeden element $y_0 \in Y$ i vice versa, tzn. każdemu elementowi $y_0 \in Y$ przyporządkowany jest dokładnie jeden element $x_0 \in X$. Drugie z tych przyporządkowań nazywamy funkcją odwrotną do funkcji f i oznaczamy ją jako f^{-1}.



Niech $g: Y \to X$ oraz $f: X \to Y$ (różnowartościowa), wtedy

$$g=f^{-1} \iff \underset{x\in Y}{\forall} f(g(x))=x$$

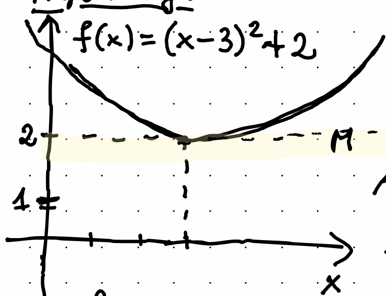
C. Szczególne własności funkcji liczbowych

Funkcja $f(x)$ jest:

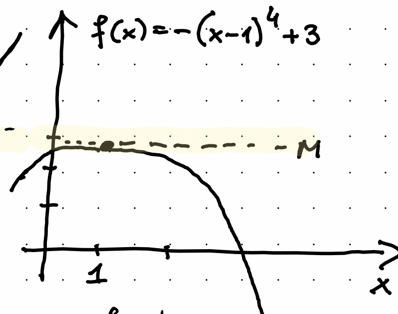
istnieje takie M

- ograniczona z dołu w zbiorze $X \iff \underset{M}{\exists} \underset{x\in X}{\forall} f(x) \geq M$
- ograniczona z góry na zbiorze $X \iff \underset{M}{\exists} \underset{x\in X}{\forall} f(x) \leq M$
- ograniczona w zbiorze $X \iff \underset{M}{\exists} \underset{x\in X}{\forall} |f(x)| \leq M$

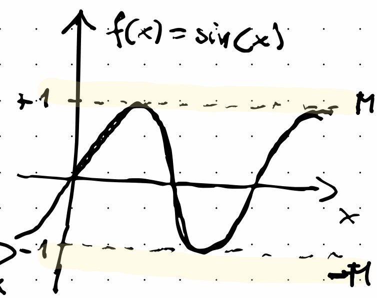
Przykłady:



funkcja ograniczona z dołu



funkcja ograniczona z góry

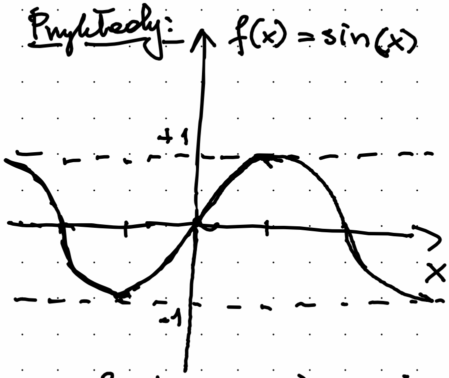


funkcja ograniczona

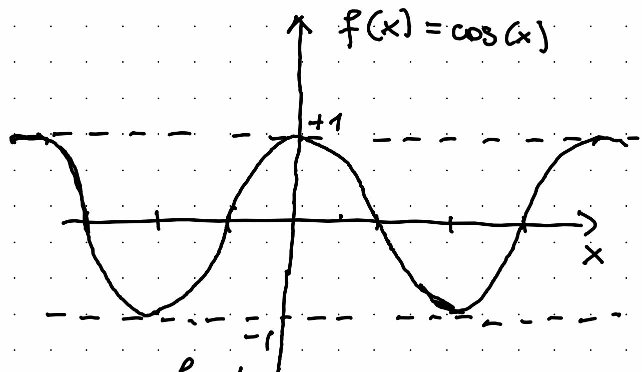
Funkcja $f(x)$ jest:

- parzysta w dziedzinie $X \iff \underset{x\in X}{\forall} \left[-x\in X \text{ i } f(x)=f(-x)\right]$
- nieparzysta w dziedzinie $X \iff \underset{x\in X}{\forall} \left[-x\in X \text{ i } f(-x)=-f(x)\right]$

