Wykład 3.

Matematyka 2, semestr letni 2010/2011

Niech V będzie n-wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych lub zespolonych $\mathbb{K}$. *Formą k-liniową* na przestrzeni wektorowej V nazywamy odwzorowanie:

$$\omega : V \times V \times \cdots \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

które jest liniowe ze względu na każdy argument, tzn. dla każdego i, dowolnych wektorów v_j, $j = 1 \dots k$, v_i' i dowolnych $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\omega(v_1, v_2, \cdots, \lambda v_i + \mu v_i', \cdots, v_k) = \lambda\omega(v_1, v_2, \cdots, v_i, \cdots, v_k) + \mu\omega(v_1, v_2, \cdots, v_i', \cdots, v_k)$$

Na poprzednim wykładzie omawialiśmy formy dwuliniowe ($k = 2$), a szczególnie formy dwuliniowe symetryczne.

Wśród wszystkich form k-linowych wyróżnimy teraz szczególnie funkcje *antysymetryczne*, to znaczy mające własność

$$\omega(v_1, v_2, \cdots, v_i, \dots, v_j, \cdots, v_k) = -\omega(v_1, v_2, \cdots, v_j, \dots, v_i, \cdots, v_k) \tag{1}$$

dla dowolnych $i \neq j$. Formy k-liniowe antysymetryczne nazywane są też k-formami antysymetrycznymi, lub czasem k-kowektorami.

Omawiając odwzorowania liniowe i formy dwuliniowe stwierdziliśmy, że wartość formy jest jednoznacznie określona przez wartości na wektorach bazowych. Stąd na przestrzeni n-wymiarowej do zdefiniowania formy potrzeba n^2 liczb. Jeśli wiadomo, że forma jest symetryczna, wtedy wystarczy $n(n+1)/2$ wartości. Jeśli forma jest antysymetryczna potrzeba jeszcze mniej $n(n-1)/2$, gdyż wyrazy diagonalne Q_{ii} muszą być zero: z warunku antysymetrii wynika, że dla dowolnego $v \in V$

$$Q(v, v) = -Q(v, v)$$

Po opuszczeniu kolorów (w końcu v i v to ostatecznie ten sam wektor v) dostajemy

$$Q(v, v) = -Q(v, v), \tag{2}$$

czyli $Q(v, v) = 0$. Innymi słowy przestrzeń wektorowa wszystkich form dwuliniowych ma wymiar n^2 a podprzestrzenie form symetrycznych i antysymetrycznych wymiary odpowiednio $n(n+1)/2$ i $n(n-1)/2$. Jeśli zauważymy ponadto, że forma, która jest jednocześnie symetryczna i antysymetryczna musi być zerowa, oraz że

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 + n + n^2 - n}{2} = n^2$$

zrozumiemy, że przestrzeń wszystkich form dwuliniowych jest sumą prostą podprzestrzeni form symetrycznych i podprzestrzeni form antysymetrycznych. Każda forma dwuliniowa da się więc rozłożyć w sposób jednoznaczny na część symetryczną i antysymetryczną:

$$Q(v, w) = Q_-(v, w) + Q_+(v, w)$$

$$Q_-(v, w) = \frac{1}{2}[Q(v, w) - Q(w, v)], \quad Q_+(v, w) = \frac{1}{2}[Q(v, w) + Q(w, v)].$$

Dla $k > 2$ także jest prawdą, że forma k-liniowa jest jednoznacznie określona przez wartości na bazie, zatem przestrzeń takich odwzorowań jest przestrzenią wektorową wymiaru n^k. W tej przestrzeni są także wyróżnione podprzestrzenie form symetrycznych i antysymetrycznych, których częścią wspólną jest przestrzeń zerowa, ale podprzestrzenie te nie wyczerpują przestrzeni wszystkich form. Zastanówmy się nad wymiarem przestrzeni $Alt^k(V)$ form antysymetrycznych. Niech ω oznacza formę antysymetryczną. W zbiorze n^k liczb

$$\omega_{i_1 i_2 \cdots i_k} = \omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$$

jest wiele zer. Wystarczy, że w układzie $(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$ kórykolwiek wektor bazowy powtarza się, a już wartość ω na tym układzie musi być równa zero jak w (2). Jeśli zaś układ $(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$ nie zawiera powtarzających się wektorów, to wartość ω na tym układzie różni się od wartości ω na układzie zawierającym te same wektory tylko uporządkowane rosnąco ze względu na indeks, tylko znakiem. **Wniosek:** do zdefiniowania k-formy wystarczy tyle liczb ile jest różnych podzbiorów k-elementowych w zbiorze n-elementowym. Z kombinatoryki wiadmo, że jest ich

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{tzn.} \quad \dim Alt^k(v) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Powyższe rozważania prowadzą także do wniosku, że przestrzeń k-form dla $k > n$ jest zerowa, natomiast przestrzeń n-form ma wymiar równy 1.

