Wykład 8.

Matematyka 2, semestr letni 2010/2011

Równania różniczkowe są podstawowym narzędziem w fizyce matematycznej. Przyjrzyjmy się poniższym przykładom:

Przykład 1. Jeśli $N(t)$ oznacza liczbę atomów pierwiastka promieniotwórczego, która w chwili czasu t znajduje się w próbce, to funkcja $t \mapsto N(t)$ spełnia następujące równanie:

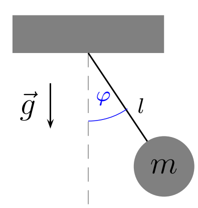
$$\frac{\mathsf{d}N}{\mathsf{d}t} = -\lambda N. \tag{1}$$

W każdej chwili czasu szybkość rozpadu jest proporcjonalna do liczby atomów w próbce. Znak „$-$” oznacza, że liczba atomów się zmniejsza (pochodna jest ujemna). Nie trudno zgadnąć, że rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$N(t) = A\exp(-\lambda t) \tag{2}$$

Stała A jest równa $N(0)$ i ma interpretację początkowej liczby atomów. ♣

Przykład 2. Na nieważkiej i nierozciągliwej nici długości l wisi masa m w stałym polu grawitacyjnym o przyspieszeniu g. Druga zasada dynamiki Newtona może zostać zapisana w postaci równania różniczkowego drugiego rzędu na funkcję $t \mapsto \varphi(t)$ opisującą zależność od czasu kąta wychylenia masy od pionu:



$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin(\varphi). \tag{3}$$

Jeśli wychylenie jest małe, możemy użyć przybliżenia $\sin(\varphi) \approx \varphi$ otrzymując równanie oscylatora harmonicznego:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi. \tag{4}$$

W równaniach (3) i (4) dwie kropki nad funkcją oznaczają drugą pochodną po parametrze t. Parametr ten identyfikowany jest z czasem. ♣

Przykład 3. Kolejny przykład to tzw. *równanie falowe*:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \tag{5}$$

w jednym wymiarze. Łatwo sprawdzić, że równanie to spełniane jest przez funkcje postaci:

$$f(t,x) = \varphi(x+vt) + \psi(x-vt),$$

gdzie φ i ψ są funkcjami jednej zmiennej różniczkowalnymi przynajmniej dwukrotnie. Rozwiązanie to można uzyskać dokonując zamiany zmiennych

$$u = x + vt, \quad w = x - vt.$$

Parametr v występujący w równaniu interpretowany jest jako prędkość fali. Funkcja

$$(t, x) \longmapsto \varphi(x + vt)$$

opisuje falę poruszającą się w lewo, zaś

$$(t, x) \longmapsto \psi(x - vt)$$

falę poruszającą się w prawo. ♣

Przykład 4. W mechanice kwantowej fundamentalne znaczenie ma równanie

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \triangle \Psi + V(x, y, z)\Psi = -i\hbar\Psi,$$

gdzie $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ (laplasjan). Jest to równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu na funkcję

$$\mathbb{R}^4 \ni (t, x, y, z) \longmapsto \Psi(t, x, y, z) \in \mathbb{C}$$

nazywaną funkcją falową. ♣

Równania z przykładów (1) i (2) to równania różniczkowe zwyczajne (tzn. na funkcję jednej zmiennej) zaś równania z przykładów (3) i (4) to równania różniczkowe cząstkowe (tzn. na funkcję wielu zmiennych, zawierające pochodne cząstkowe). W języku angielskim równania różniczkowe zwyczajne nazywają się *ordinary differential equations*, natomiast równania różniczkowe cząstkowe *partial differential equations*. Od angielskich nazw pochodzą często używane skróty ODE i PDE, odpowiednio. My zajmować się będziemy jedynie równaniami zwyczajnymi. Materiał dotyczący równań cząstkowych wykładany jest oddzielnie w ramach wykładów monograficznych lub wykładów kursowych przeznaczonych dla studentów indywidualnych.

Równania różniczkowe zwyczajne to równania na jedną (lub więcej) funkcji jednej zmiennej. Pisząc "lub więcej" mam na myśli sytuację, kiedy poszukiwana funkcja ma wartości w przestrzeni wymiaru większego niż 1 (np. $\mathbb{R}^n$, $n > 1$). Zmienną od której zależą wszystkie niewiadome funkcje nazywamy często *zmienną niezależną*, zaś same funkcje *zmiennymi zależnymi*. Rząd najwyższej pochodnej zmiennej zależnej występujący w równaniu nazywamy *rzędem równania*. W tym sensie w przykładzie (1) równanie było rzędu pierwszego, w pozostałych rzędu drugiego. Równanie zwyczajne może być zapisane w postaci kanonicznej, tzn z wyznaczoną najwyższą pochodną:

$$y^{(k)} = F(x, y, y', y^{(2)}, \ldots, y^{(k-1)}),$$

lub w postaci uwikłanej

$$G(x, y, y', y^{(2)}, \ldots, y^{(k)}) = 0.$$

Od funkcji F i G wymaga się zazwyczaj aby były ciągłe. Najwięcej czasu poświęcimy równaniom różniczkowym pierwszego rzędu. Równania wyższego rzędu zawsze można (wprowadzając pomocnicze funkcje) sprowadzić do równań pierwszego rzędu na większą liczbę funkcji. Na przykład równanie drugiego rzędu z przykładu (2) zastąpić można równaniem pierwszego rzędu na dwie funkcje: kąt i prędkość kątową:

$$\omega(t) = \dot{\varphi}(t), \qquad \dot{\omega}(t) = \ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l}\sin\varphi.$$

