Fizyka Elementarna – rozwiązania zadań. Część 20, 21 i 22

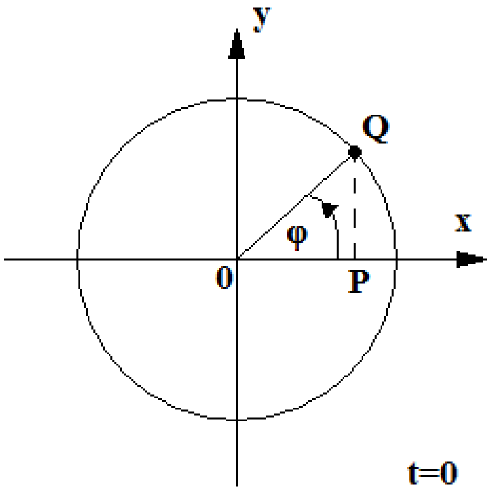
Przygotowanie: Grzegorz Brona, 20.12.2008

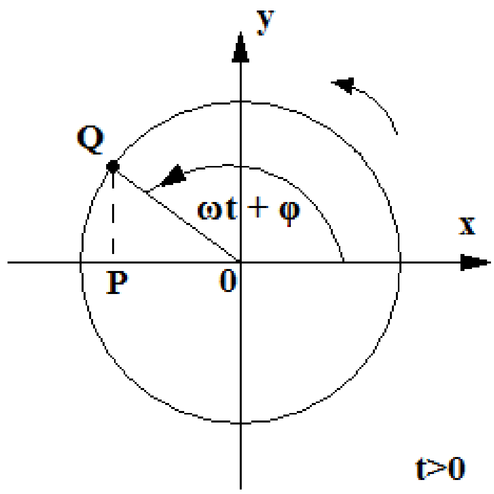
Seria 20

Zadanie 1

Punkt *Q* porusza się w płaszczyźnie XOY po okręgu o promieniu A ze stałą prędkością kątową ω. Punkt *P* jest rzutem prostopadłym punktu *Q* na oś OX. Opisz ruch (położenie, prędkość i przyśpieszenie) punktu P. Znajdź związek pomiędzy położeniem i przyśpieszeniem punktu P.

Rozwiązanie:

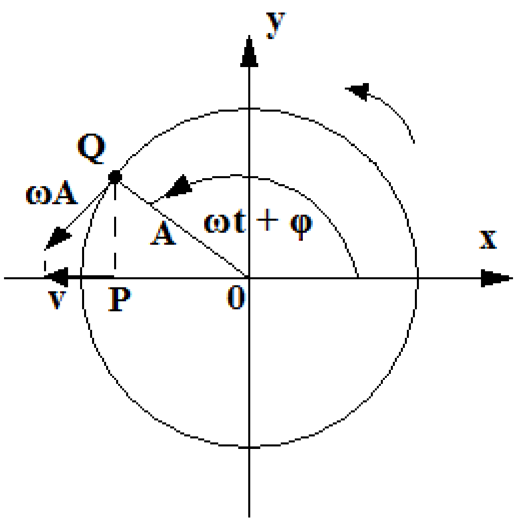




Rysunki przedstawiają położenie punktu *Q* w chwili początkowej (t=0) oraz dla pewnego t>0. Kąt między osią OX, a OQ w chwili t=0 wynosi φ. W dowolnej chwili późniejszej kąt ten wynosi ωt+φ. Położenie punku P na osi OX w dowolnej chwili opisywane jest:

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi) \quad (1)$$

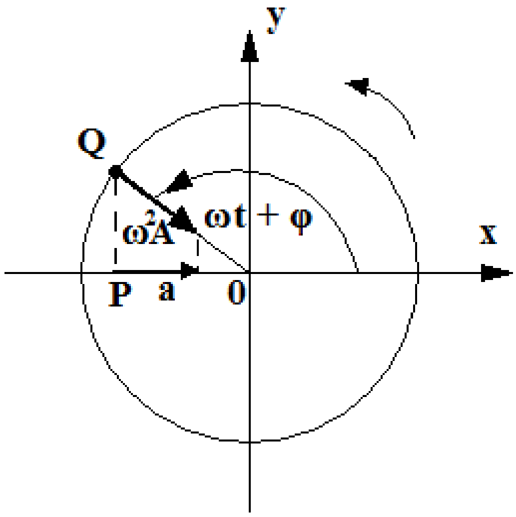
Prędkość styczna punktu Q wynosi ωA, prędkość punktu P wynosi: $v(t)=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$ (2)



Znak minus wskazuje na to, że v jest ujemne, kiedy punkty Q i P poruszają się w lewą stronę, a dodatnie, kiedy poruszają się w prawą stronę. Prędkość przyjmuje wartość 0 w skrajnych położeniach, gdy $\omega t+\varphi = 0$ lub π.

Przyśpieszenie punktu Q jest skierowane wzdłuż promienia do środka okręgu i wynosi $\omega^2 A$. Przyśpieszenie punktu P równa się składowej przyśpieszenia punktu Q wzdłuż kierunku OX:

$$a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi) \quad (3)$$



Przyśpieszenie znika dla $\omega t+\varphi = \pi/2$ lub $3\pi/2$. Z równania (1) i (3) otrzymujemy:

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

Komentarz: Punkt P porusza się ruchem harmonicznym z okresem $T=2\pi/\omega$ (czas jednego obiegu punktu Q po okręgu). Promień A, jest amplitudą ruchu harmonicznego punktu P.

Zadanie 2

Oscylatorem harmonicznym nazywamy punkt materialny, który wykonuje drgania pod wpływem siły zwrotnej *F(x)=-kx*. Zapisz równanie ruchu oscylatora harmonicznego, rozwiąż to równanie (otrzymaj *x(t)*) oraz korzystając z pojęcia pochodnej policz prędkość i przyśpieszenie oscylatora.

Rozwiązanie:

Równanie ruchu oscylatora harmonicznego:

$$F = ma \qquad -kx = ma \qquad \frac{-k}{m}x = a \qquad \frac{-k}{m}x = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Rozwiązaniem tego równania musi być pewna funkcja *x(t)*, której druga pochodna równa się jej samej ze znakiem przeciwnym i ze stałym współczynnikiem *k/m*. Z rachunku różniczkowego wiadomo, że taką własność mają funkcje *sin* i *cos*. Np.:

$$\frac{d\cos(t)}{dt} = -\sin(t) \qquad \frac{d^2\cos(t)}{dt^2} = \frac{-d\sin(t)}{dt} = -\cos(t)$$

Generalnie więc *x(t)* może być kombinacją liniową funkcji $\cos\omega t$ i $\sin\omega t$, gdzie ω jest pewną stałą liczbową powiązaną w pewien sposób ze współczynnikiem *k/m*:

$$x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t = A\cos\varphi\cos\omega t - A\sin\varphi\sin\omega t = A\cos(\omega t + \varphi)$$

gdzie użyliśmy podstawienia: $a = A\cos\varphi$ $\quad b = -A\sin\varphi$ oraz wzoru znanego z trygonometrii. Jest więc:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Różniczkując położenie po czasie otrzymujemy prędkość:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

Przyśpieszenie otrzymujemy różniczkując prędkość po czasie:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$$

Po podstawieniu otrzymanych wyników do równania ruchu mamy:

