

Fizyka elementarna – materiały dla studentów. Części 9, 10 i 11.
Moment pędu. Moment bezwładności.

Przygotowane częściowo na podstawie materiałów z roku akademickiego 2007/8.

Literatura (wspólna dla wszystkich trzech części).

- **Niezbędne minimum:** Jan Blinowski, Włodzimierz Zielicz „Fizyka i astronomia. Część I”, rozdział 4, podrozdział 15, (strony 172–190).
- Mile widziane rozszerzenie: David Halliday, Robert Resnick, Jarl Walker „Podstawy fizyki”, tom 1, rozdziały 11 i 12 (strony 260 - 329)

Twierdzenia i definicje.

Moment bezwładności układu punktów materialnych względem ustalonej osi dany jest wyrażeniem:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

gdzie m_i oznacza masę i -tego punktu materialnego, a r_i jego odległość od ustalonej osi.

Twierdzenie Steinera. Moment bezwładności I ciała o masie m względem dowolnej osi oddalonej o h od osi przechodzącej przez środek masy i równoległej do niej jest równy:

$$I = I_{CM} + mh^2$$

I_{CM} oznacza moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy ciała.

Prawo dynamiki ruchu bryły sztywnej wokół nieruchomej osi obrotu:

Ruch obrotowy wokół ustalonej osi: $\sum_i M_i = I\varepsilon$, gdzie M_i - wartości momentów wszystkich sił działających na ciało względem ustalonej osi, I - moment bezwładności względem ustalonej osi, ε - wartość przyspieszenia kątownego.

Wektor momentu pędu. Wektor \vec{J} momentu pędu \vec{p} punktu materialnego względem punktu O jest zdefiniowany iloczynem wektorowym:

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$$

\vec{r} jest wektorem zaczynającym się w punkcie O i kończącym w punkcie w którym znajduje się punkt materialny.

W ruchu obrotowym bryły sztywnej względem ustalonej osi obrotu, całkowity moment pędu bryły względem tej osi ma wartość:

$$J = I\omega$$

I - moment bezwładności względem ustalonej osi, ω - wartość prędkości kątownej.

Druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego wokół ustalonej osi.

$$\vec{M} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{J}}{\Delta t}$$

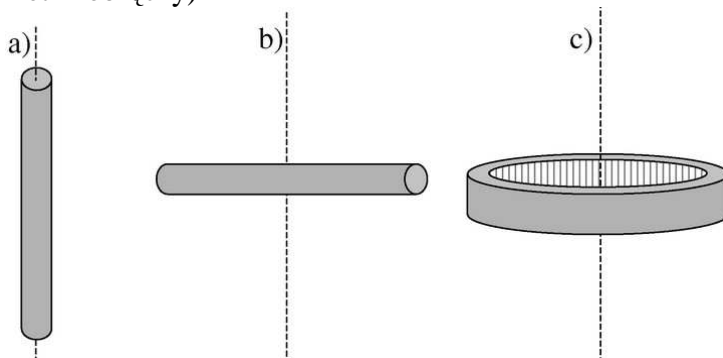
\vec{M} - wektor momentu siły, $\Delta \vec{J}$ - zmiana wektora momentu pędu w czasie Δt .

Zasada zachowania momentu pędu. Jeżeli całkowity moment sił względem osi obrotu, działający na bryłę jest równy zero, to jej moment pędu względem tej osi jest stały.

CZĘŚĆ 9

Pytania.

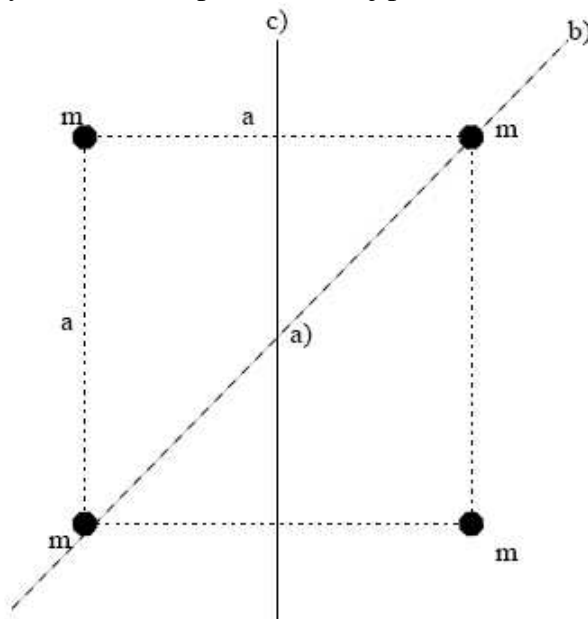
1. Jeżeli bardzo cienki pręt o długości l ma masę równomiernie rozłożoną na całej długości (jest jednorodny), to w którym punkcie znajduje się jego środek masy?
2. Trzy ciała na poniższym rysunku (a, b – pręty, c – cienka obręcz) mają taką samą masę M , lecz w różny sposób rozmieszczoną względem osi obrotu. Bez wykonywania szczegółowych obliczeń powiedz w którym przypadku moment bezwładności względem osi obrotu jest największy a w którym najmniejszy. (W przypadku c, oś obrotu przechodzi przez środek symetrii obręczy)