Przykłady:



funkcja nieparzysta

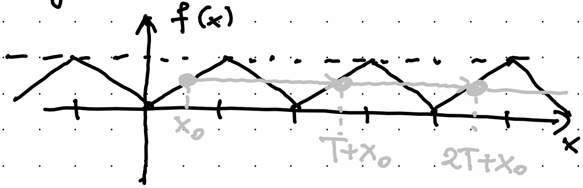


funkcja parzysta

Funkcja $f(x)$ jest:

- okresowa w dziedzinie $X \iff \underset{T\neq 0}{\exists} \underset{x\in X}{\forall} \left[x+T\in X \text{ i } f(T+x) = f(x) \right]$

Przykład:

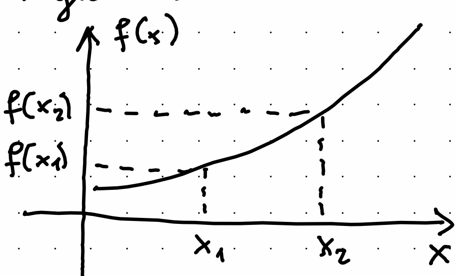


T to okres funkcji $f(x)$

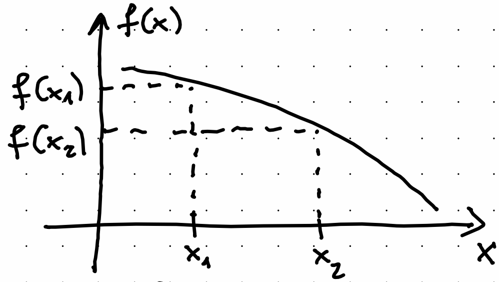
Funkcja $f(x)$ jest:

- rosnąca w zbiorze $X \iff \underset{x_1\in X}{\forall} \underset{x_2\in X}{\forall} \left[x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \right]$
- malejąca w zbiorze $X \iff \underset{x_1\in X}{\forall} \underset{x_2\in X}{\forall} \left[x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \right]$

Przykład:



f. rosnąca



f. malejąca

2 Granice i ciągłość funkcji

A. Granice funkcji

- granica lewostronna

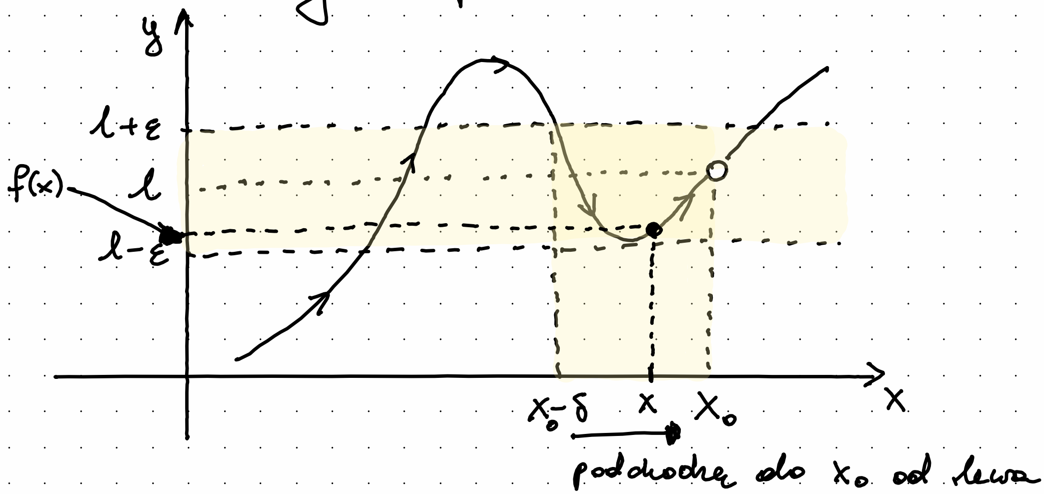
Liczba l jest granicą lewostronną funkcji $f(x)$ w punkcie x_0, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$ dla której

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{dla } x_0 - \delta < x < x_0 .$$

Granicę lewostronną oznaczamy symbolem

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l.$$

Spróbujmy zrozumieć tą definicję w graficzny sposób.



