Fizyka elementarna – materiały dla studentów. Części 18 i 19.
Prawo Gaussa

Częściowo przygotowane na podstawie materiałów z roku akademickiego 2007/8.
Agnieszka Korgul

Wprowadzenie – różne układy współrzędnych.

Materiał do samodzielnego opracowania przez studentów.

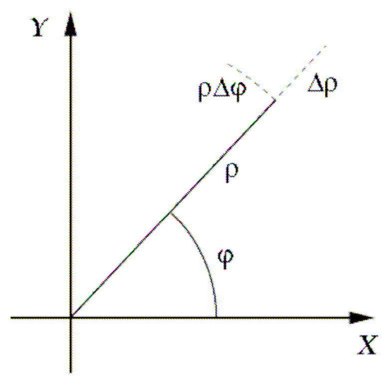
1. Współrzędne biegunowe

Na płaszczyźnie wybieramy układ kartezjański X,Y. Współrzędne biegunowe punktu (ρ,ϕ) to odpowiednio długość jego wektora wodzącego ρ oraz kąt między dodatnia półosią X a wektorem wodzącym ϕ, tzw. kąt azymutalny ($\phi = 0$ dla punktu na tej półosi). Związek pomiędzy współrzędnymi biegunowymi a kartezjańskimi:

$$x = \rho \cdot \cos\phi$$
$$y = \rho \cdot \sin\phi$$

Na poniższym rysunku zaznaczono nowe współrzędne oraz zmiany położenia przy niezależnych przyrostach zmiennych biegunowych.

Uwaga! Symbol ρ może oznaczać gęstość, współrzędną w układzie biegunowym oraz walcowym.



2. Współrzędne cylindryczne (walcowe)

W przestrzeni 3-wymiarowej wybieramy kartezjański układ X,Y,Z. Współrzędne cylindryczne punktu (ρ,ϕ,z) to odpowiednio:

$\rho -$ odległość od osi Z,

$\phi -$ kąt między dodatnia półosią X a rzutem wektora wodzącego na płaszczyźnie z=0, ϕ, tzw. kąt azymutalny ($\phi = 0$ dla punktu na dodatniej półosi X),

$z -$ zwykła współrzędna kartezjańska.

Związek pomiędzy współrzędnymi cylindrycznymi a kartezjańskimi:

$$x = \rho \cdot \cos\phi$$
$$y = \rho \cdot \sin\phi$$
$$z = z$$

Uwaga! Dla ustalonego układ cylindryczny jest układem biegunowym.

Wersory jednostkowe w układzie cylindrycznym

Każdej współrzędnej można przypisać wersor. Geometrycznie, wersor $\widehat{e}_\rho$ w punkcie A jest prostopadły do zbioru punktów tak samo odległych od początku układu współrzędnych co punkt A i ma zwrot od mniejszych do większych wartości ρ. Podobnie wersor $\widehat{e}_\phi$ w punkcie A jest prostopadły do zbioru punktów o takim samym kacie azymutalnym co punkt A i ma zwrot od mniejszych do większych wartości ϕ. Analogicznie sytuacja wygląda z „z" która jest podobna jak współrzędna kartezjańska.

Przykład :

Wyraź wektor wodzący punktu za pomocą wersorów w układzie cylindrycznym.

W małym przesunięciu $\Delta\vec{l} = \Delta x \cdot \vec{e}_x + \Delta y \cdot \vec{e}_y + \Delta z \cdot \vec{e}_z$ w układzie karteziańskim.
Wyraźmy zatem x i y w układzie cylindrycznym.