Jako jedno równanie możemy to zapisać następująco:

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\begin{bmatrix}\varphi\\ \omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega\\ -\dfrac{g}{l}\sin(\varphi)\end{bmatrix}.$$

Interpretacja graficzna. O równaniu różniczkowym pierwszego rzędu na n funkcji można myśleć jako o równaniu na krzywą w R^n. Na przykład dla $n=2$ mielibyśmy równanie na krzywą postaci

$$t\longmapsto\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}.$$

Wektor

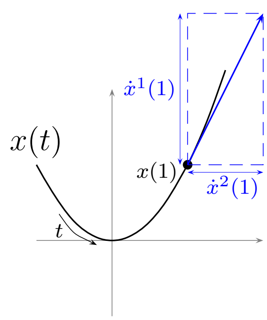
$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{bmatrix}$$

to wektor styczny do krzywej $t\mapsto x(t)$ w punkcie $x(t)$ oznaczający prędkość punktu poruszającego się wzdłuż krzywej. Na przykład dla krzywej

$$\mathbb{R}\ni t\longmapsto\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\ t^2\end{bmatrix}$$

prędkość w punkcie $t=1$ jest wektorem

$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{bmatrix}_{|t=1}=\begin{bmatrix}1\\ 2t\end{bmatrix}_{|t=1}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}.$$



Ogólnie równanie na krzywą w $\mathbb{R}^2$ mogłoby wyglądać następująco:

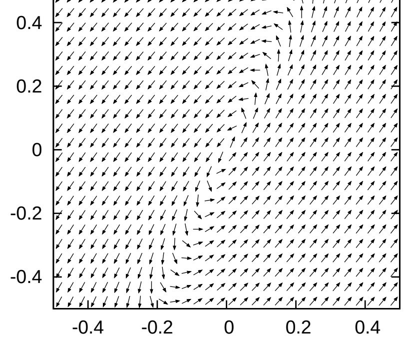
$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F^1(t,x,y)\\ F^2(t,x,y)\end{bmatrix}.$$

Jeśli dodatkowo F^1 i F^2 nie zależą explicite od czasu mamy w każdym punkcie płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ zaczepiony wektor, który ma być styczny do szukanej przez nas krzywej. Innymi słowy zadajemy pole wektorowe na $\mathbb{R}^2$ oraz szukamy krzywych stycznych w każdym punkcie do tego pola. Oto stosowne rysunki dla konkretnego przykładu:

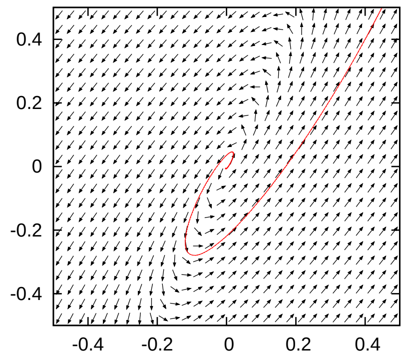
Przykład 5. Rozważamy równanie:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-y\\ 3x-y\end{bmatrix}.$$

Jego graficzny obraz to:

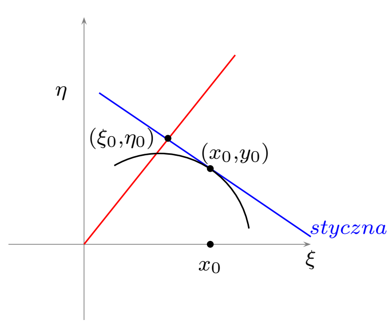


i jedna z krzywych będących rozwiązaniem:



Jeśli funkcje F^i zależą także od t trzeba zwiększyć wymiar przestrzeni włączając t do zmiennych zależnych i dodając trywialne rówananie $\dot{t} = 1$, lub rozważać pola wektorowe zależne od czasu. ♣

Przykład 6. Rozwiążmy następujące zadanie (z treścią): Znaleźć równanie różniczkowe na funkcję, której wykres leży w obszarze $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ i ma następującą własność: odstęp stycznej do wykresu funkcji w punkcie $(x, y(x))$ od punktu $(0, 0)$ jest równy x. Zróbmy rysunek pomocniczy:



Jeśli szukana funkcja to $\xi \mapsto y(\xi)$, to równanie stycznej w punkcie $(x_0, y_0 = y(x_0))$ ma postać

$$\eta = y'(x_0)\xi + b. \tag{6}$$

Parametr b musimy dobrać tak, aby punkt (x_0, y_0) spełniał (6). Okazuje się, że

$$b = y_0 - y'(x_0)x_0.$$

Równanie prostej przechodzącej przez $(0,0)$ i prostopadłej do stycznej to

$$\eta = -\frac{1}{y'(x_0)}\xi. \tag{7}$$

Punkt (ξ_0, η_0) wspólny stycznej i prostopadłej wyznaczymy traktując (6), (7) jako układ równań:

$$\begin{cases} \xi_0 = \dfrac{y'(x_0)\left(y'(x_0)x_0 - y_0\right)}{1 + [y'(x_0)]^2} \\ \eta_0 = -\dfrac{(y'(x_0)x_0 - y_0)}{1 + [y'(x_0)]^2}. \end{cases}$$

Z treści zadania wynika, że odległość (ξ_0, η_0) od $(0,0)$ ma być równa x_0. Zapisujemy warunek (na kwadrat odległości):

$$\left(\frac{y'(x_0)\left(y'(x_0)x_0 - y_0\right)}{1 + [y'(x_0)]^2}\right)^2 + \left(\frac{(y'(x_0)x_0 - y_0)}{1 + [y'(x_0)]^2}\right)^2 = x_0^2$$

Rachujemy:

$$\left(y'(x_0)\left(y'(x_0)x_0 - y_0\right)\right)^2 + \left((y'(x_0)x_0 - y_0)\right)^2 = x_0^2\left(1 + [y'(x_0)]^2\right)^2$$

$$\left((y'(x_0)x_0 - y_0)\right)^2\left(1 + [y'(x_0)]^2\right)^2 = x_0^2\left(1 + [y'(x_0)]^2\right)^2$$

Dzielimy obie strony przez (dodatnie) wyrażenie $(1 + [y'(x_0)]^2)$:

$$\begin{aligned} (y'(x_0)x_0 - y_0)^2 &= x_0^2\left(1 + [y'(x_0)]^2\right) \\ [y'(x_0)]^2x_0^2 - 2y'(x_0)x_0y_0 + y_0^2 &= x_0^2 + [y'(x_0)]^2x_0^2 \\ -2y'(x_0)x_0y_0 + y_0^2 &= x_0^2 \end{aligned}$$

Sprowadzamy równanie do postaci kanonicznej:

$$y'(x_0) = \frac{y_0^2 - x_0^2}{2x_0y_0}.$$

Warunek o którym mowa w treści zadania zachodzić ma w każdym punkcie krzywej. Opuszczamy więc indeksy wskazujące na konkretny punkt. Rachunki doprowadziły nas do równania

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}.$$

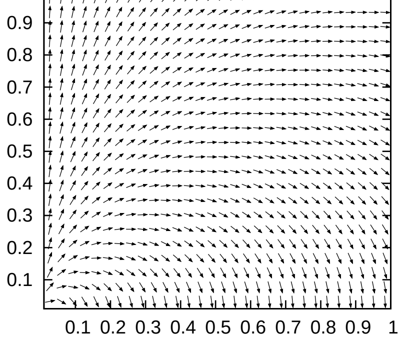
Tego rodzaju równania nauczymy się rozwiązywać pod koniec tego wykładu. Na razie zajmijmy się interpretacją graficzną. Równania różniczkowe na jedną funkcję jednej zmiennej:

$$y' = F(x, y)$$

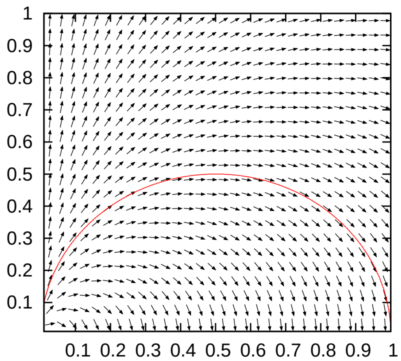
też przedstawiamy jako pola wektorowe na $\mathbb{R}^2$. Wektor zaczepiony w punkcie (x, y) ma współrzędne

$$\begin{bmatrix} 1 \\ F(x,y) \end{bmatrix}.$$

Oto nasze równanie:



i jedna z krzywych będących rozwiązaniem:



♣

Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania. W teorii równań różniczkowych zwyczajnych fundamentalne znaczenie ma twierdzenie Cauchy'ego o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania. Sformułujemy je w wersji dotyczącej równań na jedną funkcję y jednej zmiennej rzeczywistej x. Założymy, że równanie to zostało zapisane w postaci kanonicznej, tzn. z równania wyznaczono pochodną:

$$y' = F(x, y).$$

Zanim zapiszemy twierdzenie sformułujmy tzw. *warunek Lipschitza*, który pojawia się w treści twierdzenia: Niech I oznacza odcinek otwarty w $\mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza na odcinku I ze stałą L jeśli dla dowolnych $x_1, x_2 \in I$ zachodzi nierówność