Przejdziemy teraz do n-form na n-wymiarowej przestrzeni $\mathbb{K}^n$. Z poprzednich rozważań wynika, że jest to przestrzeń jednowymiarowa. Ponieważ w przestrzeni $\mathbb{K}^n$ jest wyróżniona baza standardowa możemy także wyróżnić jedną n-formę: mianowicie tę, która na bazie standardowej

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

daje wynik 1. Formę tę oznaczać będziemy vol, i nazywać formą objętości na $\mathbb{K}^n$:

$$\mathrm{vol}\,(e_1, e_2, \ldots e_n) = 1.$$

Od formy vol już jeden krok do wyznaczników macierzy $n \times n$ o współczynnikach z ciała $\mathbb{K}$. Niech $A \in {\mathbb{K}^n}_n$, wtedy A reprezentuje odwzorowanie $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$. Wyznacznik (det) macierzy A definiujemy wzorem

$$\det A = \mathrm{vol}\,(Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_n). \tag{3}$$

Pamiętając ponadto, że $Ae_i = a_i$ (i-ta kolumna macierzy A) możemy napisać

$$\det A = \mathrm{vol}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Wzór (3) definiujący wyznacznik macierzy nie daje przepisu na to, jak obliczyć wyznacznik dla konkretnej macierzy. Zanim jednak wypiszemy stosowną formułę, zajmiemy się własnościami wyznacznika.

Zauważmy najpierw, że odwzorowanie:

$$\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n \ni (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto \mathrm{vol}\,(Ba_1, Ba_2, \ldots, Ba_n)$$

jest elementem $Alt^k(\mathbb{K}^n)$, zatem jest proporcjonalne do vol, tzn

$$\mathrm{vol}\,(Ba_1, Ba_2, \ldots, Ba_n) = f(B)\mathrm{vol}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Współczynnik proporcjonalności oznaczyłam $f(B)$, ponieważ zależy on tylko od macierzy B, a nie od tego jakie są wektory a_i. Biorąc $a_i = e_i$ dostajemy

$$\det(Be_1, Be_2, \ldots, Be_n) = f(B)\mathrm{vol}\,(e_1, e_2, \ldots, e_n) = f(B),$$

czyli $f(B) = \det B$. Możemy teraz łatwo policzyć $\det(BA)$:

$$\det(BA) = \mathrm{vol}\,(BAe_1, BAe_2, \ldots, BAe_n) = \mathrm{vol}\,(Ba_1, Ba_2, \ldots, Ba_n) = \det(B)\mathrm{vol}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \det(B)\det(A).$$

Udowodniliśmy tym samym twierdzenie Cauchy'ego o mnożeniu wyznaczników:

Twierdzenie 1 (Cauchy)**.**

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Twierdzenie Cauchy'ego prowadzi do pożytecznych wniosków
(1) Jeśli macierz A jest odwracalna, to $\det A \neq 0$ i

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Istotnie, z twierdzenia Cauchy,ego mamy

$$1 = \det(\mathbf{1}) = \det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1}.$$

(2) Jeśli $\det A \neq 0$, to A ma liniowo niezależne kolumny: (*ad absurdum*) Załóżmy, że a_i jest liniową kombinacją pozostałych kolumn, tzn

$$a_i = \lambda^1 a_1 + \cdots \lambda^{i-1} a_{i-1} + \lambda^{i+1} a_{i+1} + \cdots + \lambda^n a_n.$$

Wtedy

$$\det A = \mathrm{vol}\,(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) = \mathrm{vol}\,(a_1, \ldots, \lambda^1 a_1 + \cdots \lambda^{i-1} a_{i-1} + \lambda^{i+1} a_{i+1} + \cdots + \lambda^n a_n, \ldots, a_n) =$$
$$\lambda^1 \mathrm{vol}\,(a_1, \ldots, a_1, \ldots, a_n) + \lambda^2 \mathrm{vol}\,(a_1, \ldots, a_2, \ldots, a_n) + \ldots + \lambda^{i-1}\mathrm{vol}\,(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i-1}, \ldots, a_n) +$$
$$\lambda^{i+1}\mathrm{vol}\,(a_1, \ldots, a_{i+1}, a_{i+1}, \ldots, a_n) + \ldots \lambda^n \mathrm{vol}\,(a_1, \ldots, a_n, \ldots, a_n) = 0$$

Gdy dwa z argumentów formy antysymetrycznej powtarzają się, wartość tej formy jest zero. Każdy ze składników powyższej sumy musi więc być równy zero. □

Macierz $n \times n$ mająca liniowo niezależne kolumy jest odwzorowaniem surjektywnyn („na"), tzn $\dim \mathrm{im}\, A = n$. Ze wzoru

$$\dim \ker A + \dim \mathrm{im}\, A = n$$

wynika więc, że jądro A jest trywialne. Odwzorowanie zadawane przez macierz A jest bijekcją, jest więc odwracalne. Punkty (1) i (2) można zapisać wspólnie formułując

Fakt 1. *Macierz A jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy* $\det A \neq 0$.