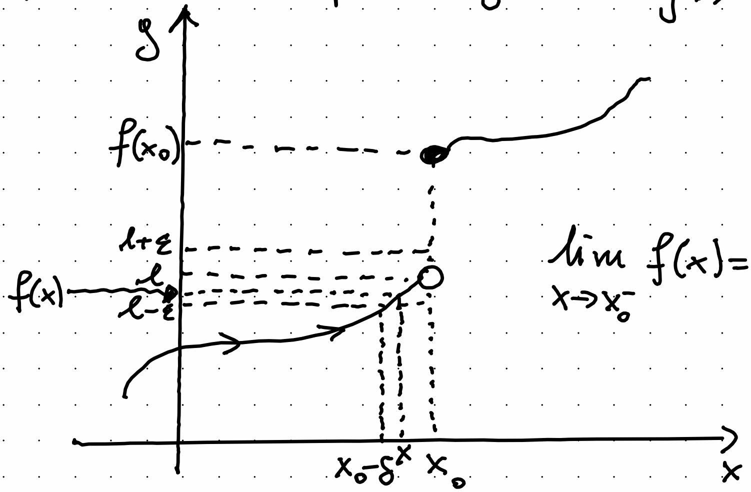
Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ mogę wybrać taką wartość $\delta > 0$ taką, że z tego że $x \in (x_0-\delta, x_0)$ wynika iż wartości funkcji $f(x)$ w tym punkcie znajduje się w zakresie

$$l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon.$$ (patrz rysunek).

$\}$ przedział obustronnie otwarty

Zmniejszając wartość ε (który jest dowolny) coraz bardziej przybliżam się do x_0 oraz wartości mojej funkcji dążą do l.

Co istotne nawet jeżeli funkcja w punkcie x_0 ma inną wartość (n.p. związaną ze skokiem funkcji) to o wartości granicy zależy od kształtu funkcji przy podchodzeniu do punktu x_0 (patrz rys. niżej.)



$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=l\neq f(x_0)$$

Formalnie definicję granicy lewostronnej możemy zapisać jako:

$$\left(\lim_{x\to x_0^-} f(x)=l\right)\Longleftrightarrow\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x}{\forall}\ [x_0-\delta<x<x_0]\Rightarrow[|f(x)-l|<\varepsilon]\right)$$

znak „−" wskazuje, że zbliżam się do x_0 od lewe

- granica prawostronna

Granicę prawostronną definiujemy analogicznie jak wyżej tyle, że tym razem zbliżamy się do punktu od prawej strony, czyli

$$\left(\lim_{x\to x_0^+} f(x)=p\right)\Longleftrightarrow\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x}{\forall}\ [x_0<x<x_0+\delta]\Rightarrow[|f(x)-l|<\varepsilon]\right)$$

znak „+" oznacza, że zbliżam się do x_0 od prawe

- granica funkcji

Mówimy, że g jest granicą funkcji $f(x)$ w punkcie x_0, gdy granica lewostronna i prawostronna są sobie równe i wynoszą g, czyli

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \underbrace{\lim_{x\to x_0} f(x)}_{\substack{\text{granica}\\ \text{funkcji}}} = g$$

B. Granice niewłaściwe funkcji

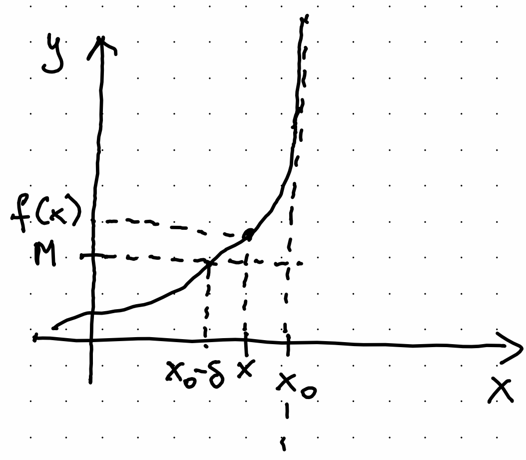
Może się zdarzyć, że w punkcie x_0 przy podchodzeniu od lewej strony ma ona wartości dążące do $\pm\infty$, wtedy