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|.$$

Zauważmy, że

Fakt 1. *Funkcja, która spełnia warunek Lipschitza na odcinku I jest na tym odcinku ciągła.*

Dowód: Przypomnijmy warunek ciągłości w punkcie x_0:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \quad |x - x_0| < \delta \;\; \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Niech więc f będzie funkcją spełniającą warunek Lipschitza w I ze stałą L, ustalmy $x_0 \in I$ oraz weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Jeśli δ będzie dowolną liczbą spełniającą nierówność $\delta < \dfrac{\varepsilon}{L}$ to dla x takiego, że $|x - x_0| < \delta$ mamy:

$$|f(x_0) - f(x)| \leqslant L|x_0 - x_x| < L\delta < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Okazuje się więc, że warunek ciągłości jest spełniony. □

Fakt powyższy jest *w jedną stronę*, tzn nie każda funkcja ciągła spełnia warunek Lipschitza. Na przykład funkcja

$$I =]0,1[\ni x \longmapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$$

jest ciągła, ale nie spełnia warunku Lipschitza. Istotnie, ustalmy $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ i weźmy $0 < x < \frac{1}{2}$ wówczas x i $x + \varepsilon$ są elementami I oraz

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x+\varepsilon}\right| = \left|\frac{x+\varepsilon-x}{x(x+\varepsilon)}\right| = \frac{\varepsilon}{x(x+\varepsilon)}$$

Funkcja

$$x \mapsto \frac{\varepsilon}{x(x+\varepsilon)}$$

dąży do ∞ dla x dążącego do zera od strony dodatniej. Dla dowolnego $L > 0$ znajdziemy więc takie x, że

$$\frac{\varepsilon}{x(x+\varepsilon)} > L\varepsilon = L|x - (x+\varepsilon)|.$$

Fakt 2. *Jeśli f jest funkcją rożniczkowalną na I to f spełnia warunek Lipschitza wtedy i tylko wtedy gdy pochodna f jest ograniczona na I*

Dowód: Jeśli f spełnia warunek Lipschitza na I ze stałą L, to dla dowolnego $x \in I$ i dowolnego $h \neq 0$ takiego, że $x + h \in I$ mamy

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant L|x+h-x| = L|h|.$$

W takim razie wartość bezwzględna ilorazu różnicowego jest ograniczona:

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leqslant L,$$

a co za tym idzie pochodna też jest ograniczona. Odwrotnie, załóżmy, że pochodna funkcji f jest ograniczona na I przez stałą L:

$$\sup_{x\in I} |f'(x)| = L.$$

Z twierdzenia Lagrange'a wiadomo, że jeśli $x, y \in I$, $x < y$, to istnieje $\xi \in [x, y]$ takie, że

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y-x)$$

Stosując wartość bezwzględną do obu stron otrzymujemy

$$|f(y) - f(x)| = |f'(\xi)||y-x|,$$

a zastępując $|f'(\xi)|$ ograniczeniem górnym mamy

$$|f(y) - f(x)| = L|y-x|.$$

Funkcja f jest więc lipschitzowska ze stałą L. □

Na odcinku $I =]0,1[$ warunek Lipschitza spełnia więc funkcja $x \mapsto x^2$, gdyż jej pochodna $x \mapsto 2x$ ograniczona jest przez 2, natomiast nie spełnia funkcja $x \longmapsto \sqrt{x}$, gdyż jej pochodna

$$x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

jest nieograniczona.

Niech teraz funkcja $F : J \times I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją dwóch zmiennych. J i I oznaczają otwarte odcinki w $\mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja F spełnia warunek Lipschitza ze stałą L *względem drugiej zmiennej* jeśli

$$\forall x \in J \ \ |F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|.$$

Możemy teraz sformułować twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania równania różniczkowego:

Twierdzenie 1. *Niech $F : J \times I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą dwóch zmiennych spełniającą warunek Lipschitza względem drugiej zmiennej. Niech także punkt (x_0, y_0) należy do $J \times I$. Wówczas istnieje liczba $\varepsilon > 0$ i dokładnie jedna funkcja y określona na odcinku $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$:*

$$]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\ni x \longmapsto y(x) \in I$$

spełniająca równanie różniczkowe

$$y' = F(x, y) \tag{8}$$

i warunek początkowy $y(x_0) = y_0$.