Wiemy już sporo o wyznaczniku, ale nadal nie wiemy jak go liczyć - nie znamy konkretnego wzoru, który wyrażałby wyznacznik w zależności od wyrazów macierzy. Wróćmy więc do definicji. Niech A będzie macierzą o wyrazach $a^i{}_j$, tzn $a^i{}_j$ jest i-tą współrzędną j-tej kolumny macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & \cdots & a^1{}_n \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & \cdots & a^2{}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n{}_1 & a^n{}_2 & \cdots & a^n{}_n \end{bmatrix}, \qquad a_i = a^1{}_i e_1 + a^2{}_i e_2 + \cdots + a^n{}_i e_n.$$

(4) $\quad \det A = \mathrm{vol}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) =$

$$\mathrm{vol}\,({a^1}_1 e_1 + {a^2}_1 e_2 + \cdots + {a^n}_1 e_n, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{i_1=1}^{n} {a^i}_1 \mathrm{vol}\,(e_{i_1}, a_2, \ldots, e_n) =$$

$$\sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} {a^{i_1}}_1 {a^{i_2}}_2 \mathrm{vol}\,(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, a_n) =$$

$$\sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} {a^{i_1}}_1 {a^{i_2}}_2 \cdots {a^{i_n}}_n \mathrm{vol}\,(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n})$$

Większość z liczb $\mathrm{vol}\,(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n})$ jest równa zero. Różne od zera są tylko te, w których wszystkie argumenty formy objętości są różne. Oznacza to, że każdy z elementów bazy pojawia się tylko raz w ciągu $(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n})$. W takim przypadku forma objętości przyjmuje wartość 1 lub -1 w zależności od kolejności wektorów bazowych. Ciąg indeksów $(i_1, i_2, \ldots i_n)$ przy wektorach bazowych zawiera każdą liczbę ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ dokładnie raz. Jest więc permutacją (przestawieniem) ciągu $(1, 2, \ldots, n)$. Oznacza to, że suma (4) ma tak naprawdę $n!$ składników, po jednym dla każdej permutacji. Znak $+$ bądź $-$ zależy od tego, czy daną permutację można otrzymać z uporządkowania naturalnego dokonując parzystej czy nieparzystej liczby przestawień dwóch wyrazów. Jeśli permutację oznaczymy symbolem σ, to $\sigma(i)$ jest liczbą ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ stojącą na i-tym miejscu w permutacji σ:

$$(1, 2, \ldots, n) \longmapsto (\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)).$$

Znak odpowiadający danej permutacji oznaczymy symbolem $\mathrm{sgn}\,\sigma$. Wzór na wyznacznik przyjmuje postać

(5) $$\det A = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}\,\sigma {a^{\sigma(1)}}_1 {a^{\sigma(2)}}_2 \cdots {a^{\sigma(n)}}_n.$$

Żeby uwierzyć w powyższy wzór musimy najpierw przekonać się, że liczba $\mathrm{sgn}\,\sigma$ jest dobrze określona. To znaczy, że nie zależy od sposobu przechodzenia od uporządkowania naturalnego do permutacji σ przy pomocy przestawień dwóch wyrazów. Zanim zajmiemy się tym problemem obejrzyjmy najprostsze przykłady wyznaczników:

Przykład 1. Wyznacznik macierzy 2×2, tzn. $A \in {\mathbb{K}^2}_2$:

$$A = \begin{bmatrix} {a^1}_1 & {a^1}_2 \\ {a^2}_1 & {a^2}_2 \end{bmatrix}.$$

Są dwa uporządkowania liczb $\{1, 2\}$,

$$\sigma_0 = (1, 2) \qquad \sigma_1 = (2, 1).$$

Żeby otrzymać σ_0 nie trzeba nic przestawiać, czyli $\mathrm{sgn}\,\sigma_0 = 1$, natomiast żeby otrzymać $\sigma_1 = (2, 1)$ trzeba przestawić raz, tzn $\mathrm{sgn}\,\sigma_0 = -1$. Ostatecznie

$$\det A = \det \begin{bmatrix} {a^1}_1 & {a^1}_2 \\ {a^2}_1 & {a^2}_2 \end{bmatrix} = \mathrm{sgn}\,\sigma_0 {a^{\sigma_0(1)}}_1 {a^{\sigma_0(2)}}_2 + \mathrm{sgn}\,\sigma_1 {a^{\sigma_1(1)}}_1 {a^{\sigma_1(2)}}_2 = {a^1}_1 {a^2}_2 - {a^2}_1 {a^1}_2.$$

♣

Przykład 2. Niech teraz $A \in {\mathbb{K}^3}_3$. Zajmijmy się najpierw permutacjami. Istnieje $3! = 6$ różnych uporządkowań:

$$(1\ 2\ 3)\ \ (2\ 3\ 1)\ \ (3\ 1\ 2)\ \ (1\ 3\ 2)\ \ (3\ 2\ 1)\ \ (2\ 1\ 3)$$

Dla ułatwienia wprowadźmy następujący zapis permutacji:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma(1) = 3, \;\; \sigma(2) = 1, \;\; \sigma(3) = 2.$$

W górnym wierszu zapisujemy porządek naturalny a w dolnym porządek docelowy. Zastanówmy się ile potrzeba przestawień dwóch elementów, żeby uzyskać permutację σ:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \quad \text{lub} \quad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \quad \text{lub} \quad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}$$

Za każdym razem potrzebujemy dwa przestawienia, czyli parzystą liczbę. Gdybyśmy postępowali niezbyt racjonalnie, np