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{l} &= \Delta x \cdot \vec{e}_x + \Delta y \cdot \vec{e}_y + \Delta z \cdot \vec{e}_z = \\
&\Delta(\rho \cdot \cos\phi) \cdot \vec{e}_x + \Delta(\rho \cdot \sin\phi) \cdot \vec{e}_y + \Delta z \cdot \vec{e}_z = \\
&(\Delta\rho \cdot \cos\phi + \rho \cdot \Delta\cos\phi) \cdot \vec{e}_x + (\Delta\rho \cdot \sin\phi + \rho \cdot \Delta\sin\phi) \cdot \vec{e}_y + \Delta z \cdot \vec{e}_z = \\
&(\Delta\rho \cdot \cos\phi - \rho \cdot \sin\phi\Delta\sin\phi) \cdot \vec{e}_x + (\Delta\rho \cdot \sin\phi + \rho \cdot \cos\phi\Delta\phi) \cdot \vec{e}_y + \Delta z \cdot \vec{e}_z = \\
&\Delta\rho(\cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\phi \cdot \vec{e}_y) + \Delta\phi\rho(-\sin\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\phi \cdot \vec{e}_y) + \Delta z \cdot \vec{e}_z = \\
&\Delta\rho \cdot \vec{e}_\rho + \Delta\phi\rho \cdot \vec{e}_\phi + \Delta z \cdot \vec{e}_z
\end{aligned}$$

czyli

$$\vec{e}_\rho = \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\phi \cdot \vec{e}_y$$
$$\vec{e}_\phi = -\sin\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\phi \cdot \vec{e}_y$$
$$\vec{e}_z = \vec{e}_z$$

wektor wodzący $\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y = \rho \cdot \vec{e}_\rho$

3. Współrzędne sferyczne (kuliste)

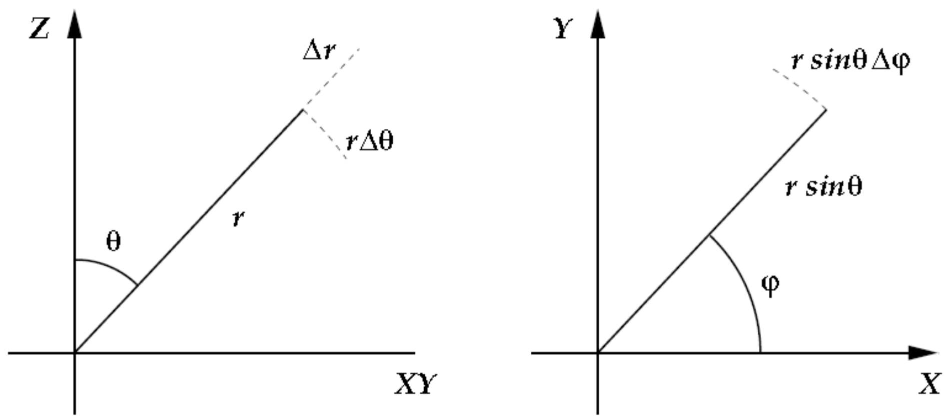
W przestrzeni 3-wymiarowej wybieramy kartezjański układ X,Y,Z. Współrzędne sferyczne punktu (r, θ, ϕ) to odpowiednio:
$r -$ odległość od początku układu współrzędnych,
$\theta -$ kąt między wektorem wodzącym punktu a dodatnią półosią Z. $\theta = 0$ dla punktów leżących na tej półosi, tzw. kąt biegunowy (polarny).

$\phi -$ identycznie jak w układzie cylindrycznym, $\phi -$ kąt między dodatnia półosią X a rzutem wektora wodzącego na płaszczyźnie z=0, tzw. kąt azymutalny.

Związek pomiędzy współrzędnymi cylindrycznymi a kartezjańskimi:

$$x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi$$
$$y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi$$
$$z = r \cdot \cos\theta$$

Na poniższym rysunku zaznaczono nowe współrzędne oraz zmiany położenia przy niezależnych przyrostach zmiennych sferycznych.



Przykład :
Wyraź wektor wodzący punktu za pomocą wersorów w układzie sferycznym.