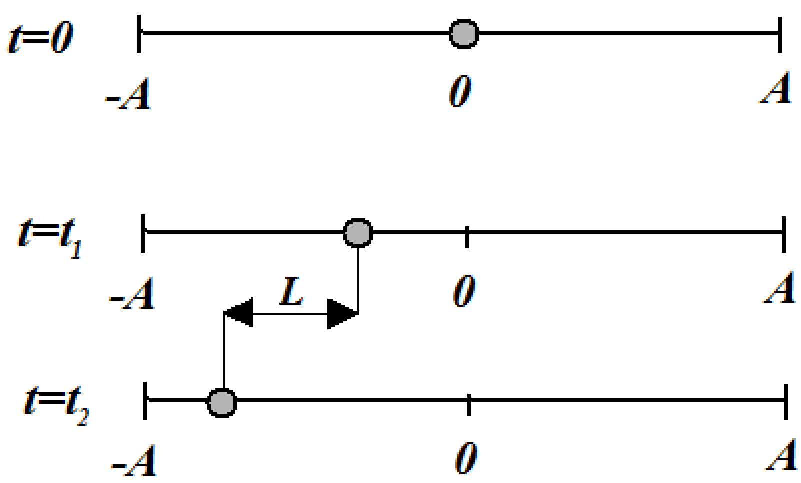
$$\frac{-k}{m} A\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$$

Stąd $\omega^2 = \frac{k}{m}$, natomiast stałe A i φ pozostają dowolne. Wielkość A jest amplitudą ruchu, zaś φ fazą początkową.

Zadanie 3

Kulka poruszająca się ruchem harmonicznym, w chwili t=0 przechodziła przez położenie równowagi. W pewnej chwili t_1 miała natomiast prędkość v_1=3 m/s, a następnie po przebyciu drogi L=2 m osiągnęła prędkość v_2=2 m/s (w międzyczasie nie przechodziła przez położenie równowagi). Jaka była średnia prędkość kulki na drodze L, jeśli okres drgań kulki T=8π s?

Rozwiązanie:



Prędkość średnia dana jest wzorem: $v_{śr} = \frac{L}{t_2 - t_1}$ (1)

Na podstawie wzorów dla wychyleń i prędkości w ruchu harmonicznym jest:

$$L = x_2 - x_1 = A\cos(\omega t_2 + \pi/2) - A\cos(\omega t_1 + \pi/2) = -A(\sin\omega t_2 - \sin\omega t_1)$$
$$L = -2\mathrm{A}\sin\frac{\omega(t_2 - t_1)}{2}\cos\frac{\omega(t_2 + t_1)}{2} \quad (2)$$
$$v_2 + v_1 = -A\omega\sin(\omega t_2 + \pi/2) - A\omega\sin(\omega t_1 + \pi/2) = -A\omega(\cos\omega t_2 + \cos\omega t_1)$$
$$v_2 + v_1 = -2\mathrm{A}\,\omega\cos\omega(t_2 + t_1)\cos\omega(t_2 - t_1) \quad (3)$$

Dzieląc stronami równania (2) i (3) mamy:

$$\frac{L}{v_2 + v_1} = \frac{1}{\omega} tg\frac{\omega(t_2 - t_2)}{2} \qquad t_2 - t_1 = \frac{2}{\omega} arctg\frac{\omega L}{v_1 + v_2}$$

oraz: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

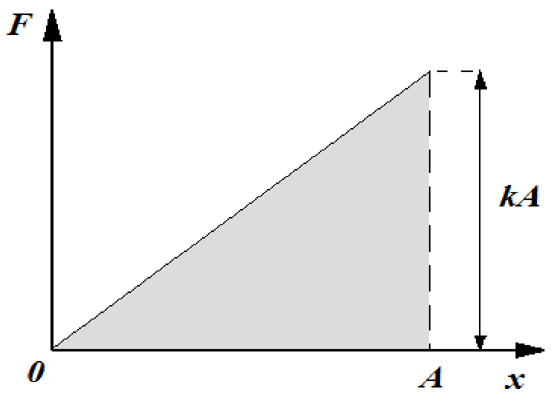
ostatecznie: $$v_{śr} = \frac{L\omega}{2\mathrm{arctg}\frac{\omega L}{v_1 + v_2}} = \frac{L\pi}{Tarctg\frac{2\pi L}{T(v_1 + v_2)}} \approx 2{,}5\, m/s$$

Zadanie 4

Kulka o masie m jest przymocowana do sprężynki i wykonuje drgania harmoniczne o amplitudzie *A* w kierunku poziomym. Siła zwrotna jest określona współczynnikiem sprężystości *k*, charakteryzującym właściwości sprężynki. Znaleźć energię drgającej kulki. Znaleźć jej prędkość w momencie przechodzenia przez punkt równowagi.