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}$$

wykonalibyśmy 4 przestawienia - znowu parzyście. Ostatecznie $\operatorname{sgn}\sigma = +1$. Doświadczalnie ustalimy, że

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = +1 \quad \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -1$$

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = +1 \quad \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = +1 \quad \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -1$$

Posługując się powyższą tabelką możemy napisać wzór:

$$\det A = \begin{bmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ a^3{}_1 & a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{bmatrix} = a^1{}_1 a^2{}_2 a^3{}_3 + a^2{}_1 a^3{}_2 a^1{}_3 + a^3{}_1 a^1{}_2 a^2{}_3 -$$

$$- a^1{}_1 a^3{}_2 a^2{}_3 - a^3{}_1 a^2{}_2 a^1{}_3 - a^2{}_1 a^1{}_2 a^3{}_3$$

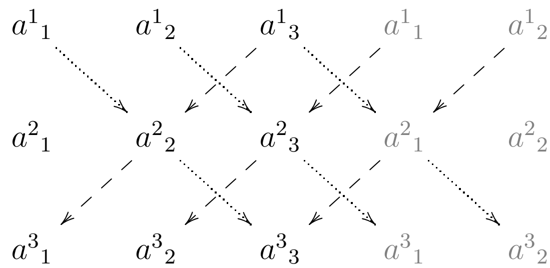
Ponieważ problem liczenia wyznacznika macierzy 3×3 pojawia się bardzo często w zadaniach, wygodnie jest znaleźć sposób zapamiętywania powyższego wzoru. Niektórzy lubią pamiętać obrazki. Dodatnie iloczyny symbolizują następujące obrazki

$$\begin{bmatrix} \bullet & & \\ & \bullet & \\ & & \bullet \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & & \bullet \\ \bullet & & \\ & \bullet & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & \bullet & \\ & & \bullet \\ \bullet & & \end{bmatrix},$$

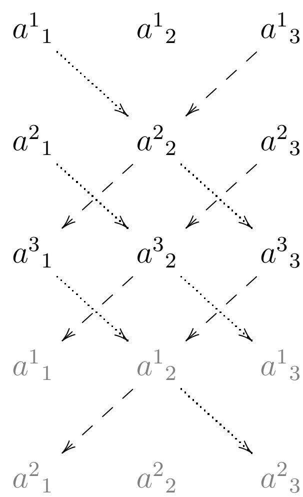
ujemne

$$\begin{bmatrix} \bullet & & \\ & & \bullet \\ & \bullet & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & & \bullet \\ & \bullet & \\ \bullet & & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & \bullet & \\ \bullet & & \\ & & \bullet \end{bmatrix}.$$

Inni wolą tzw. schemat Sarrusa w wersji poziomej (dodatnie kropkowane, ujemne kreskowane)



a jeszcze inni schemat Sarrusa w wersji pionowej



♣

Przykład 3. Wyznacznik macierzy 4×4 ma $4! = 24$ składniki - nie chce nam się wypisywać *explicite*! ♣

Szkic dowodu poprawności definicji znaku permutacji. Niech r oznacza liczbę przestawień dwóch elementów (transpozycji) która jest potrzebna, aby z uporządkowania naturalnego otrzymać uporządkowanie dane przez permutację σ. Liczba r nie jest jednoznacznie określona (patrz przykład (2)), ale jej parzystość jest, tzn. ma sens liczba $(-1)^r$. Żeby to udowodnić zauważmy, że permutacja σ definiuje podział zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ na rozłączne podzbiory takie, że wielokrotne działanie permutacją na element podzbioru nie wyprowadza poza podzbiór. Na przykład dla $n = 4$ i permutacji

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} 1 \to 3 \to 1 \to 3 \to \cdots \\ 2 \to 4 \to 2 \to 4 \to \cdots \end{matrix}$$

$$\{1,2,3,4\} = \{1,2\} \cup \{2,4\}$$

otrzymujemy dwa podzbiory, dla permutacji

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} 1 \to 4 \to 2 \to 1 \to 4 \to \cdots \\ 3 \to 3 \to 3 \to \cdots \end{array}$$

$$\{1,2,3,4\} = \{1,2,4\} \cup \{3\}$$

także dwa, a dla permutacji

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1 \to \cdots$$

$$\{1,2,3,4\}$$

tylko jeden podzbiór. Podzbiory te nazywamy orbitami permutacji. Permutacja σ_1 ma dwie orbity, permutacja σ_2 także dwie a permutacja σ_3 tylko jedną orbitę. Permutacja identycznościowa n elementów ma n orbit. Zauważmy, że złożenie permutacji z transpozycją zmienia liczbę orbit o 1. Jeśli transpozycja odbywa się wewnątrz orbity, to orbita rozpada się na dwie: Na przykład jeśli transpozycję σ_2 złożymy z transpozycją 1 z 4 otrzymamy