W małym przesunięciu $\Delta\vec{l} = \Delta x \cdot \vec{e}_x + \Delta y \cdot \vec{e}_y + \Delta z \cdot \vec{e}_z$ w układzie karteziańskim.
Wyraźmy zatem x i y w układzie sferycznym.

$$\begin{aligned}\Delta\vec{l} = \Delta x \cdot \vec{e}_x + \Delta y \cdot \vec{e}_y + \Delta z \cdot \vec{e}_z = \\ \Delta(r \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi) \cdot \vec{e}_x + \Delta(r \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi) \cdot \vec{e}_y + \Delta(r \cdot \cos\theta) \cdot \vec{e}_z = \\ \Delta r\left(\sin\theta \cdot \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\theta \cdot \sin\phi \cdot \vec{e}_y + \cos\theta \cdot \vec{e}_z\right) + \\ \Delta\theta r\left(\cos\theta \cdot \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\theta \cdot \sin\phi \cdot \vec{e}_y - \sin\theta \cdot \vec{e}_z\right) + \\ \Delta\phi r \sin\theta\left(-\sin\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\phi \cdot \vec{e}_y\right) = \Delta r \cdot \vec{e}_r + \Delta\theta r \cdot \vec{e}_\theta + \Delta\phi r \sin\theta \cdot \vec{e}_\phi\end{aligned}$$

czyli

$$\vec{e}_r = \sin\theta \cdot \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\theta \cdot \sin\phi \cdot \vec{e}_y + \cos\theta \cdot \vec{e}_z$$
$$\vec{e}_\theta = \cos\theta \cdot \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\theta \cdot \sin\phi \cdot \vec{e}_y - \sin\theta \cdot \vec{e}_z$$
$$\vec{e}_\phi = -\sin\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\phi \cdot \vec{e}_y$$

wektor wodzący $\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z = r \cdot \vec{e}_r$

Zadania do rozwiązania na ćwiczeniach

Zadanie 1
Udowodnij, że na punkt materialny o masie m umieszczony wewnątrz jednorodnej powłoki sferycznej o dowolnych rozmiarach nie działa żadna siła.

Rozwiązanie:
Dokonajmy podziału powierzchni sfery na analogiczne elementy. W tym celu wyobraźmy sobie dwa symetryczne stożki o wspólnym wierzchołku w punkcie, gdzie znajduje się masa m. Podstawy stożków wycinają elementy na powierzchni kulistej o wartościach $\Delta S_1, \Delta S_2$.
Stosunek powierzchni podstaw wynosi

$$\frac{\Delta S_1}{\Delta S_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2},$$

gdzie r_1, r_2 to odległości masy m od powierzchni kulistej.
Siła grawitacyjna działająca na masę m a pochodząca od powierzchni ΔS_1 wynosi

$$F_1 = G\frac{mM_1}{r_1^2} = G\frac{m\Delta S_1 \rho}{r_1^2},$$

gdzie masa pochodząca od pierwszego elementu sfery to $M_1 = \Delta S_1 \cdot \rho$ dla ρ - gęstości sfery.
Analogicznie siła grawitacyjna pochodząca od powierzchni ΔS_2 wynosi

$$F_1 = G\frac{mM_2}{r_2^2} = G\frac{m\Delta S_2 \rho}{r_2^2}$$

gdzie masa pochodząca od drugiego elementu sfery to $M_2 = \Delta S_2 \cdot \rho$ dla ρ - gęstości sfery.

Stosunek obu sił wynosi

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{G\frac{m\Delta S_1 \rho}{r_1^2}}{G\frac{m\Delta S_2 \rho}{r_2^2}} = \frac{\Delta S_1 \cdot r_2^2}{\Delta S_2 \cdot r_1^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2} = 1.$$

Zadanie 2 (wprowadzenie pojęcia strumienia)
Przez czas T=10 h padał pionowo deszcz o natężeniu $j = 0{,}1\frac{kg}{m^2 h}$. Oblicz, ile wody zebrała stojąca pionowo beczka, której poziomy otwór ma powierzchnię $S = 1m^2$. Ile wody byłoby w beczce po tym samym deszczu, gdyby beczka była przechylona tak, że jej oś tworzyłaby kąt α z pionem ?