Rozwiązanie:

Aby wyznaczyć całkowitą energię kulki, trzeba wziąć jej skrajne wychylenie |x|=A, gdzie prędkość kulki jest równa 0. W tej sytuacji całkowita energia kulki jest równa jej energii potencjalnej. Można ją wyznaczyć jako pracę przeciwko sile zwrotnej, wykonaną podczas odciągania kulki na odległość A z położenia równowagi. Siła działająca przeciwko sile zwrotnej zmienia się wraz z odległością od położenia równowagi: *F=kx*. Na rysunku pokazano zależność siły od wychylenia:



Z rysunku widać, że praca równa jest polu powierzchni pod wykresem, czyli: $E = W = \frac{kA^2}{2}$

Do tego samego wyniku dochodzimy całkując:

$$E = W = \int_0^A F dx = \int_0^A kx dx = [\frac{kx^2}{2}]_0^A = \frac{kA^2}{2}$$

W dowolnym punkcie energia całkowita kulki jest sumą jej energii kinetycznej i potencjalnej w tym punkcie:

$$E=\frac{kx^2}{2}+\frac{mv^2}{2}=\frac{kA^2}{2}$$

w szczególności dla punktu równowagi: $\frac{mv^2}{2}=\frac{kA^2}{2}$ $\quad v=\sqrt{\frac{k}{m}}A$

Zadanie 5

Na gładkim poziomym stole leży kula o masie *M* przymocowana do sprężyny o współczynniku sprężystości *k*. W kulę trafia pocisk o masie *m* mający w chwili uderzenia prędkość v_0 skierowaną wzdłuż osi sprężyny. Wyznacz amplitudę *A* i okres *T* drgań kuli. Przyjmij, że uderzenie było idealnie niesprężyste i nie uwzględniaj masy sprężyny.

Rozwiązanie:

Z zasady zachowania pędu otrzymujemy wartość początkowej prędkości połączonego układu kula-pocisk:

$$mv_0=(M+m)v \qquad v=\frac{mv_0}{M+m}$$

Z zasady zachowania energii liczymy amplitudę:

$$\frac{(M+m)v^2}{2}=\frac{kA^2}{2} \qquad A=v\sqrt{\frac{(M+m)}{k}}$$

$$A=\frac{mv_0}{M+m}\sqrt{\frac{(M+m)}{k}} \qquad A=mv_0\sqrt{\frac{1}{k(M+m)}}$$

Liczymy okres: T=2 π/ω, gdzie $\omega^2=\frac{k}{m+M}$

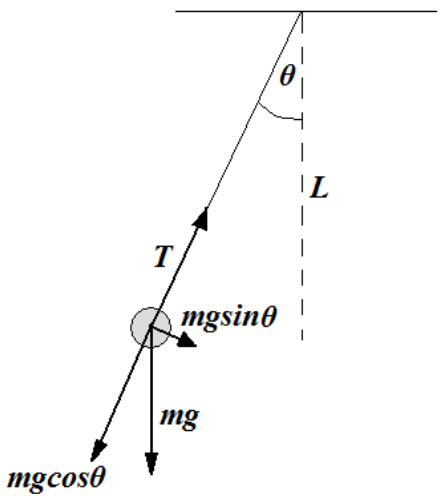
$$T=2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$$

Seria 21

Zadanie 1

Wahadło proste jest to ciało punktowe o pewnej masie *m* zawieszone na cienkiej nierozciągliwej nici o długości L. Wytrącone z równowagi zaczyna ono wahać się w płaszczyźnie pionowej pod wpływem siły ciężkości. Znaleźć okres tego ruchu przy założeniu małych drgań.