Zadania do rozwiązania na ćwiczeniach.

Zadanie 1. Cztery punkty materialne o masie m każdy znajdują się w wierzchołkach kwadratu o boku a . Wyznacz położenie środka masy tego układu. Wyznacz jego momenty bezwładności względem osi przechodzących przez środek masy układu i

- a) prostopadłej do płaszczyzny układu
- b) leżącej w płaszczyźnie układu i przechodzącej przez dwa wierzchołki
- c) leżącej w płaszczyźnie układu i przechodzącej przez środki boków kwadratu.



Zadanie 2. Wyznacz moment bezwładności cienkiego pręta o masie m i długości l względem:

- a) osi prostopadłej do pręta i przechodzącej przez koniec pręta.
- b) osi prostopadłej do pręta i przechodzącej przez jego środek masy.

Zadanie 3. Oblicz moment bezwładności jednorodnego walca o masie M i promieniu podstawy R .

Zadanie 4. Wyznacz moment bezwładności grubej, jednorodnej rury o masie m , promieniu wewnętrznym r i promieniu zewnętrznym R względem osi symetrii obrotowej.

Zadania domowe – część 9.

Zadanie 1. Znaleźć moment bezwładności cząsteczki HCl względem osi prostopadłej do osi cząsteczki i przechodzącej przez środek masy. Długość wiązania cząsteczki wynosi $l=1.27 \cdot 10^{-10}$ m. Masy atomów wchodzących w skład cząsteczki wynoszą: $m_H=1.01u$, $m_{Cl}=35u$. (u jest jednostką masy atomowej $1u=1.67 \cdot 10^{-27}$ kg).

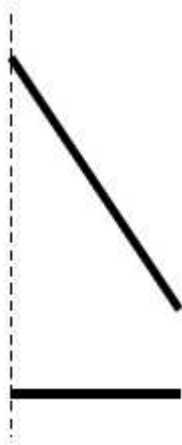
Zadanie 2. Wyznaczyć moment bezwładności układu trzech ciał materialnych o masie m każde, znajdujących się w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku a , względem osi symetrii przechodzącej przez jedno z ciał.

Zadanie 3. Korzystając z twierdzenia Steinera, oblicz:

- moment bezwładności walca względem jego tworzącej,
- moment bezwładności kuli względem osi stycznej do jej powierzchni.

Zadanie 4. Wyobraźmy sobie obiekt składający się z trzech identycznych prętów o długości a i masie $m/3$ każdy, ułożonych w trójkąt równoboczny. Wyznaczyć moment bezwładności tego obiektu względem osi symetrii leżącej w płaszczyźnie trójkąta.

Wskazówka: Rozważyć (z definicji) ile będzie wynosił moment bezwładności pręta względem osi nachylonej do niego pod kątem α (porównaj dwa pręty o tej samej masie pokazane na rysunku poniżej)



CZEŚĆ 10.

Pytania.

1. Dlaczego helikopter musi mieć przynajmniej dwa wirniki?
2. Dlaczego wirujący bąk nie przewraca się?
3. W jaki sposób łyżwiarze figurowi na lodzie regulują prędkość obrotową podczas wykonywania piruetów? Zastanów się lub spróbuj zaobserwować. Dobrze widać to na filmach pod adresami <http://www.youtube.com/watch?v=k1s2gGnRAd0> lub <http://www.youtube.com/watch?v=RsD2JnmT-9U>. Jakie zjawisko wykorzystują przy tym łyżwiarze?

Zadania do rozwiązania na ćwiczeniach.

