Wykład 6.

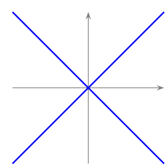
Matematyka 2, semestr letni 2010/2011

Brak fragmentu dotyczącego twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym

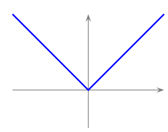
Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną na pewnym obszarze $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$. Przyjrzyjmy się zbiorowi

$$f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad f(x) = 0\},$$

czyli zerowej poziomicy tej funkcji. Jeśli pochodna $f'(x)$ jest różna od zera w każdym punkcie poziomicy (to znaczy w każdym punkcie tej poziomicy nie znika przynajmniej jedna pochodna cząstkowa funkcji f), odpowiednie twierdzenia zapewniają, że poziomica ta jest powierzchnią $n-1$ wymiarową w $\mathbb{R}^n$. Powierzchnię zdefiniujemy precyzyjniej w następnym wykładzie. Teraz wystarczą nam przykłady: W $\mathbb{R}^2$ powierzchniami jednowymiarowymi są: okrąg (tzn. czyli poziomica zerowa funkcji $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$), wszelkie krzywe stożkowe: elipsy, hiperbole, parabole. Krzywe stożkowe są poziomicami funkcji kwadratowych na $\mathbb{R}^2$. Oczywiście nie wszystkie poziomice funkcji kwadratowych są powierzchniami. Na przykład poziomica zerowa funkcji $g(x,y) = x^2 - y^2$ to dwie przecinające się proste:



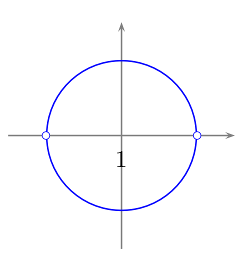
W okolicach punktu $(0,0)$ zbiór ten nie jest powierzchnią. Wykres funkcji $x \mapsto |x|$ nie jest powierzchnią w otoczeniu $(0,0)$ ze względu na „dzióbek".



W $\mathbb{R}^3$ powierzchniami wymiaru 2 są wykresy różniczkowalnych funkcji z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$, kształty takie jak sfera, elipsoida, torus...

Zastanawiać się teraz będziemy nad odpowiedzią na następujące pytanie: kiedy poziomica zerowa funkcji f definiuje jedną ze zmiennych jako funkcje pozostałych. Przyjrzyjmy się funkcji f, której poziomica zerowa jest okręgiem:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1.$$



Patrząc na wykres stwierdzamy, że poziomica zerowa definiuje dwie funkcje $x \to y_i(x)$, $i = 1, 2$. Wykresem pierwszej z nich jest górny półokrąg, wykresem drugiej dolny. Punktami kłopotliwymi są punkty $(-1, 0)$, $(0, 1)$. Mówimy w takim przypadku, że funkcje $x \to y_i(x)$ *zadane są przez równanie*

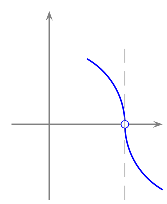
$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

w sposób uwikłany. W tym przypadku postać funkcji f jest na tyle prosta, że równanie (1) można rozwikłać:

$$y_1(x) = \sqrt{x^2 - 1}, \qquad y_2(x) = -\sqrt{x^2 - 1}.$$

Bywają jednak sytuacje w których rozwiązanie rówanania ze względu na jedną ze zmiennych jest trudne, albo wręcz niemożliwe. Chcielibyśmy jednak móc uzyskać jakieś informacje na temat funkcji zadawanych przez równanie. Interesować będą nas na przykład ekstrema.

Punkty $(-1, 0)$ i $(0, 1)$ nazwałam kłopotliwymi, ponieważ w ich otoczeniu nie można zdefiniować zmiennej y jako funkcji zmiennej x. Kłopot polega na tym, że każdej wartości x odpowiadałyby dwie wartości y. Innego rodzaju kłopot pojawia się w sytuacji kiedy wykres wygląda następująco:



W tej sytuacji nie ma problemu z dwuwartościowością i funkcja $x \to y(x)$ jest określona, ale styczna do wykresu w punkcie $(1, 0)$ jest pionowa, co oznacza, że funkcja ta jest nieróżniczkowalna. Wszystkie te zastrzeżenia podsumowuje następujące twierdzenie