Rozwiązanie:



Siłą zwrotną jest w tym wypadku składowa styczna siły grawitacji: $F=-mgsin\theta$, jeżeli kąt jest mały to: $\sin\theta\approx\theta$, natomiast przemieszczenie wzdłuż łuku wynosi: $x=\theta L$, więc:

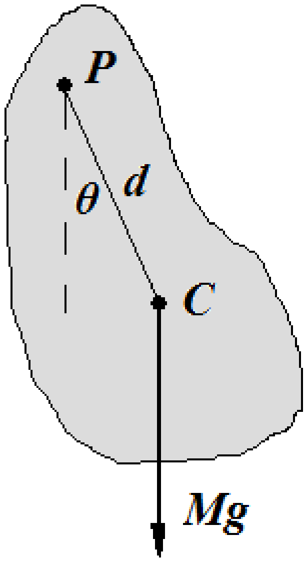
$$F=-mg\theta=-mg\frac{x}{L}=\frac{-mg}{L}x$$

Powyższa postać siły jest charakterystyczna dla ruchu harmonicznego ($F=-kx$). Dla ruchu harmonicznego: $\omega^2=\frac{k}{m}$ więc dla rozważanego wahadła $\omega^2=\frac{g}{L}$ i stąd: $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Zadanie 2

Płaskie ciało o nieregularnym kształcie może obracać się względem osi przechodzącej przez punkt P (rysunek). Odległość pomiędzy środkiem masy ciała C, a osią obrotu wynosi d. Ciało to zostało odchylone od położenia równowagi o kąt niewielki θ. Przyjmując, że moment bezwładności ciała względem osi obrotu wynosi I, a jego masa M, oblicz okres drgań.

Rozwiązanie:



Wartość momentu siły przywracającego równowagę wynosi:

$$K = -Mgd\sin\theta$$

Dla małych wychyleń można przyjąć $\sin\theta = \theta$, czyli: $K = -Mgd\,\theta$. Z drugiej strony jest:

$K = I\epsilon$ $\quad \epsilon = \frac{K}{I}$, więc: $\epsilon = \frac{-Mgd}{I}\theta$

Stąd okres drgań wahadła fizycznego przy małych amplitudach wynosi: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}$

Gdy wahadło fizyczne „wygląda” jak wahadło matematyczne: $I = ML^2$, $d = L$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ML^2}{MgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Zadanie 3

Krążek o promieniu *r* jest zawieszony w punkcie leżącym na jego obwodzie. Znaleźć okres małych drgań i podać długość równoważnego wahadła matematycznego.

Rozwiązanie:

Moment bezwładności krążka względem osi przechodzącej przez jego środek wynosi $\frac{1}{2}Mr^2$, natomiast moment bezwładności względem osi przechodzącej przez punkt leżący na obwodzie wynosi:

$$I = \frac{1}{2}Mr^2 + Mr^2 = \frac{3}{2}Mr^2$$

Zatem okres tego wahadła wynosi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgr}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}Mr^2}{Mgr}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{r}{g}}$$

Warto zwrócić uwagę na to, że wynik nie zależy od masy. Wahadło matematyczne o tym samym okresie ma długość *3/2r.*

Zadanie 4

Zapisać równanie ruchu dla oscylatora tłumionego, gdzie siła tłumiąca jest proporcjonalna do wartości prędkości. Sprawdzić, że równanie $x=Ae^{\frac{-bt}{2m}}\cos(\omega t+\varphi)$, spełnia równanie ruchu oscylatora harmonicznego. Podać interpretacje parametrów ω, b, A. Narysować odpowiedni rysunek.