Rozwiązanie:
Masa wody, która została zebrana w pionowej beczce wynosi

$$M = j \cdot S \cdot T = 0{,}1 \frac{kg}{m^2 h} \cdot 1m^2 \cdot 10h = 1kg$$

W przypadku, gdy beczkę przechylimy pod kątem α do pionu (otwór jest wtedy pod katem α do poziomu) to powierzchnia otworu beczki „widziana" przez deszcz – czyli rzut tej powierzchni na płaszczyznę poziomą – będzie równe $S' = S \cdot \cos\alpha$

A zatem

$$M = j \cdot S' \cdot T = j \cdot S \cdot \cos\alpha \cdot T = \cos\alpha \cdot 1kg$$

Wniosek:

Wykorzystując powyższe zadanie i analogie do strumienia wody, światła itd. Dochodzimy do wniosku, że aby móc ocenić wielkość strumienia należy sprawdzić ilość wody np. przepływającą przez dana powierzchnię. W tym przypadku ilość przepływającej wody określa wartość natężenia strumienia (j). Przytoczony przykład jest modelowy, ponieważ pole grawitacyjne czy elektryczne nie rozchodzi się w przestrzeni jak strumień wody i nie musi być polem jednorodnym. Ale pozwoli nam częściowe wytłumaczenie cech pola.

W polu centralnym strumień odpowiada „liczbie linii" przechodzącej przez powierzchnię jednostkową. Wyobraźmy sobie powierzchnię S umieszczoną prostopadle do linii pola. Im dalej od ładunku źródłowego będziemy przesuwali powierzchnię, tym mniejsza „liczba linii" przez tę powierzchnię będzie przechodziła, a zatem tym mniejsza będzie wartość strumienia natężenia pola.

Strumień pola $\vec{A}$ przez powierzchnię S to $\int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \sum_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$

Kierunek $d\vec{S}$ jest prostopadły do powierzchni ds. oraz $|d\vec{S}| = dS$. Zwrot elementu skierowanego ustalamy zależnie od potrzeb. Dla powierzchni zamkniętych najczęściej stosowana jest konwencja, w której zwrot $d\vec{S}$ jest „na zewnątrz" wydzielonej, skończonej objętości. W zadaniu 2, jeśli deszcz opiszemy wektorem $\vec{j}$ o zwrocie do dołu, to jego strumień wyniesie $\vec{j} \cdot \vec{S}$. Jeśli rozsądnie wybierzemy orientację powierzchni otworu – „od otworu do dna" to otrzymamy szybkość przyrostu masy wody w beczce.

Wprowadzenie do zadania 3 (układ sferyczny) – patrz początek

Bardzo proszę odwołać się do układu sferycznego zamieszczonego powyżej ograniczając się wyłącznie do wytłumaczenia nowych zmiennych (bez wyprowadzeń matematycznych).

Zadanie 3

Oblicz strumień natężenia pola grawitacyjnego przechodzący przez sferę o promieniu R (orientacja „na zewnątrz"), w środku której znajduje się punkt materialny o masie M.

Rozwiązanie:

Natężenie pola grawitacyjnego w odległości r od punktu o masie M wynosi $\vec{E}_{grawit} = -G\frac{M}{r^2}\hat{e}_r$ (wersor z układu sferycznego). Powierzchnię orientujemy na zewnątrz $d\vec{S} = dS\hat{e}_r$

$$\oint_S \vec{E}_{grawit} \cdot d\vec{S} = \sum_S \vec{E}_{grawit} \cdot d\vec{S} = -\sum_S G\frac{M}{R^2}\hat{e}_R \cdot (dS\hat{e}_R)$$

Całkowita powierzchnia sfery otaczająca punkt materialny o masie M wynosi $S = 4\pi R^2$, gdzie R- promień kuli. Ponieważ masę M umieściliśmy w środku sfery, wartość natężenia pola grawitacyjnego na sferze będzie taka sama we wszystkich punktach.
Zatem

$$-\sum_S G\frac{M}{R^2}\hat{e}_R \cdot (dS\hat{e}_R) = -G\frac{M}{R^2} \cdot 4\pi \cdot R^2 = -4\pi GM .$$