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4\,, \\ \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1 \to 1 \to \cdots \\ 2 \to 4 \to 2 \to 4 \to \cdots \\ 3 \to 3 \to \cdots \end{array}$$

$$\{1,2,3,4\} = \{1\} \cup \{1,4\} \cup \{3\}.$$

Z dwóch orbit powstały 3. Jeśli transpozycja jest między orbitami, te orbity się łączą, np:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4\,, \\ \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{array} \qquad 1 \to 4 \to 2 \to 3 \to 1 \to \cdots$$

z dwóch orbit powstała jedna. Załóżmy teraz, że przechodzimy od uporządkowania naturalnego (n orbit) do uporządkowania danego przez σ (k orbit). Załóżmy, że zrobiliśmy r-kroków (r transpozycji), z czego r_1 zwiększało liczbę orbit o 1, a $r_2 = r - r_1$ zmniejszało liczbę orbit o 1. Spełnione jest więc równanie:

$$\begin{aligned} n + r_1 \cdot (1) + r_2 \cdot (-1) &= k \\ n + r_1 - r_2 &= k \\ n + r_1 - (r - r_1) &= k \\ r &= n - k + 2r_1 \end{aligned}$$

Parzystość liczby r wyznaczona jest więc przez n i k:

$$(-1)^r = (-1)^{n-k+2r_1} = (-1)^{n-k}.$$

Parzystość nie zależy od r_1, r_2: niezależnie od sposobu dochodzenia do docelowej permutacji liczba kroków ma dobrze określoną parzystość. □

Zauważmy także, że każda permutacja (będąc bijekcją zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ w siebie) jest odwracalna, tzn. dla każdego σ istnieje ρ takie, że

$$\sigma \circ \rho = \rho \circ \sigma = \mathrm{id}\,, \text{ tzn. } \rho = \sigma^{-1}.$$

Chwila zastanowienia daje wniosek, że

$$\operatorname{sgn} \sigma = \operatorname{sgn} \sigma^{-1}.$$

Permutacja σ^{-1} składa się z tych samych transpozycji co σ, tylko zastosowanych w odwrotnej kolejności. Dzięki temu możemy udowodnić twierdzenie:

Fakt 2.

$$\det A = \det A^T.$$

Dowód: Korzystamy ze wzoru:

$$\det A = \sum_\sigma \operatorname{sgn} \sigma \; a^{\sigma(1)}{}_1 a^{\sigma(2)}{}_2 \cdots a^{\sigma(n)}{}_n =$$

i przestawiamy wyrazy w każdym iloczynie $a^{\sigma(1)}{}_1 a^{\sigma(2)}{}_2 \cdots a^{\sigma(n)}{}_n$ tak, aby były uporządkowane zgodnie z kolejnością górnych indeksów. Otrzymujemy wtedy

$$= \sum_\sigma \operatorname{sgn} \sigma \; a^1{}_{\sigma^{-1}(1)} a^2{}_{\sigma^{-1}(2)} \cdots a^n{}_{\sigma^{-1}(n)} =$$

Ponieważ każda permutacja ma odwrotną, a znaki σ i σ^{-1} są takie same, możemy sumować po σ^{-1}:

$$= \sum_{\sigma^{-1}} \operatorname{sgn} \sigma^{-1} \; a^1{}_{\sigma^{-1}(1)} a^2{}_{\sigma^{-1}(2)} \cdots a^n{}_{\sigma^{-1}(n)} =$$

Jeśli teraz $B = A^T$, to $b^i{}_j = a^j{}_i$ zatem

$$= \sum_{\sigma^{-1}} \operatorname{sgn} \sigma^{-1} \; b^{\sigma^{-1}(1)}{}_1 b^{\sigma^{-1}(2)}{}_2 \cdots b^{\sigma^{-1}(n)}{}_n =$$

Żeby uniknąć niejasności oznaczamy wskaźnik sumowania przez ρ i dostajemy

$$= \sum_\rho \operatorname{sgn} \rho \; b^{\rho(1)}{}_1 b^{\rho(2)}{}_2 \cdots b^{\rho(n)}{}_n = \det B = \det A^T.$$

□.

Wzór z permutacjami jest trochę mało praktyczny. Już dla macierzy 4×4 sumować musimy 24 składniki. Warto wymyśleć jakiś wygodniejszy wzór. W poniższych rozważaniach skorzystamy z faktu, że wyznacznik jest wieloliniowy ze względu na kolumny macierzy oraz że nie zmienia się jeśli do kolumny dodamy kombinację liniową pozostałych. Przyjrzyjmy się bliżej tej drugiej własności - do k-tej kolumny dodamy wielokrotność pierwszej:

$$\mathrm{vol}\,(a_1, a_2, \ldots, a_k + \lambda a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{vol}\,(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_n) + \lambda \mathrm{vol}\,(a_1, a_2, \ldots, a_1, \ldots, a_n)$$

Drugi składnik sumy jest równy zero, gdyż na miejscu k-tym i pierwszym stoi ten sam wektor.