Rozwiązanie:

Równanie ruchu: $F=ma \qquad -kx-nv=ma \qquad -kx-n\frac{dx}{dt}=m\frac{d^2x}{dt^2}$

Sprawdzenie, czy $x=Ae^{\frac{-bt}{2m}}\cos(\omega t+\varphi)$ spełnia równanie ruchu polega na policzeniu pierwszej i drugiej pochodnej po czasie:

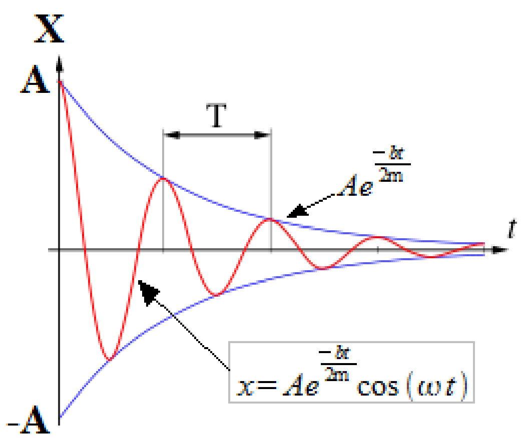
$$\frac{dx}{dt}=A\left(\frac{-b}{2m}e^{\frac{-bt}{2m}}\cos(\omega t+\varphi)-e^{\frac{-bt}{2m}}\omega\sin(\omega t+\varphi)\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=Ae^{\frac{-bt}{2m}}\left\{\frac{-b}{2m}\left[\frac{-b}{2m}\cos(\omega t+\varphi)-\omega\sin(\omega t+\varphi)\right]+\frac{b}{2m}\omega\sin(\omega t+\varphi)-\omega^2\cos(\omega t+\varphi)\right\}$$

Po podstawieniu do równania ruchu i porównaniu współczynników przy funkcjach trygonometrycznych współczynniki b i ω okazują się być równe:

$$b=n \qquad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{n}{2m}\right)^2}$$

Widać więc, że przypadku wahadła tłumionego okres ulega wydłużeniu. Amplituda ruchu stopniowo maleje do zera. Przedział czasu τ, po którym amplituda ruchu drgającego tłumionego spada do 1/e wartości początkowej, nazywa się średnim czasem życia oscylacji. Czynnik amplitudy wynosi τ=2m/b .



Zadanie 5
Oscylator tłumiony o masie 1,5 kg, współczynniku sprężystości k=8,0 N/m wychylono z położenia równowagi o 12 cm, a następnie puszczono. Przy założeniu, że siła tłumiąca jest dana wyrażeniem $-b\,dx/dt$, w którym *b*=0,23 kg/s, znaleźć liczbę oscylacji wykonanych przez ciało w przedziale czasu potrzebnym na to, by amplituda spadła do trzeciej części wartości początkowej.

Rozwiązanie:

Czas, po którym amplituda spadnie do trzeciej części swojej początkowej wartości:

$$Ae^{\frac{-bt}{2\mathrm{m}}}=\frac{1}{3}A \qquad t=\frac{2\mathrm{m}}{b}\ln 3\approx 14{,}3\,s$$

Częstotliwość i okres oscylacji:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}-(\frac{b}{2\mathrm{m}})^2} \qquad T=\frac{2\pi}{\omega}\approx 2{,}7\,s$$

Liczba oscylacji: $N=t/T\approx 5{,}3$ → liczba pełnych oscylacji = 5.

Seria 22

Zadanie 1

Rozważyć złożenie dwu ruchów harmonicznych – w kierunku osi OX zadany równaniem:

$$x(t) = A_X \cos(\omega t + \varphi_X)$$

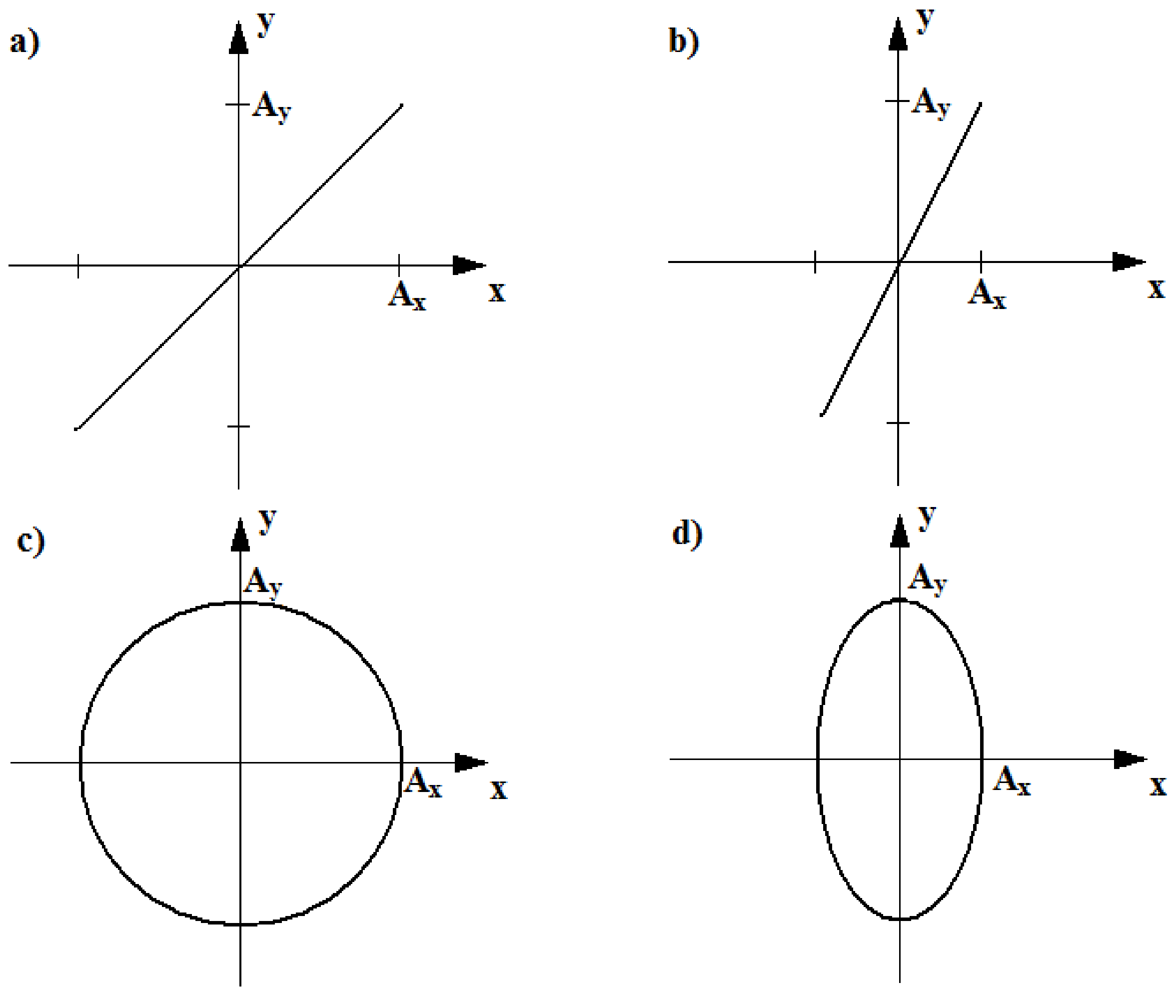
oraz w kierunku osi OY zadany równaniem:

$$y(t) = A_Y \cos(\omega t + \varphi_Y)$$

w przypadkach gdy:

a) $A_X = A_Y$, $\varphi_X = \varphi_Y$
b) $A_X = 0{,}5\,A_Y$, $\varphi_X = \varphi_Y$
c) $A_X = A_Y$, $\varphi_X = \varphi_Y + \pi/2$
d) $A_X = 0{,}5\,A_Y$, $\varphi_X = \varphi_Y + \pi/2$

Rozwiązanie:



Zadanie 2

Oscylator harmoniczny drgający w kierunku osi Oy z okresem *T* wytwarza w ośrodku, w którym jest umieszczony, falę rozprzestrzeniającą się w kierunku osi Ox z prędkością *v.* Napisz równanie tej fali. Co trzeba zmienić w zapisanym równaniu, aby opisywało ono przypadek, w którym fala rozprzestrzenia się w kierunku przeciwnym do zwrotu osi Ox.