Zadanie 1. Kulka o masie m spoczywająca w pewnym układzie współrzędnych w chwili czasu $t=0$ zaczyna spadać w jednorodnym, stałym polu grawitacyjnym o natężeniu g . Jej tor jest opisany równaniami $x=L=const$ oraz $z=0$. W tym samym układzie współrzędnych przyspieszenie kulki opisuje wektor $\vec{g} = [0, -g, 0]$. Znajdź moment pędu kulki w dowolnej chwili t , względem początku układu współrzędnych. Wyznacz również moment siły działający na kulkę względem tego samego punktu i pokaż że zasada dynamiki $\vec{M} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{J}}{\Delta t}$ prowadzi do poprawnego wyniku.

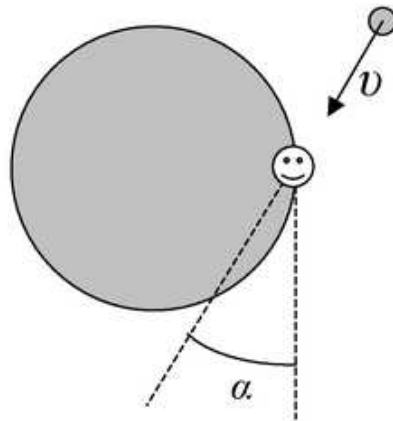
Zadanie 2. Karuzela o momencie bezwładności I i promieniu R spoczywa. Do karuzeli podbiega dziecko o masie m i wskakuje na nią. Prędkość dziecka przed wskoczeniem wynosi v i jest styczna do obwodu karuzeli. Oblicz prędkość obrotową z jaką będzie się obracać karuzela po wskoczeniu na nią dziecka.

Zadanie 3. Na krześle obrotowym siedzi człowiek i trzyma w wyciągniętych rękach odważniki o masach 10 kg każdy. Odległość od każdego odważnika do osi obrotu ławki wynosi $l_1=75$ cm. Krzesło obraca się z częstotliwością 1Hz. Jak zmieni się prędkość kątowna krzesła, jeśli człowiek zegnije ręce tak, aby odległość każdego odważnika do osi obrotu zmniejszyła się do 20 cm? Moment bezwładności człowieka i krzesła względem osi obrotu jest równy $I_0=2.5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

Zadania domowe – część 10.

Zadanie 1. Znaleźć wewnętrzny moment pędu układu Ziemia – Księżyc względem jego środka masy. Masa Ziemi $6\cdot 10^{24}$ kg, masa Księżyca $7.4\cdot 10^{22}$ kg, odległość między Ziemią a Księżycem $3.85\cdot 10^5$ km, Okres obiegu księżyca $T=2.36\cdot 10^6$ s.

Zadanie 2. Dziecko o masie $m=30$ kg stoi na brzegu nieobrcającej się karuzeli o promieniu $R=2$ m i momencie bezwładności względem osi obrotu $I=150 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. W pewnej chwili dziecko łapie piłkę o masie $m_p=1$ kg, rzuconą do niego przez kolegę. Tuż przed złapaniem jej przez dziecko piłka ma prędkość poziomą o wartości $v=12$ m/s skierowaną pod kątem $\alpha=40^\circ$ do prostej stycznej do zewnętrznej krawędzi karuzeli w punkcie w którym stoi dziecko (rysunek). Ile wynosi prędkość kątowna karuzeli tuż po złapaniu piłki przez dziecko.



Zadanie 3. Na krześle obrotowym siedzi człowiek i trzyma nad sobą koło rowerowe obracające się z prędkością kątową $\omega_0=15 \text{ s}^{-1}$. Oś koła ustawiona jest pionowo i pokrywa się z osią obrotu krzesła. Z jaką prędkością kątową będzie obracać się krzesło, jeżeli człowiek obróci koło wokół poziomej osi o 180° ? Moment bezwładności człowieka i krzesła $I=3 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, a moment bezwładności koła względem jego osi $I_0=0.5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

CZEŚĆ 11

Pytania.

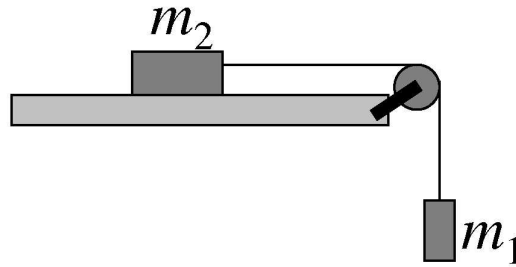
1. Na czym polega różnica między toczeniem się koła bez poślizgu po jakiejś powierzchni, a ślizganiem się koła po tej powierzchni?

Zadania do rozwiązania na ćwiczeniach.