Ustalmy teraz macierz A, jej kolumny $a_1, \ldots a_n$ i indeks $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$\det A = \mathrm{vol}\,(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n) =$$

Zapisujemy a_i w bazie standardowej: $a_i = a^1{}_i e_1 + a^2{}_i e_2 + \dots + a^n{}_i e_n$:

$$= \mathrm{vol}\,(a_1, a_2, \dots, a^1{}_i e_1 + a^2{}_i e_2 + \dots + a^n{}_i e_n, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} a^j{}_i \mathrm{vol}\,(a_1, a_2, \dots, e_j, \dots, a_n).$$

popatrzmy na k-ty składnik powyższej sumy:

$$a^k{}_i \mathrm{vol}\,(a_1, a_2, \dots, e_k, \dots, a_n) = a^k{}_i \det \begin{bmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & \cdots & 0 & \cdots & a^1{}_n \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & \cdots & 0 & \cdots & a^2{}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^k{}_1 & a^k{}_2 & \cdots & 1 & \cdots & a^k{}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^n{}_1 & a^n{}_2 & \cdots & 0 & \cdots & a^n{}_n \end{bmatrix} =$$

Przy pomocy 1 w i-tej kolumnie i k-tym wierszu można wyzerować prawie cały k-ty wiersz odejmując od wszystkich kolumn poza i-tą wektor $a^k{}_j e_k$:

$$= a^k{}_i \ \mathrm{vol}\,(a_1, a_2, \dots, e_k, \dots, a_n) =$$

$$a^k{}_i \ \mathrm{vol}\,(a_1 - a^k{}_1 e_k, a_2 - a^k{}_2 e_k, \dots, e_k, \dots, a_n - a^k{}_n e_k) =$$

$$a^k{}_i \det \begin{bmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & \cdots & 0 & \cdots & a^1{}_n \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & \cdots & 0 & \cdots & a^2{}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^n{}_1 & a^n{}_2 & \cdots & 0 & \cdots & a^n{}_n \end{bmatrix} =$$

Przestawiamy teraz i-tą kolumnę na pierwsze miejsce zmieniając znak $i-1$ razy, a następnie k-ty wiersz na pierwsze miejsce zmieniając znak $k-1$ razy:

$$= (-1)^{i-1}(-1)^{k-1} a^k{}_i \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a^1{}_1 & a^1{}_2 & \cdots & a^1{}_{i-1} & a^1{}_{i+1} & \cdots & a^1{}_n \\ 0 & a^2{}_1 & a^2{}_2 & \cdots & a^2{}_{i-1} & a^2{}_{i+1} & \cdots & a^2{}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a^{k-1}{}_1 & a^{k-1}{}_2 & \cdots & a^{k-1}{}_{i-1} & a^{k-1}{}_{i+1} & \cdots & a^{k-1}{}_n \\ 0 & a^{k+1}{}_1 & a^{k+1}{}_2 & \cdots & a^{k+1}{}_{i-1} & a^{k+1}{}_{i+1} & \cdots & a^{k+1}{}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & a^n{}_1 & a^n{}_2 & \cdots & a^n{}_{i-1} & a^n{}_{i+1} & \cdots & a^n{}_n \end{bmatrix}.$$

Bez trudu stwierdzimy, że ostatni wyznacznik jest równy wyznacznikowi macierzy $(n-1)\times(n-1)$ postaci

$$\det \begin{bmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & \cdots & a^1{}_{i-1} & a^1{}_{i+1} & \cdots & a^1{}_n \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & \cdots & a^2{}_{i-1} & a^2{}_{i+1} & \cdots & a^2{}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{k-1}{}_1 & a^{k-1}{}_2 & \cdots & a^{k-1}{}_{i-1} & a^{k-1}{}_{i+1} & \cdots & a^{k-1}{}_n \\ a^{k+1}{}_1 & a^{k+1}{}_2 & \cdots & a^{k+1}{}_{i-1} & a^{k+1}{}_{i+1} & \cdots & a^{k+1}{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a^n{}_1 & a^n{}_2 & \cdots & a^n{}_{i-1} & a^n{}_{i+1} & \cdots & a^n{}_n \end{bmatrix}$$

Wyznacznik macierzy z wykreślonym k-tym wierszem i i-tą kolumną pomnożony przez $(-1)^{k+i}$ nazywamy *dopełnieniem algebraicznym* wyrazu $a^k{}_i$ i oznaczamy $A^i{}_k$. Zwróćmy uwagę na położenie indeksów!!! Wstawiamy dotychczasowe ustalenia do początkowego wzoru na wyznacznik i otrzymujemy

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a^j{}_i A^i{}_j$$

Powyższy wzór nazywa się **Rozwinięciem Laplace'a** względem i-tej kolumny. Z niezmienniczości wyznacznika względem transpozycji wynika, że można rozwijać także względem wiersza, wtedy rozwinięcie Laplace'a ma postać (rozwinięcie względem j-tego wiersza)

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a^j{}_k A^k{}_j.$$

Rozwinięcie Laplace'a wykorzystać można do wyprowadzenia dwóch pożytecznych wzorów: wzoru na macierz odwrotną i tzw. wzorów Cramera dotyczących problemu rozwiązywania niezdegenerowanych układów równań liniowych.