Rozwiązanie:

Umieśćmy w punkcie $x=0$ źródło drgań harmonicznych. Niech w chwili t_1 w punkcie $x=0$ wychylenie będzie równe:

$$y_1 = A \sin \omega t_1$$

W jakiej chwili t w punkcie $\boldsymbol{x \neq 0}$ można będzie zaobserwować wychylenie y1?
Naturalnie w chwili $t_1 + x/v$. Oznaczmy teraz wychylenie w punkcie x, w chwili t przez $y(x,t)$. W punkcie $x=0$ takie samo wychylenie można było obserwować w chwili $t - x/v$. Czyli:

$$y(x,t) = y_1(t - x/v)$$

gdzie y_1 to wychylenia w punkcie $x=0$. Wychylenia te zachodzą zgodnie z prawem ruchu harmonicznego:

$$y(x,t) = A \sin[\omega(t - x/v)]$$

Posługując się zależnościami:

$$\lambda = vT \qquad T = 2\pi/\omega$$

otrzymujemy:

$$y(x,t) = A \sin(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}) \qquad y(x,t) = A \sin(\omega t - kx)$$

gdzie *k* nazywa się liczbą falową.

Dla przypadku, w którym fala rozprzestrzenia się przeciwnie do zwrotu osi Ox jest:

$$y(x,t) = A \sin[\omega(t + x/v)] \qquad y(x,t) = A \sin(\omega t + kx)$$

Zadanie 3
Rozważyć przypadek, w którym dwie jednakowe fale rozprzestrzeniają się w kierunku osi Ox w przeciwne strony. Co można powiedzieć o właściwościach otrzymanej fali „wypadkowej”?

Rozwiązanie:

Wykonajmy dodawanie dwu fal:

$$y(x,t)=A sin(\omega t-kx)+A sin(\omega t+kx)$$

ale: $\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B$

$$y(x,t)=A[\sin\omega t\, coskx-\cos\omega t\, sinkx+\sin\omega t\, coskx+\cos\omega t\, sinkx]=2\mathrm{A}\sin\omega t\, coskx$$

Własności fali opisanej powyższym równaniem:
- dwa razy większa amplituda
- dla punktów $x=\pi/(2k)$, $3\pi/(2k)$, $5\pi/(2k)$ .... (tj. dla $x=1/4\ \lambda$, $3/4\ \lambda$, $5/4\ \lambda$ ....) $coskx=0$. Wychylenie w tych punktach jest równe zero w dowolnej chwili t.

Falę opisaną powyższym równaniem nazywa się falą stojącą, a wskazane punkty nazywa się węzłami fali stojącej.

Zadanie 4
Nieruchomy względem źródła dźwięku obserwator zaobserwował, że źródło to generuje dźwięk o częstotliwości ν. Jaką częstotliwość ν' zarejestruje obserwator oddalający się od źródła dźwięku ruchem jednostajnym z prędkością V?

Rozwiązanie:

Wyobraźmy sobie, że w chwili t_1 do poruszającego się obserwatora, będącego w punkcie x_1 dociera maksymalne „wychylenie” fali dźwiękowej. Następne maksymalne „wychylenie” dojdzie do niego w chwili $t_1 + \tau$. Obserwator będzie wtedy w punkcie $x_1 + \tau V$. Czas τ jest sumą okresu drgań T źródła i czasu, który był potrzebny, aby fala przebyła odległość τV:

$$\tau=T+\tau V/V_D$$

gdzie V_D to prędkość dźwięku w ośrodku, w którym porusza się obserwator.
Podstawiając: $T=1/\nu$ oraz $\tau=1/\nu'$:

$$1/\nu'=1/\nu+1/\nu'\, V/V_D$$

$$\nu'=\nu(1-V/V_D)$$

Natomiast, gdy obserwator będzie przybliżał się do źródła dźwięku częstotliwość, którą usłyszy będzie wynosić:

$$\nu'=\nu(1+V/V_D)$$