Wniosek:
Wartość strumienia zależy jedynie od wielkości masy M.
Potwierdza to, że całkowita ilość linii przechodzących przez powierzchnię kulistą otaczającą ładunek źródłowy (np. masa, ładunek elektryczny) będzie zawsze taka sama i niezależna od odległości tej powierzchni od źródła. Możemy to sformułować w postaci **prawa Gaussa**:

Wartość strumienia wektora natężenia pola elektrycznego E przechodzącego przez dowolną zamkniętą powierzchnię S jest równa wartości ładunku całkowitego zawartego wewnątrz tej powierzchni. Co zapisujemy

dla pola elektrycznego $\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$ dla pola grawitacyjnego $\Phi = -4\pi GM$

Widzimy tu analogie, że G odpowiada $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

Analogia pomiędzy polem elektrostatycznym a grawitacyjnym

	Pole grawitacyjne	Pole elektrostatyczne
Źródło	Masa M	Ładunek Q
Natężenie pola	$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m}$	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$
Natężenie pola centralnego	$\vec{\gamma} = -\frac{GM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$	$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$
Siła oddziaływania dwóch obiektów	$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$	$\vec{F} = k\frac{Qq}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$
Energia potencjalna	$E_{pg} = \frac{-GMm}{r}$ pole sił przyciągania	$E_{pe} = k\frac{Qq}{r}$, gdy $Qq < 0$ pole sił przyciągania, $Qq > 0$ pole sił odpychania

Jak wyznaczyć natężenie pola grawitacyjnego lub elektrycznego, w przypadku, gdy rozkład ładunków wytwarzających to pole jest symetryczny oraz gdy ładunki znajdują się na powierzchniach ?

1. Daną powierzchnię, na której znajduje się masa lub ładunek należy otoczyć powierzchnią o symetrii kulistej, cylindrycznej lub względem płaszczyzny. Może nią być powierzchnia kuli, walca lub prostopadłościanu.
2. Otoczenia naładowanej powierzchni dokonujemy tak, aby przewidywany wektor pola był w każdym punkcie prostopadły do powierzchni z punktu 1. Przy takim wyborze kąt pomiędzy $\vec{S}$ a $\vec{E}$ będzie równy zero.
3. Stosujemy prawo Gaussa

   dla pola grawitacyjnego $\Phi = -4\pi GM$ dla pola elektrycznego $\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$
4. Obliczamy wartość strumienia za pomocą wartości natężenia pola i powierzchni
$$\Phi = E \cdot S$$
5. Porównujemy 4 oraz 5

Wyjaśnijmy dokładniej punkt 1 rozwiązując poniższe zadanie.

Zadanie 4

W pustej przestrzeni znajduje się punktowe źródło o natężeniu $\vec{E}(\vec{r}) = a\frac{\vec{r}}{r^3}$, gdzie a jest pewna stałą, a $\vec{r}$ wektorem położenia o początku w źródle pola. Pokaż, że strumień natężenia pola przez zamkniętą, otaczającą źródło powierzchnię nie zależy od jej kształtu.
Wskazówka: Podziel przestrzeń na ostrosłupy o wierzchołkach w źródle pola.

Rozwiązanie:
Powierzchnię przybliżam N małymi trójkątami (mogą być inne figury, ale trójkąty najlepiej przybliżają powierzchnię). Wierzchołki każdego trójkąta i źródło pola wyznaczają ostrosłup. Wszystkie ostrosłupy wypełniają objętość ograniczona powierzchnią.
Strumień pola:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{N} \vec{E}_k \cdot \vec{S}_k = a\sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \cdot \frac{\vec{S}_k}{r_k^3}$$

Wektor $\vec{S}_k$ jest proporcjonalny do powierzchni, skierowany na zewnątrz, a jego wartość jest równa polu powierzchni małego trójkąta o indeksie k. Pole jest radialne i liczy się tylko pole powierzchni rzutu trójkąta na płaszczyznę prostopadłą do aktualnego $\vec{r}_k$:

$$\Phi = a\sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \cdot \frac{\vec{S}_k}{r_k^3} = a\sum_{k=1}^{N} r_k \cdot \frac{\vec{S}_{\perp k}}{r_k^3} = a\sum_{k=1}^{N} \frac{\vec{S}_{\perp k}}{r_k^2}$$

czyli moglibyśmy od początku używać ostrosłupów, których podstawy są prostopadłe do wysokości. Wyobraźmy sobie modyfikację powierzchni poprzez skalowanie ostrosłupów (wysokość się zmienia, pole podstawy też, ale kąty pozostają te same). Zauważmy z podobieństwa trójkątów, że pole podstawy ostrosłupa $\vec{S}_{\perp k} \sim r_k^2$, co kończy dowód. r_k traktujemy jako wysokość ostrosłupa.