Twierdzenie 1 (O funkcji uwikłanej, TFU)**.** *Niech* $f : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *będzie funkcją klasy* $\mathcal{C}^1$ *(różniczkowalną w sposób ciągły) na pewnym obszarze* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$*. Niech także punkt* (x_0, y_0) *należy do* $\mathcal{O}$*. Jeśli*

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

to istnieje otwarty zbiór $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ *zawierający* x_0 *i funkcja* $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ *różniczkowalna i taka, że zbiór*

$$\{(x, y) \in \mathcal{O}, x \in \mathcal{U} : \quad F(x, y) = 0\}$$

jest wykresem funkcji g*.*

Załóżmy teraz, że funkcja f zadaje w sposób uwikłany y jako funkcję różniczkowalną zmiennych $(x^1, \ldots, x^n)$. Jak znaleźć punkty krytyczne $y(x)$? Warunek konieczny mówi, że w punkcie krytycznym pochodna $y'(x)$ jest macierzą zerową. Musimy więc wyznaczyć pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial y}{\partial x^i}.$$

Użyjemy notacji

$$y_{x^i} = \frac{\partial y}{\partial x^i}, \quad F_{x^i} = \frac{\partial F}{\partial x^i}.$$

Różniczkujemy równanie

$$F(x^1, x^2, \ldots, x^n, y(x^1, x^2, \ldots, x^n)) = 0$$

po zmiennej x^i:

$$F_{x^i}(x^1,x^2,\ldots,x^n,y(x^1,x^2,\ldots,x^n))+ \\ F_y(x^1,x^2,\ldots,x^n,y(x^1,x^2,\ldots,x^n))y_{x^i}(x^1,x^2,\ldots,x^n)=0.$$

Dla przejrzystości zapisu opuścimy argumenty:

(2) $$F_{x^i}+F_y y_{x^i}=0.$$

Wynika z tego, że

$$y_{x^i}=-\frac{F_{x^i}}{F_y}.$$

Pamiętać należy, że obie pochodne cząstkowe F_{x^i} i F_y są funkcjami zmiennych x i y. Aby otrzymać prawdziwą wartość pochodnej $y_x(x)$ trzeba wstawić wartość y odpowiadającą x, czyli taką, że $F(x,y)=0$. Warunkiem istnienia funkcji uwikłanej $x\mapsto y(x)$ jest aby F_y nie znikała - można więc dzielić przez tę wartość. Punkt x_0 jest punktem krytycznym jeśli $y_{x^i}(x_0)=0$. Oznacza to, że spełniony jest układ równań:

$$F_{x^i}(x_0,y_0)=0 \text{ dla } i\in\{1,2,\ldots,n\}, \quad F(x_0,y_0)=0.$$

Może się okazać, że znalezione przez nas punkty krytyczne należą do różnych funkcji. Przekonaliśmy się, że jedno równanie może określać wiele funkcji uwikłanych. Określenie rodzaju punktu krytycznego wymaga znalezienia drugiej pochodnej. Zróżniczkujmy jeszcze raz równanie (2), tym razem po x^j za każdym razem pamiętając, że pochodne cząstkowe funkcji F zależą od x^j także poprzez funkcję $y(x)$:

$$F_{x^ix^j}+F_{x^iy}y_{x^j}+\left(F_{yx^j}+F_{yy}y_{x^j}\right)y_{x^i}+F_y y_{x^ix^j}=0$$

W punkcie krytycznym wszystkie pierwsze pochodne cząstkowe funkcji F i funkcji y znikają, zatem równanie przyjmuje postać:

$$F_{x^ix^j}(x_0,y_0)+F_y(x_0,y_0)y_{x^ix^j}(x_0,y_0)=0$$

Możemy więc wyznaczyć drugą pochodną cząstkową $y_{x^ix^j}(x_0,y_0)$:

(3) $$y_{x^ix^j}(x_0)=-\frac{F_{x^ix^j}(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}.$$

Pamiętajmy, że wzór (3) obowiązuje *tylko* w punkcie krytycznym. Układając pochodne cząstkowe w macierz otrzymujemy drugą pochodną y w punkcie krytycznym:

$$y''(x_0)=\begin{bmatrix} F_{x^1x^1}(x_0,y_0) & F_{x^1x^2}(x_0,y_0) & \cdots & F_{x^1x^n}(x_0,y_0) \\ F_{x^2x^1}(x_0,y_0) & F_{x^2x^2}(x_0,y_0) & \cdots & F_{x^2x^n}(x_0,y_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & vdots \\ F_{x^nx^1}(x_0,y_0) & F_{x^nx^2}(x_0,y_0) & \cdots & F_{x^mx^n}(x_0,y_0) \end{bmatrix}.$$

Określoność tej formy badamy jak zwykle.