Szkic dowodu: Dowód, którego szkic przedstawię poniżej pochodzi od Picarda. Załóżmy na chwilę, że istnieje jakieś rozwiązanie równania (8) spełniające podany warunek początkowy. Mając to rozwiązanie możemy napisać prawdziwą równość:

$$y'(x) = F(x, y(x)),$$

która po uwzględnieniu warunku początkowego prowadzi do równości całkowej:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(\xi, y(\xi))\mathsf{d}\xi. \tag{9}$$

Rozwiązanie równania różniczkowego (8) jest więc także rozwiązaniem równania całkowego (9). Odwrotnie, jeśli znajdziemy jakieś rozwiązanie równania całkowego (9), to z podstawowego twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego wynika, że jest ono rozwiązaniem równania różniczkowego (8). Okazuje się więc, że problem (8) można zastąpić przez problem (9). Rozwiązanie równania całkowego (9) konstruować będziemy metodą kolejnych przybliżeń startując od funkcji stałej: Niech

$$\varphi_0(x) = y_0.$$

Kolejną funkcję φ_1 zdefiniujemy równością

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(\xi, \varphi_0(\xi))\mathsf{d}\xi = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(\xi, y_0)\mathsf{d}\xi.$$

i dalej kolejne funkcje

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))\mathsf{d}\xi.$$

Gdyby teraz okazało się, że na pewnym odcinku zawierającym x_0

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$$

i zbieżność jest jednostajna, wtedy funkcja φ byłaby ciągła i prawdziwa byłaby równość:

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} F(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))\mathsf{d}\xi\right) = \tag{10}$$

$$y_0 + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} F(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))\mathsf{d}\xi = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(\xi, \varphi(\xi))\mathsf{d}\xi$$

patrząc na początek i koniec powyższego rachunku dostajemy

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(\xi, \varphi(\xi))\mathsf{d}\xi,$$

czyli funkcja ta jest rozwiązaniem równania całkowego (9). Widać więc, że w tym dowodzie jest szereg trudności technicznych. Przede wszystkim trzeba sprawdzić, czy wszystkie kolejne przybliżenia określone są na wspólnym odcinku o niezerowej długości. Problemem jest tutaj to, że wartości φ_n nie mogą „wystawać” poza odcinek I. Ponadto sprawdzić trzeba, czy ciąg funkcyjny jest zbieżny i to jednostajne. Wspomnieć też warto, że takie operacje jak wchodzenie z granicą pod znak całki (jak w rachunku (10)) też nie są zawsze dozwolone. Pokonaniu tych wszystkich trudności służą założenia o ciągłości F i lipschitzowskości F względem drugiego argumentu. My nie będziemy zaglębiać się w detale techniczne, ponieważ brak nam odpowiedniego wykształcenia w dziedzinie zbieżności ciągów funkcyjnych. $\square$

Przykład 7. Metodę kolejnych przybliżeń zastosujemy do rozwiązywania prostego równania różniczkowego:

$$y' = y \quad \text{z warunkiem początkowym} \quad y(0) = \alpha$$

Funkcja F ma więc szczególnie prostą postać: $F(x, y) = y$. Jest to oczywiście funkcja ciągła spełniająca warunek Lipschitza względem drugiej zmiennej na całym $\mathbb{R}$ ze stałą $L = 1$. Weźmy $\varphi_0(x) = \alpha$ i wyznaczmy φ_1:

$$\varphi_1(x) = \alpha + \int_0^x F(\xi, \varphi_0(\xi))\mathsf{d}\xi = \alpha + \int_0^x \alpha\mathsf{d}\xi = \alpha + \alpha x.$$

Dalej liczymy

$$\varphi_2(x) = \alpha + \int_0^x F(\xi, \varphi_1(\xi))\mathsf{d}\xi = \alpha + \int_0^x (\alpha + \alpha x)\mathsf{d}\xi = \alpha + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha x^2,$$

$$\varphi_3(x) = \alpha + \int_0^x F(\xi, \varphi_2(\xi))\mathsf{d}\xi = \alpha + \int_0^x (\alpha + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha x^2)\mathsf{d}\xi = \alpha + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{3!}x^3.$$

Łatwo zauważyć, że

$$\varphi_n(x) = \alpha + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n,$$

zatem

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \alpha \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Łatwo rozpoznać, sięgając pamięcią do początku semestru, że

$$\varphi(x) = \alpha \exp(x).$$

Rozwiązania w tej postaci się spodziewaliśmy. ♣

Twierdzenie Cauchy'ego dotyczy istnienia rozwiązania z konkretnym warunkiem początkowym, tzn przyjmującego wartość y_0 w punkcie x_0 (nazwa *warunek początkowy* bierze się stąd, że często zmienna niezależna oznaczana jest t i rozumiana jako czas, a warunek na wartość funkcji nakładamy w $t = 0$.) Problem znalezienia rozwiązania z zadanym warunkiem początkowym nazywa się *zagadnieniem Cauchy'ego*. My często poszukujemy tzw. rozwiązania ogólnego, czyli rodziny funkcji spełniającej dane równanie. Rodzina ta jest zwykle sparametryzowana. Dołożenie warunku początkowego pozwala ustalić konkretną wartość parametru.

Niestety nie ma ogólnej, zawsze działającej metody rozwiązywania wszelkich równań różniczkowych pierwszego rzędu. Tak naprawdę potrafimy rozwiązywać jedynie *równania o zmiennych* *rozdzielonych* oraz *równania liniowe*. Potrafimy także czasami sprowadzać inne równania do jednego z powyższych typów. Działalność tego rodzaju nazywam czasami *botaniką*, bo polega na oglądaniu każdej roślinki różniczkowej oddzielnie, badaniu jej własności i sprawdzaniu czy należy do któregoś z napotkanych wcześniej gatunków.