Obliczmy strumień przez sferę o promieniu R (czyli $r_k = R$)

$$\Phi = a\sum_{k=1}^{N}\frac{\vec{S}_{\perp k}}{r_k^2} = a\frac{1}{R^2}4\pi R^2 = 4\pi a$$, gdzie

dla pola grawitacyjnego $a = -GM$,

dla pola elektrycznego $a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}$

Zadanie 5 (gęstość objętościowa ładunku)

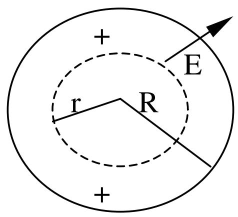
Przedstaw zależność natężenia pola elektrycznego od odległości od środka kuli o promieniu R, równomiernie naładowanej dodatnim ładunkiem Q o gęstości objętościowej ρ.

Rozwiązanie:

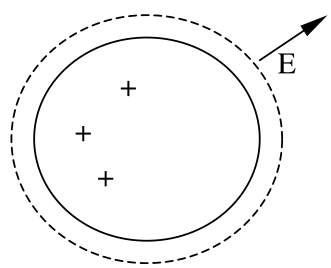
Ładunek wewnątrz kuli jest równomiernie rozłożony, zatem kąt pomiędzy wektorem natężenia oraz promień wynosi zero. Aby zastosować prawo Gaussa, otaczamy kulę zamkniętą powierzchnią również w kształcie kuli na której znajduje się ładunek. Powierzchnia otaczająca naładowaną kule może znajdować się

a) wewnątrz naładowanej kuli,
b) na zewnątrz naładowanej kuli.

a)



b)



W obu przypadkach wektor natężenia pola E zawsze będzie prostopadły do wektora powierzchni kuli w każdym jej punkcie.

a) Ładunek zgromadzony wewnątrz powierzchni = objętość kuli zamkniętej * gęstość ładunku ρ czyli

$$Q = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$$

gdzie r-promień powierzchni otaczającej.

$$\Phi = S\cdot E\cdot\cos\alpha = 4\pi r^2\cdot E\cdot 1 \qquad (1)$$

Z prawa Gaussa

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{4\pi r^3\rho}{3\varepsilon_0\varepsilon_r} \qquad (2)$$

Porównując (1) i (2)

$$E = \frac{r\rho}{3\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

b) W drugim przypadku, ładunek zgromadzony wewnątrz naładowanej kuli wynosi:

$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

gdzie r-promień kuli naładowanej ładunkiem Q.

$$\Phi = S \cdot E = 4\pi r^2 \cdot E$$

gdzie r-promień powierzchni otaczającej. Analogicznie jak powyżej otrzymujemy

$$E = \frac{R^3 \rho}{3\varepsilon_0 \varepsilon_r r^2}$$

Podsumowując, natężenie pola wewnątrz naładowanej kuli rośnie proporcjonalnie, poza kulą maleje wraz z kwadratem odległości.

Zadanie 6 (gęstość powierzchniowa ładunku)
Przedstaw zależność natężenia pola elektrycznego od odległości od środka kuli równomiernie naładowanej powierzchniowo, ładunkiem dodatnim o gęstości σ.