Przykład 1. Niech

$$F(x,y)=x^2+\left(y-\sqrt[4]{x^2}\right)^2-1$$

Dziwne wyrażenie $\sqrt[4]{x^2}$ zastąpić można także $\sqrt{|x|}$. Zastanówmy się jak wygląda poziomica zerowa tej funkcji. Spróbujemy dowiedzieć się o niej możliwie dużo stosując metody analityczne (bez patrzenia na wykres). Przyjemność narysowania wykresu przy pomocy komputera zostawimy sobie na koniec. Używać będziemy wszelkich dostępnych metod, ze szczególnym uwzględnieniem badania funkcji zadanych w sposób uwikłany.

Poziomica zerowa funkcji F zadana jest równaniem

$$x^2 + \left(y - \sqrt[4]{x^2}\right)^2 = 1. \tag{4}$$

Wynika z tego, że żaden ze składników po lewej stronie równania nie przekracza jedynki:

$$x^2 \leqslant 1 \quad \text{czyli} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

oraz

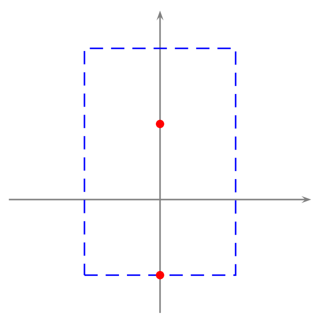
$$(y - \sqrt{|x|})^2 \leqslant 1 \quad \text{czyli} \quad -1 \leqslant y - \sqrt{|x|} \leqslant 1, \;\; -1 + \sqrt{|x|} \leqslant y \leqslant 1 + \sqrt{|x|}.$$

Ostatecznie więc cały obrazek musi mieścić się w prostokącie $[-1, 1] \times [-1, 2]$. Równanie jest symetryczne ze względu na zamianę x na $-x$, zatem poziomica będzie symetryczna względem prostej $x = 0$.

Ponieważ funkcja $x \longmapsto \sqrt{|x|}$ jest nieróżniczkowalna w $x = 0$, także poziomica będzie krzywą nieróżniczkowalną w punktach o współrzędnej $x = 0$. Czy są takie punkty na krzywej? Sprawdźmy

$$\text{dla } x = 0 \text{ mamy} \quad F(0, y) = y^2 - 1 = 0, \quad \text{czyli } y = 1, \; y = -1$$

Do krzywej należą więc punkty $(0, 1)$ i $(0, -1)$ i w tych punktach krzywa jest nieróżniczkowalna. Dotychczasowe informacje zaznaczmy na rysunku



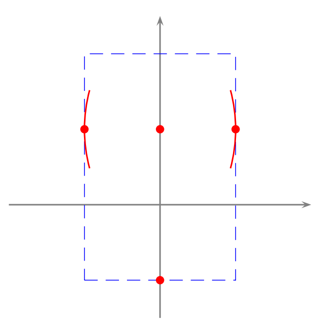
Sprawdźmy teraz czy równanie (4) określa y jako funkcję uwikłaną zmiennej x. Policzmy F_y:

$$F_y(x, y) = 2(y - \sqrt{|x|})$$

Pochodna F_y przyjmuje wartość zero w punktach w których $y = \sqrt{|x|}$. Szukamy takich punktów na krzywej:

$$F(x, \sqrt{|x|}) = x^2 + (\sqrt{|x|} - \sqrt{|x|})^2 - 1 = x^2 - 1 = 0 \quad \text{czyli} \quad x = 1, \;\; x = -1.$$

Wynika z tego, że w otoczeniu punktów $(1, 1)$ i $(-1, 1)$ (o których wiemy, że należą do krzywej) równanie nie definiuje y jako funkcji od x. Oznacza to zazwyczaj następujący kształt wykresu:



Sprawdźmy, czy ewentualne funkcje $x \mapsto y(x)$ zadawane przez równanie mają punkty krytyczne. Znajdźmy pochodną F_x (dla ułatwienia policzmy dla dodatniego x):

$$F_x = 2x + 2\left(y - \sqrt{x}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 2x - \frac{y - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

Pochodna przyjmuje wartość 0 dla

$$y = \sqrt{x}(2x+1)$$

Po wstawieniu do równania (4) otrzymujemy warunek na x postaci

$$4x^3 + x^2 - 1 = 0.$$

Niestety rozwiązania tego równania nie są wymierne. Można jednak oszacować mniej więcej wartość interesującego nas miejsca zerowego. Zauważmy, że wielomian

$$w(x) = 4x^3 + x^2 - 1$$

ma ekstrema w punktach spełniających równanie $w'(x) = 0$, tzn

$$0 = 12x^2 + 2x = 2x(6x+1) \quad \Longrightarrow \quad x = 0, \;\; x = -\frac{1}{6}$$

W punkcie $x = -\frac{1}{6}$ wartość w jest ujemna, podobnie w $x = 0$. Wiadomo także, że $\lim_{x\to\infty} w = +\infty$ i dla $x > 0$ funkcja w jest ściśle rosnąca. Oznacza to, że między zerem a nieskończonością jest dokładnie jedno miejsce zerowe. Oznaczmy to miejsce zerowe x_0. Sprawdzamy także, że $w(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4} < 0$ natomiast $w(\frac{3}{4}) = \frac{3}{4} > 0$. Wiemy więc, że $\frac{1}{2} < x_0 < \frac{3}{4}$. Punkt krytyczny jest więc w punkcie $(x_0, y_0 = \sqrt{x_0}(2x_0+1))$. Z symetrii funkcji F wynika, że podobny punkt krytyczny jest dla $-x_0$, czyli w punkcie $(-x_0, y_0)$. Sprawdźmy typ punktu krytycznego:

$$F_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x - \frac{y - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x - \frac{y}{\sqrt{x}} + 1\right) = 2 + \frac{y}{x\sqrt{x}}.$$

W punkcie $(x_0, \sqrt{x_0}(2x_0+1))$

$$F_{xx}(x_0, \sqrt{x_0}(2x_0+1)) = 2 + \frac{2}{\sqrt{x_0}} + \frac{1}{x_0} > 0.$$

Wartość F_y w punkcie krytycznym to

$$F_y(x_0, \sqrt{x_0}(2x_0+1)) = 2(\sqrt{x_0}(2x_0+1) - \sqrt{x_0}) = 2x_0\sqrt{x_0} > 0$$

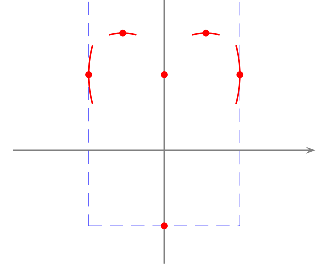
Wnioskujemy więc, że

$$y_{xx}(x_0) = -\frac{F_{xx}(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} < 0,$$

zatem mamy do czynienia z maksimum. Podobnie jest dla $(-x_0, y_0)$. Wartość y_0 jest z całą pewnością dodatnia. Jeśli skorzystamy z informacji, że $x_0 > \frac{1}{2}$ to otrzymamy, że

$$y_0 > \sqrt{\frac{1}{2}}\left(2 \cdot \frac{1}{2} + 1\right) = \sqrt{2}$$

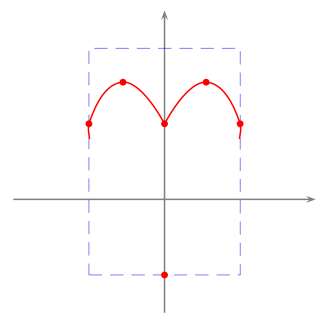
Zaznaczmy prawdopodobny przebieg krzywej na wykresie:



Policzmy teraz pochodną funkcji $x \mapsto y(x)$ zadawanej przez równanie (4), tam gdzie można to zrobić. Ograniczamy się do $x > 0$ (dla $x < 0$ wynik dostaniemy korzystając z symetrii).

$$y_x = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x\sqrt{x} - y + \sqrt{x}}{2\sqrt{x}(y - \sqrt{x})} = \frac{y - \sqrt{x}(2x+1)}{2\sqrt{x}(y - \sqrt{x})}.$$