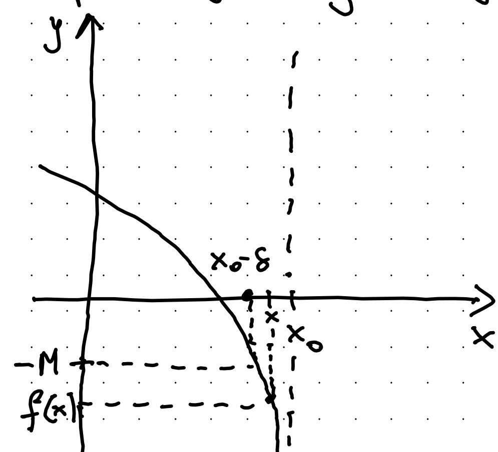
$$\left(\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty\right) \iff \left(\forall_{M>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x} \left[(x_0-\delta < x < x_0) \Rightarrow (f(x) > M)\right]\right)$$

(patrz rys. niżej z lewej)

$$\left(\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty\right) \iff \left(\forall_{M>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x} \left[(x_0-\delta < x < x_0) \Rightarrow (f(x) < -M)\right]\right)$$

(patrz rys. niżej z prawej)





Analogicznie postępujemy dla granic prawostronnych w definicjach należy, wtedy zamienić

$x_0-\delta < x < x_0$ na $x_0 < x < x_0+\delta$.

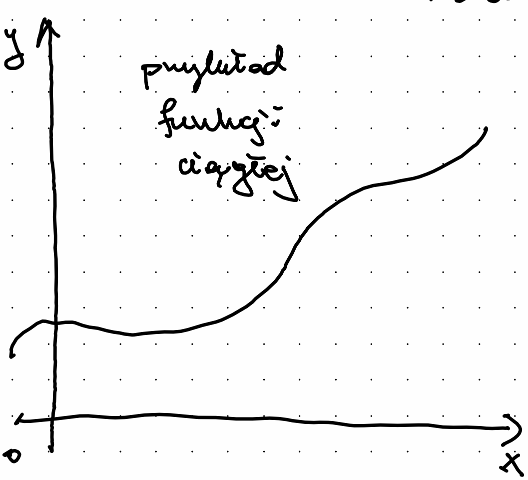
C. Ciągłość funkcji

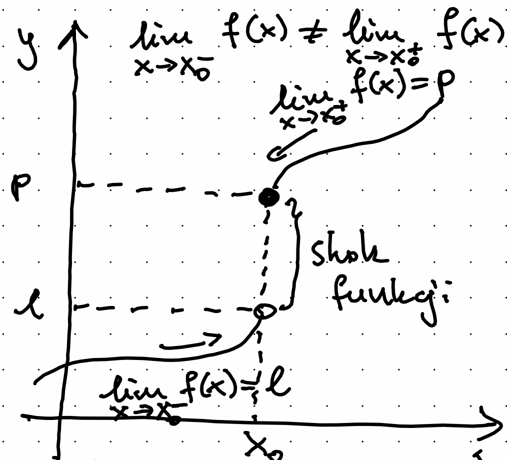
$$\left(\begin{array}{l}\text{Funkcja } f(x) \text{ jest ciągła} \\ \text{w punkcie } x_0\end{array}\right) \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Tak więc funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy:

- ma w punkcie x_0 granicę g
- ma w punkcie x_0 wartość $f(x_0)$
- granica g równa się wartości x_0.

Funkcji, która jest ciągła w całej swej dziedzinie można narysować jej wykres bez odrywania długopisu. Dla funkcji nieciągłej w danym punkcie x_0 nie jest to w nim możliwe.





funkcja nieciągła w x_0

Na następnych zajęciach zrobimy jeszcze kilka przykładowych zadań z granic, aby jeszcze lepiej zrozumieć pojęcie granicy. Następnie zajmiemy się omówieniem pojęcia pochodnej oraz jej zastosowań.