Równania o rozdzielonych zmiennych: Równanie o rozdzielonych zmiennych ma postać:

$$y' = a(x)b(y) \tag{11}$$

Jeśli dla jakiejś wartości $y = y_0$ funkcja $b(y)$ przyjmuje wartość zero to wtedy funkcja stała $y(t) = y_0$ jest rozwiązaniem powyższego równania. W dalszym ciągu rozwiązania będziemy szukać przy założeniu, że $b(y) \neq 0$. Równanie (11) zapisujemy w postaci

$$\frac{\mathsf{d}y}{\mathsf{d}x} = a(x)b(y).$$

Dalsze rachunki mają charakter formalny. Sprawdzimy jednak, że prowadzą one do dobrego wyniku: Dzielimy obie strony równania przez $b(y)$ i „mnożymy" przez $\mathsf{d}x$:

$$\frac{\mathsf{d}y}{b(y)} = a(x)\mathsf{d}x.$$

Całkujemy obie strony, tzn znajdujemy funkcje pierwotne do $y \mapsto \frac{1}{b(y)}$ i $x \mapsto a(x)$, oznaczamy je $B(y)$ i $A(x)$ odpowiednio. Równość pochodnych oznacza równość funkcji pierwotnych z dokładnością do stałej:

$$B(y) = A(x) + C \tag{12}$$

Równanie (12) zadaje funkcję $x \mapsto y(x)$ w sposób uwikłany, lokalnie w otoczeniu każdego punktu (x_0, y_0) spełniającego warunek (12) i takiego, że

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \quad \text{dla} \quad G(x, y) = B(y) - A(x) - C.$$

Powyższy warunek wynika z twierdzenia o funkcjach uwikłanych. Pochodna cząstkowa G po y ma postać:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\mathsf{d}B}{\mathsf{d}y} = \frac{1}{b(y)}$$

i jest różna od zera z założenia. Obliczmy teraz pochodną funkcji $x \mapsto y(x)$ zadawanej przez równanie (12). Różniczkujemy (12) po x:

$$\begin{aligned} \frac{\mathsf{d}B}{\mathsf{d}y}\frac{\mathsf{d}y}{\mathsf{d}x} &= \frac{\mathsf{d}A}{\mathsf{d}x} \\ \frac{1}{b(y)}\frac{\mathsf{d}y}{\mathsf{d}x} &= a(x) \\ \frac{\mathsf{d}y}{\mathsf{d}x} &= b(y)a(x) \end{aligned}$$

Pochodna funkcji $x \mapsto y(x)$ zadawanej przez (12) spełnia równanie (11). Nasza działalność rachunkowa przyniosła więc pożądany skutek. Stała całkowania pełni rolę parametru numerującego rodzinę rozwiązań.

Równania liniowe: Zajmiemy się najpierw równaniami liniowymi w jednym wymiarze, tzn. na jedną funkcję jednej zmiennej. Równanie liniowe jest to równanie postaci

$$x' = a(t)x + b(t). \tag{13}$$

Tym razem zmienna zależna nazywa się x a zmienna niezależna t. W kontekście równań różniczkowych używane są bardzo różne oznaczenia. My także nie będziemy stosować jednego systemu, ale wiele, żeby przyzwyczaić się do tej różnorodności. Równanie liniowe z funkcją b równą 0 nazywa się *równaniem jednorodnym* (w skrócie RJ). Równanie z niezerowym b to *równanie niejednorodne* (RN). Zauważmy, że rozwiązania równania jednorodnego tworzą przestrzeń wektorową. Istotnie, jeśli x_1 i x_2 są funkcjami spełniającymi równanie jednorodne

$$x' = a(t)x \tag{14}$$

to także $\alpha x_1 + \beta x_2$ spełnia to równanie:

$$(\alpha x_1 + \beta x_2)' = \alpha x_1' + \beta x_2' = \alpha a(t) x_1 + \beta a(t) x_2 = a(t)\left(\alpha x_1 + \beta x_2\right).$$

Jeśli x_1 i x_2 są funkcjami spełniającymi równanie niejednorodne (13) to funkcja $x_1 - x_2$ spełnia równanie jednorodne z tym samym współczynnikiem $a(t)$:

$$(x_1 - x_2)' = x_1' - x_2' = (a(t)x_1 + b(t)) - (a(t)x_2 + b(t)) = a(t)\left(x_1 - x_2\right).$$

Okazuje się więc, że zbiór rozwiązań równania niejednorodnego jest przestrzenią afiniczną modelowaną na przestrzeni wektorowej rozwiązań równania jednorodnego. Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (RORN) ma zatem postać

$$x(t) = x_o(t) + x_s(t),$$

gdzie x_o jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego (RORJ) a x_s jakimś szczególnym rozwiązaniem równania niejednorodnego (RSRN). Zajmiemy się najpierw poszukiwaniem RORJ a następnie odgadywaniem RSRN. Na szczęście RJ jest jednocześnie równaniem o rozdzielonych zmiennych, więc bez trudności znajdziemy RORJ:

$$\begin{aligned} x' &= a(t)x, \\ \frac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}t} &= a(t)x, \\ \frac{\mathsf{d}x}{x} &= a(t)dt, \\ \log|x| &= A(t) + C. \end{aligned}$$