Wzór na macierz odwrotną. Niech A będzie macierzą $n \times n$ taką, że $\det A \neq 0$. Wtedy, jak wiadomo, istnieje A^{-1}. Oznaczmy przez A^D macierz

$$A^D = \begin{bmatrix} A^1{}_1 & A^1{}_2 & \cdots & A^1{}_n \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 & \cdots & A^2{}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n{}_1 & A^n{}_2 & \cdots & A^n{}_n \end{bmatrix}$$

zwaną *macierzą dopełnień algebraicznych* albo *macierzą dołączoną*. Obliczmy iloczyn AA^D:

$$AA^D = \begin{bmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & \cdots & a^1{}_n \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & \cdots & a^2{}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n{}_1 & a^n{}_2 & \cdots & a^n{}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1{}_1 & A^1{}_2 & \cdots & A^1{}_n \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 & \cdots & A^2{}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n{}_1 & A^n{}_2 & \cdots & A^n{}_n \end{bmatrix}.$$

Wyraz diagonalny na pozycji $*^k{}_k$ ma postać:

$$\sum_{j=1}^{n} a^k{}_j A^j{}_k = \det A.$$

skorzystaliśmy z rozwinięcia Laplace'a. Wyraz pozadiagonalny $*^k{}_l$ dla $k \neq l$ ma postać

$$\sum_{j=1}^{n} a^k{}_j A^j{}_l$$

Powyższa suma jest równa zero, gdyż zgodnie z rozwinięciem Laplace'a jest to wyznacznik macierzy w której w k-tym i l-tym wierszu stoi ten sam k-ty wiersz wyjściowej macierzy A. Otrzymujemy więc

$$AA^D = \det A \cdot \mathbf{1}.$$

Podobnie okazuje się, że

$$A^D A = \det A \cdot \mathbf{1}.$$

W uzasadnieniu wykorzystuje się rozwinięcie Laplace'a względem kolumny, a nie wiersza. W ten sposób uzyskujemy wzór:

Fakt 3. *Jeśli* $\det A \neq 0$ *to*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^D.$$

Wzory Cramera. Niech teraz A będzie macierzą układu równań:

$$\begin{cases} a^1{}_1 x^1 + a^1{}_2 x^2 + \cdots + a^1{}_n x^n = b^1 \\ a^2{}_1 x^1 + a^2{}_2 x^2 + \cdots + a^2{}_n x^n = b^2 \\ \vdots \\ a^n{}_1 x^1 + a^n{}_2 x^2 + \cdots + a^n{}_n x^n = b^n \end{cases} \qquad A\vec{x} = \vec{b}$$

Jeśli $\det A$ jest różne od zera to istnieje A^{-1} i układ równań ma jedno rozwiązanie:

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Korzystając ze wzoru na macierz odwrotną stwierdzamy, że k-ta współrzędna wektora $\vec{x}$ ma postać

$$x^k = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} A^k{}_l b^l.$$

Ze wzoru na rozwinięcie Laplace'a względem k-tej kolumny wynika, że

$$\sum_{j=1}^{n} A^k{}_l b^l$$

jest wyznacznikiem macierzy A w której k-tą kolumnę podmieniono na wyraz wolny:

$$\sum_{j=1}^{n} A^k{}_l b^l = \det \begin{bmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & \cdots & b^1 & \cdots & a^1{}_n \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & \cdots & b^2 & \cdots & a^2{}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^n{}_1 & a^n{}_2 & \cdots & b^n & \cdots & a^n{}_n \end{bmatrix}.$$

Przy badaniu funkcji wielu zmiennych przydatne będzie **wyznaczanie sygnatury formy kwadratowej metodą wyznacznikową**. Niech Q będzie formą dwuliniową symetryczną, której macierz w bazie $e = (e_1, e_2, \ldots e_n)$ jest

$$[Q]_e = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nn} \end{bmatrix}.$$

Poszukamy alternatywnej metody znajdowania bazy diagonalizującej. Nową bazę oznaczać będziemy literą f. Niech $f_1 = e_1$. W podprzestrzeni rozpiętej przez e_1 i e_2 szukamy wektora f_2 takiego, że

$$Q(f_1, f_2) = 0.$$

Wiadomo, że wektor ten jest kombinacją liniową wektorów $e_1 = f_1$ i e_2:

$$f_2 = \lambda^1 e_1 + \lambda^2 e_2$$

Współczynniki wyznaczymy z warunku $Q(f_1, f_2) = 0$:

$$0 = Q(f_1, f_2) = Q(e_1, \lambda^1 e_1 + \lambda^2 e_2) = \lambda^1 Q(e_1, e_1) + \lambda^2 Q(e_1, e_2) = \lambda^1 Q_{11} + \lambda^2 Q_{12}$$

$$\lambda^1 = -\frac{Q_{12}}{Q_{11}}\lambda^2$$

Współczynnik λ^2 jest dowolny, można wybrać na przykład $\lambda^2 = 1$. Otrzymujemy wtedy

$$f_2 = -\frac{Q_{12}}{Q_11}e_1 + e_2 = \frac{1}{Q_{11}}[-Q_{12}e_1 + Q_{11}e_2]$$