Rozwiązanie:
Wewnątrz kuli nie istnieją żadne ładunki. Strumień i natężenie pola wewnątrz wynoszą 0.
Na zewnątrz kuli strumień wytwarzają ładunki zgromadzone na jej powierzchni.
Naładowaną kulę otaczamy powierzchnia sferyczną umieszczoną współśrodkowo, o promieniu większym niż promień naładowanej kuli.

$$\Phi = S \cdot E = 4\pi r^2 \cdot E$$

Porównując do prawa Gaussa $\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{4\pi\sigma R^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$

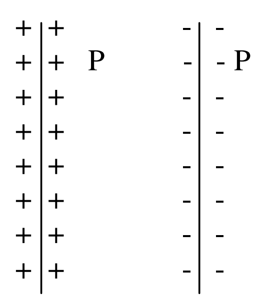
Czyli

$$4\pi r^2 \cdot E = \frac{4\pi\sigma R^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_r r^2}$$

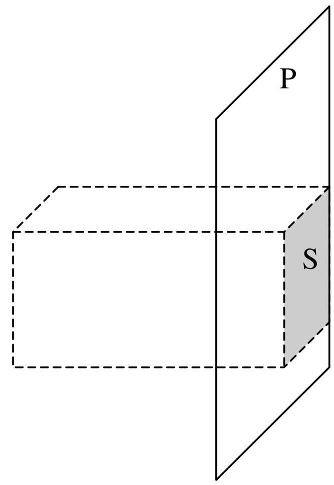
Podsumowując, wewnątrz kuli powierzchniowo naładowanej natężenie będzie równe zero, natomiast na zewnątrz maleje wraz z kwadratem odległości od środka tej kuli.

Zadanie 7
Dwie duże płaszczyzny (oznaczone obok na rysunku jako P) umieszczono równolegle do siebie. Na jednej z nich znajduje się ładunek dodatni, a na drugiej ujemny o gęstości powierzchniowej σ. Oblicz natężenie pola elektrycznego wewnątrz i na zewnątrz płaszczyzn.



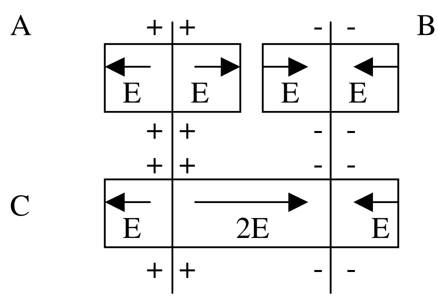
Rozwiązanie:

Zastanówmy się nad kształtem powierzchni, która będzie otaczać dowolnie naładowaną płaszczyznę. Powierzchnia powinna posiadać taką symetrię, aby kierunek pola wytworzony przez ładunki był w każdym punkcie prostopadły do kierunku płaszczyzny otaczającej.



Ładunek jest regularnie rozłożony ponieważ siły pola elektrycznego pochodzące od tego ładunku, styczne do powierzchni muszą się wzajemnie równoważyć. Dlatego wektor natężenia pola E w dowolnym punkcie płaszczyzny musi mieć do niej kierunek prostopadły. Powierzchnia, którą otoczymy dowolną płaszczyznę powinna mieć zatem kształt prostopadłościanu przeciętego naładowana płaszczyzną.

Wartość całkowitego strumienia przechodzącego przez powierzchnię S, będącą podstawą prostopadłościanu obliczymy z $\Phi = E \cdot S$. Wartość natężenia pola przechodzi jeden raz przez powierzchnię górną i dolną prostopadłościanu, dlatego nasz rysunek możemy uprościć przedstawiając go tak jak poniżej



Przez pozostałe ściany prostopadłościanu nie przenika żaden strumień.

Czyli wartość całkowitego strumienia zamkniętego wewnątrz prostopadłościanu wynosi

$$\Phi = 2E \cdot S$$

Z prawa Gaussa

$$\Phi = \frac{\sum Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r},$$

gdzie całkowity ładunek zgromadzony na płaszczyźnie wynosi $\sum Q = \sigma \cdot S$.