W powyższym rachunku A oznacza dowolną funkcję pierwotną dla a. Stała C parametryzuje rodzinę rozwiązań. Wyznaczmy x :

$$\begin{aligned} \log|x| &= A(t) + C \\ |x| &= \exp(A(t) + C) \\ |x| &= \exp(A(t))\exp(C) \end{aligned}$$

Stała $\exp(C)$ jest zawsze dodatnia. Możemy pozbyć się wartości bezwzględnej po lewej stronie równania zastępując $\exp(C)$ dowolną stałą D. RORJ przyjmuje więc postać

$$x_o(t) = D\exp(A(t)), \quad D \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

RSRN czasami można odgadnąć. Jest to bardzo dobra i szybka metoda rozwiązywania. Jeśli jednak nie uda się tego zrobić pozostaje tzw. *metoda uzmienniania stałej*. W tej metodzie zastępujemy stałą D funkcją $t \longmapsto D(t)$ i szukamy warunków na tę funkcję wynikających z równania. Rozwiązanie więc przewidujemy w postaci

$$x(t) = D(t)\exp(A(t)), \tag{16}$$

różniczkujemy

$$x'(t) = D'(t)\exp(A(t)) + D(t)\exp(A(t))A'(t) = D'(t)\exp(A(t)) + D(t)\exp(A(t))a(t)$$

i x oraz x' wstawiamy do równania niejednorodnego:

$$D'(t)\exp(A(t)) + D(t)\exp(A(t))a(t) = a(t)D(t)\exp(A(t)) + b(t)$$

Po obu stronach równania powtarzają się wyrazy niebieskie

$$D'(t)\exp(A(t)) + D(t)\exp(A(t))a(t) = a(t)D(t)\exp(A(t)) + b(t),$$

które można skrócić. Wynika to z faktu, że $t \mapsto \exp(A(t))$ jest rozwiązaniem równania jednorodnego. Pozostaje równanie nie zawierające funkcji D, a tylko jej pochodną

$$D'(t)\exp(A(t)) = b(t),$$

którą można wyznaczyć:

$$D'(t) = b(t)\exp(-A(t)).$$

Funkcja D jest więc dowolną funkcją pierwotną do $t \mapsto b(t)\exp(-A(t))$. Podstawiając wyznaczoną funkcję D do (16) otrzymujemy RSRN.

Przykład 8. Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$x'\cos(t) - x\sin(t) = 2t, \quad x(0) = 0.$$

♣

Równania jednorodne: Równaniem jednorodnym nazywany równie różniczkowe (8) takie, że

$$F(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

dla pewnej ciągłej funkcji g. Równanie to można sprowadzić do równania o zmiennych rozdzielonych podstawiając

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}.$$

Różniczkujemy równanie

$$xu = y$$

po zmiennej x:

$$u + xu' = y'$$

i podstawiamy y' do równania

$$y' = g(\frac{y}{x}), \quad u + xu' = g(u), \quad u' = \frac{1}{x}\left(g(u) + u\right).$$

Otrzymane równanie jest równaniem o zmiennych rozdzielonych.

Przykład 9. Zadanie geometryczne, które rozwiązywaliśmy w przykładzie (6) doprowadziło nas do równania

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}.$$

Jest to równanie jednorodne. Można je zapisać także w postaci

$$y' = \frac{y}{2x} - \frac{x}{2y}.$$

Używając standardowego podstawienia $xu = y$ otrzymujemy

$$u + xu' = \frac{u}{2} - \frac{1}{2u}.$$

Powyższe równanie jest równaniem o zmiennych rozdzielonych:

$$x\frac{\mathsf{d}u}{\mathsf{d}x} = -\frac{u}{2} - \frac{1}{2u} = -\frac{u^2+1}{2u},$$

$$\frac{2u\mathsf{d}u}{u^2+1} = -\frac{\mathsf{d}x}{x}$$

Całkując obie strony względem wskazanych zmiennych otrzymujemy

$$\log(u^2+1) = -\log(|x|) + C$$

Zapisujemy C w postaci $C = \log D$, $D > 0$ i pouszczamy logarytmy:

$$u^2 + 1 = \frac{D}{|x|}$$

Ponieważ w warunkach zadania podano, że $x > 0$ możemy opuścić znak wartości bezwzględnej. Powracamy także do wyjściowej zmiennej zależnej y:

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{D}{x}$$

Przekształcamy nieco równanie:

$$y^2 + x^2 = Dx$$

$$y^2 + x^2 - Dx = 0$$

$$y^2 + (x - \frac{1}{2}D)^2 = \frac{1}{4}D^2$$

Szukana krzywa to górna część okręgu o środku w $(\frac{1}{2}D, 0)$ i promieniu $\frac{1}{2}D$. Ogólnym rozwiązaniem równania jest rodzina takich krzywych parametryzowana przez D. ♣

Równania Bernoulliego: Równaniem Bernoulliego nazywamy równie różniczkowe

$$y' = a(x)y + b(x)y^n.$$

Równanie to sprowadza się do równania liniowego za pomocą podstawienia

$$u(x) = y(x)^{1-n}.$$

Przykład 10. Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$y' = \frac{4y}{x} + x\sqrt{y}, \qquad y(1) = 1.$$

Powyższe rówanie jest równaniem Bernoulliego dla $n = \frac{1}{2}$. Podstawiamy zatem

$$u = y^{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{y}.$$

Będziemy musieli pamiętać, że y i u powinny przyjmować wartości dodatnie. Rozwiązaniem jest też funkcja stała $y = 0$. Obliczamy u':

$$u' = \frac{1}{2\sqrt{y}}y', \quad 2\sqrt{y}u' = y', \quad 2uu' = y'$$

Równanie względem zmiennej zależnej u przyjmuje postać:

$$2uu' = \frac{4u^2}{x} + xu.$$

Po podzieleniu przez $2u$ otrzymamy równanie liniowe niejednorodne:

$$u' = \frac{2u}{x} + \frac{x}{2}.$$

Szukamy RORJ:

$$\begin{aligned} \frac{\mathsf{d}u}{\mathsf{d}x} &= \frac{2u}{x} \\ \frac{\mathsf{d}u}{u} &= \frac{2\mathsf{d}x}{x} \\ \log(|u|) &= \log(x^2) + C \\ \log(|u|) &= \log(Dx^2) \ \ D > 0 \\ u &= Dx^2 \end{aligned}$$

Metodą uzmienniania stałych szukamy RSRJ:

$$\begin{aligned} u &= D(x)x^2 \\ u' &= D'(x)x^2 + 2D(x)x \end{aligned}$$

Po wstawieniu u' do równania niejednorodnego otrzymujemy

$$D'(x)x^2 + 2D(x)x = \frac{2D(x)x^2}{x} + \frac{x}{2}.$$

Składniki niebieskie się upraszczają, mamy więc warunek na D'

$$D'(x) = \frac{1}{2x}$$

Wybieramy dowolną funkcję pierwotną

$$D(x) = \frac{1}{2}\log(|x|)$$

i zapisujemy RSRN:

$$u(x) = x^2\frac{1}{2}\log(|x|)$$

i RORN:

$$u(x) = Dx^2 + \frac{1}{2}x^2\log(|x|)$$

Funckcja zapisana na czerwono jest rozwiązaniem liniowego równania, które otrzymaliśmy z naszego równania Bernoulliego. Funkcję tę wygodnie nam będzie przekształcić:

$$u(x) = Dx^2 + \frac{1}{2}x^2\log(|x|) = \frac{1}{2}x^2\left(2D + \log|x|\right) = \frac{1}{2}x^2\log|\alpha x|$$

gdzie $2D = \log\alpha$, tzn. $\alpha = \exp(2D) > 0$. Funkcja u przyjmować musi wartości dodatnie, tzn jej dziedziną jest zbiór

$$\{x: \ \ |\alpha x| > 1\} = \{x: \ \ |x| > \frac{1}{\alpha}\}.$$

Możemy teraz wrócić do funkcji y

$$y(x) = u^2(x) = \frac{1}{4}x^4 \log^2|\alpha x|.$$

Pora na warunek początkowy. Szukamy wartości α takiej, aby $y(1) = 1$:

$$1 = \frac{1}{4}\log^2|\alpha|, \quad \log^2\alpha = 4, \quad \log\alpha = \pm 2, \quad \alpha = \exp(\pm 2)$$

Wartość $x = 1$ leży w dziedzinie funkcji y z parametrem $\alpha = \exp(2)$, a nie leży w dziedzinie funkcji z parametrem $\alpha = \exp(-2)$. Oznacza to, że rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego jest funkcja

$$y(x) = \frac{1}{4}x^2(\log^2(\exp(2)|x|)) = \frac{1}{4}x^2(2 + \log|x|)^2$$

określona dla $|x| > \exp(-2)$. ♣

W następnym wykładzie zajmiemy się równaniami różniczkowymi liniowymi w więcej niż jednym wymiarze, tzn równaniami na krzywą $\overrightarrow{x}(t)$ w $\mathbb{R}^n$ postaci

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\overrightarrow{x}(t) = A(t)\overrightarrow{x}(t) + \overrightarrow{b}(t)$$

gdzie $\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\overrightarrow{x}(t)$ jest wektorem stycznym do krzywej $t \mapsto \overrightarrow{x}(t)$ w punkcie t, $A(t)$ jest macierzą, której wyrazy macierzowe są funkcjami zmiennej t.