W „górnej” części wykresu, tzn. dla $x > 0$, ($y > \sqrt{x} > 0$), mianownik przyjmuje wartości dodatnie, i o znaku pochodnej decyduje licznik. Licznik zmienia znak w punkcie (x_0, y_0) i dla $x < x_0$ jest dodatni a dla $x > x_0$ ujemny. Funkcja $x \mapsto y(x)$ rośnie więc od wartości $y = 1$ w $x = 0$ do maksimum y_0 w x_0 a następnie maleje do wartości 1 w $x = 1$. Pochodna y_x dąży do $+\infty$ dla x zbliżających się do 0 od prawej strony. Dla $x < 0$ wykres jest symetryczny. Oznacza to, że w $x = 0$ funkcja ma minimum o kształcie „dzióbka”:



Dolną część wykresu zrekonstruujemy przyglądając się funkcjom $y \mapsto x(y)$ zadanym przez nasze równanie. Badając F_x szukamy kłopotliwych punktów:

$$F_x = 2x - \frac{y - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

Wiemy już, że $F_x = 0$ dla (x_0, y_0) i dla $(-x_0, y_0)$. Widać także, że niedobre są punkty dla których $x = 0$, w tych punktach nie możemy różniczkować. Szukamy teraz ekstremów funkcji $y \mapsto x(y)$ (nie wiedząc oczywiście na razie ile tych funkcji jest). Pochodna F_y ma postać

$$F_y(x, y) = 2(y - \sqrt{|x|}).$$

Punkty krytyczne zatem to $(1, 1)$ i $(-1, 1)$, czyli te, które wcześniej znaleźliśmy jako niedobre do wyznaczania funkcji $x \mapsto y(x)$. Zbadamy rodzaj ekstremum w punkcie $(1, 1)$:

$$F_{yy}(x, y) = 2, \quad F_x = 2x - \frac{y - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}_{|(1,1)} = 2,$$

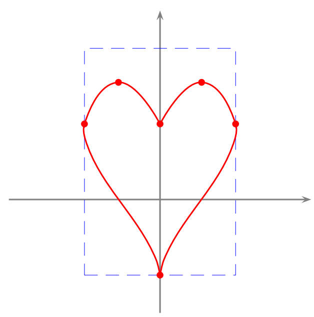
zatem

$$x_{yy}(1, 1) = -\frac{2}{2} = -1 < 0.$$

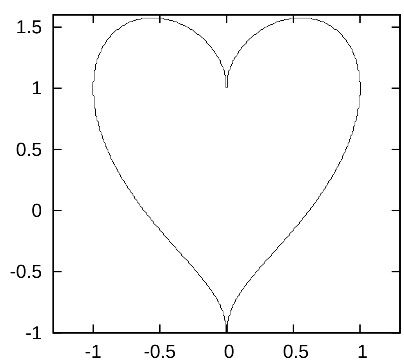
Punkt $(1,1)$ jest więc maksimum funkcji. Z symetrii wykresu wnioskujemy, że w $(-1,1)$ otrzymamy minimum odpowiedniej funkcji. Nasze przewidywania dotyczące kształtu wykresu okazały się więc słuszne. Zbadajmy jeszcze pochodną x_y dla $y < 1$. Pochodna ta opisana jest wzorem:

$$x_y = -\frac{F_y}{F_x} = -\frac{2\sqrt{x}(y-\sqrt{x})}{\sqrt{x}(2x+1)-y}.$$

Znak powyższego wyrażenia łatwo określić gdy $y < 0$ i $x > 0$. Mianownik jest wtedy dodatni, liczni ujemny. Minus przed ułamkiem powoduje, że cala pochodna jest ujemna. Funkcja $y \longmapsto x(y)$ jest więc rosnąca przynajmniej dla $y < 0$. Dla x dążącego do 0 i y dążącego do -1 pochodna dąży do zera. Krzywa zmierza więc do punktu $(0,-1)$ „w sposób styczny” do osi pionowej. Spróbujmy uzupełnić wykres:



A ciekawe jak to wygląda naprawdę?



♣

Przykład 2. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji

$$(x,y) \longmapsto z(x,y)$$

określonych równaniem

$$(x+z)(y+z)(1-\frac{z}{xy}) = 8.$$

Przykład ten był rozwiązany na wykładzie, być może wkrótce notatki zostaną uzupełnione