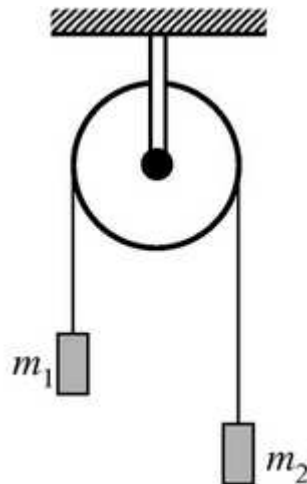
Zadanie 1. Z równi pochyłej stacza się bez poślizgu jednorodny walec o masie m . Znaleźć przyspieszenie krążka i siłę tarcia, jeżeli kąt nachylenia równi do poziomu wynosi α . Uzyskaj wyniki liczbowe dla $\alpha = \pi/6$ i $m = 500\text{g}$.

Zadanie 2. Jednorodnemu walcowi o promieniu r i masie m nadano początkową prędkość kątową ω_0 i opuszczono na płaską poziomą powierzchnię. Kinetyczny współczynnik tarcia między walcem a tą powierzchnią wynosi μ . Po jakim czasie t walec przestanie się ślizgać i zacznie się wyłącznie toczyć? Jaka jest wtedy prędkość v jego środka masy?

Zadanie 3. Napisać równania ruchu dla układu przedstawionego na rysunku, uwzględniając siłę tarcia działającą na masę m_2 (współczynnik tarcia kinetycznego wynosi μ), oraz moment bezwładności I bloczka, który ma promień R . Łączące linki są nieważkie i nierozciągliwe.



Zadanie 4. Przez krążek zawieszony na poziomej osi przerzucono nieważką nić, do której końców przymocowano ciężarki o masach m_1 i m_2 (rysunek poniżej). Krążek jest jednorodny a jego masa wynosi m_0 . Znajdź przyspieszenie liniowe ciężarków. Przyjmij że nić nie ślizga się po obrzeżu krążka. Tarcie w łożysku krążka należy pominąć. Uzyskaj wyniki liczbowe dla $m_1 = 300\text{g}$, $m_2 = 200\text{g}$ i $m_0 = 300\text{g}$.



Zadania do rozwiązania w domu – część 11.

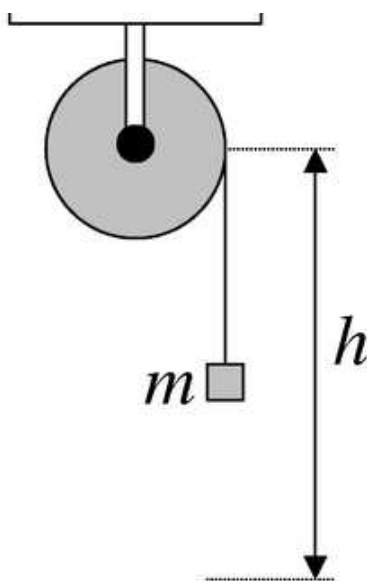
Zadanie 1. Koło zamachowe w kształcie pełnego jednorodnego walca o masie 50kg i średnicy 1 m wykonuje 600 obrotów na minutę. Zostało ono wyhamowane za pomocą hamulca naciskającego na powierzchnię boczną koła z siłą 200N w czasie 10s. Znajdź współczynnik tarcia kinetycznego pomiędzy kołem a hamulcem. Tarcie w łożyskach zaniedbaj.

Zadanie 2. Kula i walec o tych samych masach i promieniach staczają się z równi pochyłej. Startują z tego samego położenia a w chwili początkowej spoczywały. Które z tych ciał znajdzie się wcześniej u podstawy równi?

Zadanie 3. Na walec o masie m i promieniu R mogący obracać się swobodnie względem osi symetrii nawinięto nić o długości l . Walec „rozkrecono” ciągnąc za nić ze stałą siłą F . Ile będzie wynosić prędkość obrotowa walca po ściągnięciu nici, jeśli nić się nie ślizga po walcu.

Zadanie 4. Na bloczku o promieniu R i momencie bezwładności I_0 jest nawinięta nić, na końcu której wisi ciało o masie m . Jaką prędkość kątową będzie miał bloczek w chwili gdy ciało opuści się na odległość h .

Na podstawie zadania 7-1: J. Jędrzejewski, W. Kruczek, A. Kujawski „Zbiór zadań z fizyki dla uczniów szkół średnich i kandydatów na studia”



Zadanie 5. Napisać równania ruchu dla układu przedstawionego na poniższym rysunku, uwzględniając siłę tarcia działającą na masę m_1 (współczynnik tarcia kinetycznego wynosi μ) oraz moment bezwładności I bloczka, który ma promień R . Łączące linki są nieważkie i nierozciągliwe. Kąt nachylenia równi wynosi α .