Czyli dla przypadków A i B

$$ES + ES = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} \quad \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}.$$

Przypadek C:

Natężenie pola na zewnątrz: przez powierzchnie prostopadłościanu równoległą do naładowanej płaszczyzny przenikają linie pola elektrycznego, których zwroty w przypadku płaszczyzny naładowanej dodatnio skierowane sa od płaszczyzny na zewnątrz, natomiast dla płaszczyzny ujemnej – odwrotnie. Wynika z tego, że przez daną powierzchnię przenikają dwa strumienie, których zwroty są przeciwnie skierowane

$$\Phi = E \cdot S - E \cdot S = 0 .$$

Wartość natężenia pola pomiędzy płaszczyznami:

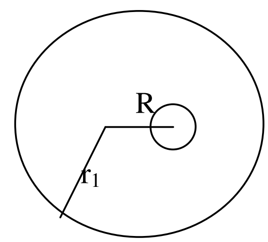
$$E_C = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} .$$

Wprowadzenie do zadania 8 (układ cylindryczny) – patrz początek

Bardzo proszę odwołać się do układu sferycznego zamieszczonego powyżej ograniczając się wyłącznie do wytłumaczenia nowych zmiennych (bez wyprowadzeń matematycznych).

Zadanie 8

Znajdź natężenie pola E w walcowym wydrążeniu w jednorodnie naładowanym walcu. Gęstość ładunkowa wynosi ρ. Promienie walców to odpowiednio r_1 (duży- patzr rysunek) oraz r_2.(mały) Odległość między środkami R $(r_1 > R + r_2)$.



Rozwiązanie:

Zakładamy nieskończoną długość walca. Symetria problemu narzuca aby $\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \cdot \vec{r}$ gdzie $\vec{r}$ - wersor promienia w układzie cylindrycznym.

W zadaniu wykorzystamy zasadę superpozycji: nałożymy pełen walec (r_1, gęstość ρ) i pełen walec (r_2, gęstość $-\rho$) w $\vec{R}$

Wyznaczmy wzór opisujący pole we wnętrzu jednego walca:

Chcąc znaleźć $E(r)$ otoczymy wnętrze walca o promieniu r i pewnej dowolnej długości Δz powierzchnia walcową.

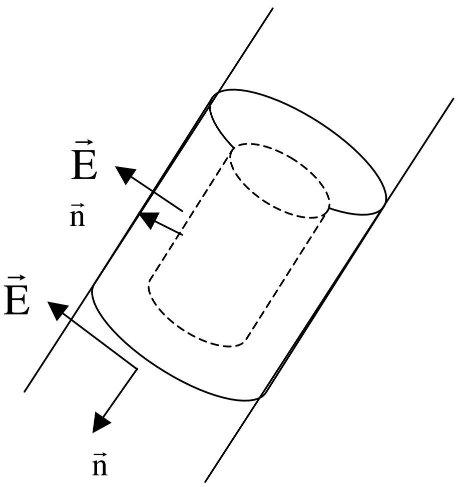
Z prawa Gaussa

$$\Phi = \frac{Q_{\text{w srodku}}}{\varepsilon_0}$$

czyli $\Phi_{dno} + \Phi_{gora} + \Phi_{bok} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \pi r^2 \Delta z$.

Ponieważ na dole i górze $\vec{E}(\vec{r}) \perp \hat{n}$, to $\Phi_{dno} = \Phi_{gora} = 0$.

Dla boku $\vec{E}(\vec{r}) \parallel \hat{n}$ to $\vec{E} \cdot \hat{n} = E(r)$.



Otaczamy nasz obszar powierzchnią o r=const. Czyli

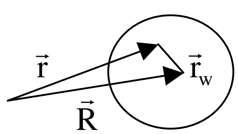
$$E(r)\cdot 2\pi r\Delta z = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\pi r^2\Delta$$

$$E(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r$$

Ponieważ $\vec{E} = E\cdot\vec{r}$ to

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\hat{r}$$

W przypadku naszych 2 walców:



$$\vec{r}_w = \vec{r} - \vec{R}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_\rho(\vec{r}) + \vec{E}_{-\rho}(\vec{r}) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(\vec{r} - \vec{r}_{wew}) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\vec{r} - \left(\vec{r} - \vec{R}\right)\right) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\vec{R}$$

Wniosek:
We wnętrzu wydrążenia pole jest stałe!