W macierzy $[Q]_f$ na diagonali pojawia się $Q(f_2, f_2)$. Obliczmy:

$$Q(f_2, f_2) = Q\left(\frac{1}{Q_{11}}[-Q_{12}e_1 + Q_{11}e_2], \frac{1}{Q_{11}}[-Q_{12}e_1 + Q_{11}e_2]\right) =$$
$$\left(\frac{1}{Q_{11}}\right)^2[(Q_{12})^2 Q(e_1, e_1) - 2Q_{12}Q_{11}Q(e_1, e_2) + (Q_{11})^2 Q(e_2, e_2)] =$$
$$\left(\frac{1}{Q_{11}}\right)^2[(Q_{12})^2 Q_{11} - 2Q_{12}Q_{11}Q_{12} + (Q_{11})^2 Q_{22}] =$$
$$\frac{1}{Q_{11}}[Q_{11}Q_{22} - Q_{12}Q_{12}].$$

Kolejne wektory bazy f konstruujemy na tej samej zasadzie: f_i jest kombinacją liniową wektorów e_1, e_2,..., e_i taką, że $Q(f_1, f_i) = 0$,..., $Q(f_{i-1}, f_i) = 0$. Jak znaleźć odpowiednie współczynniki? Okazuje się, że jest na to ogólna metoda. Dla $i \leqslant n$ oznaczmy D_i wyznacznik macierzy

$$D_i = \det\left[\begin{array}{cccc} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1i} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{i1} & Q_{i2} & \cdots & Q_{ii} \end{array}\right],$$

czyli lewego górnego „kawałka” macierzy $[Q]_e$ i zdefiniujmy wektor f_i wzorem

$$f_i = \frac{1}{D_{i-1}}\det\left[\begin{array}{cccc} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1i} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{(i-1)1} & Q_{(i-1)2} & \cdots & Q_{(i-1)i} \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_i \end{array}\right]. \tag{6}$$

Powyższy wzór należy rozumieć tak, że stosujemy rozwinięcie Laplace'a względem ostatniego wiersza. Współczynnikami przy kolejnych wektorach bazy e są odpowiednie dopełnienia algebraiczne (podzielone przez D_i). Okazuje się, że tak zdefiniowane wektory spełniają nałożone przez nas warunki. Nie będziemy tego sprawdzać w całej ogólności. Zauważmy jedynie, że dla $i = 2$ wzór (6) zgadza się z wyprowadzonym przez nas. Przyjrzymy się także przypadkowi $i = 3$. Mamy wtedy:

$$f_3 = \frac{1}{D_2}\det\left[\begin{array}{ccc} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{array}\right].$$

Współczynniki przy e_k są proporcjonalne do dopełnień algebraicznych. Oznaczmy te dopełnienia A_1, A_2 i A_3. Wtedy

$$A_1 = \det\left[\begin{array}{cc} Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{22} & Q_{23} \end{array}\right], \quad A_2 = -\det\left[\begin{array}{cc} Q_{11} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{23} \end{array}\right], \quad A_3 = \det\left[\begin{array}{cc} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{array}\right] = D_2.$$

Sprawdźmy ile jest $Q(e_1, f_3)$:

$$Q(e_1, f_3) = Q(e_1, \frac{1}{D_2}[e_1A_1 + e_2A_2 + e_3A_3]) =$$
$$\frac{1}{D_2}[Q(e_1, e_1)A_1 + Q(e_1, e_2)A_2 + Q(e_1, e_3)A_3] =$$
$$\frac{1}{D_2}[Q_{11}A_1 + Q_{12}A_2 + Q_{13}A_3]$$

Zgodnie ze wzorem na wyznacznik zwanym rozwinięciem Laplace'a, wyrażenie czerwone jest wyznacznikiem pewnej macierzy:

$$[Q_{11}A_1 + Q_{12}A_2 + Q_{13}A_3] = \det \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \end{bmatrix} = 0.$$

Macierz ta ma dwa jednakowe wiersze, więc wyznacznik musi być zero. Podobnie będzie dla $Q(e_2, f_3)$, tylko, że tym razem powtórzy się wiersz drugi. Oznacza to, że $Q(f_1, f_3) = 0$ (bo $e_1 = f_1$) i $Q(f_2, f_3) = 0$, bo f_2 jest kombinacją liniową e_1 i e_2. Trzeba jeszcze policzyć $Q(f_3, f_3)$:

$$Q(f_3, f_3) = \left(\frac{1}{D_2}\right)^2 Q(e_1A_1 + e_2A_2 + e_3A_3, e_1A_1 + e_2A_2 + e_3A_3) =$$
$$\left(\frac{1}{D_2}\right)^2 Q(e_3A_3, e_1A_1 + e_2A_2 + e_3A_3) = \frac{1}{D_2} Q(e_3, e_1A_1 + e_2A_2 + e_3A_3) =$$
$$\frac{1}{D_2} \det \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} = \frac{D_3}{D_2}.$$

Macierz $[Q]_f$ jest diagonalna i na diagonali ma wyrazy

$$D_1, \frac{D_2}{D_1}, \frac{D_3}{D_2}, \ldots, \frac{D_n}{D_{n-1}}$$

Licząc wyrazy dodatnie i ujemne w powyższym ciągu znajdujemy sygnaturę formy. Metoda działa jeśli żaden z wyznaczników po drodze nie jest zero. Jeśli jest, wyjściowa baza e nie nadaje do tej metody, albo forma jest zdegenerowana.