

## Wykład 11.

Matematyka 2, semestr letni 2010/2011

*Uwaga! Notatki dotyczące całki Riemanna nie będą zawierały szczegółowych rozwiązań wszystkich przykładów.*

Wykład 11. poświęcony jest całce Riemanna na  $\mathbb{R}^n$ . Jak zwykle najczęściej pracować będziemy na  $\mathbb{R}^2$  lub  $\mathbb{R}^3$ . W planach są jednak także pewne ekstrawagancje, takie jak wyznaczanie objętości kuli jednostkowej w przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ . Znajomość definicji i technik obliczania całek z funkcji wielu zmiennych pozwala na wyznaczanie objętości figur bardziej skomplikowanych niż te występujące w szkolnej geometrii, wyznaczanie środków masy, momentów bezwładności, sił grawitacyjnych pochodzących od ciągłego rozkładu masy itd. Podobnie jak w przypadku całki Riemanna na  $\mathbb{R}$  także w wyższym wymiarze definicja całki i jej praktyczne obliczanie to dwa nieco różne zagadnienia. W jednym wymiarze techniki rachunkowe opierają się na *Podstawowym Twierdzeniu Rachunku Różniczkowego i Całkowego*. W przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  używamy twierdzenia Fubiniego o zamianie całki po obszarze w  $\mathbb{R}^n$  na całkę iterowaną i dalej korzystamy z umiejętności wyznaczania całek z funkcji jednej zmiennej.

Wykład rozpoczniemy od definicji całki Riemanna po kostce w  $\mathbb{R}^n$ . *Kostką* w  $\mathbb{R}^n$  nazywać będziemy iloczyn kartezyjski odcinków domkniętych  $I_k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}$ :

$$D = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n.$$

Innymi słowy

$$D = \{(x^1, x^2, \dots, x^n) : a_i \leq x^i \leq b_i\}.$$

Dla  $n = 2$  kostka jest prosto prostokątem, dla  $n = 3$  prostopadłością. Niech

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

będzie funkcją ograniczoną. Dalsze rozważania dla czytelności przeprowadzimy dla  $n = 2$ . Przypadek ogólny dostać można bez trudności. Kostkę  $D$  w dwóch wymiarach można przedstawić jako iloczyn kartezyjski dwóch odcinków

$$D = I \times J.$$

*Podziałem* odcinka  $I = [a, b]$  nazywamy uporządkowany ciąg punktów

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = b$$

należących do odcinka  $I$ . Punkty te dzielą odcinek  $I$  na sumę  $k$  odcinków  $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ :

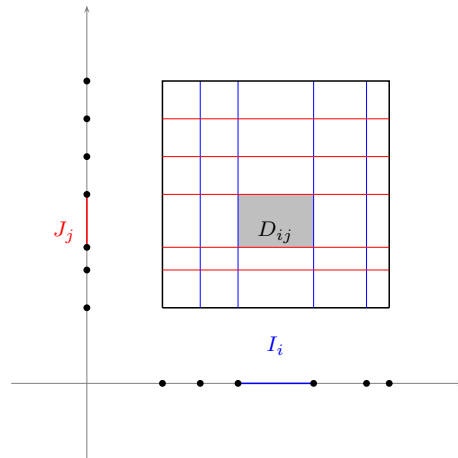


Podział  $R$  jest drobniejszy od podziału  $P$  jeśli  $P \subset R$  (gdy podziały potraktujemy po prostu jak zbiory punktów zapominając o uporządkowaniu). Jeśli punkty podziału  $R$  zaznaczymy czerwonymi kreskami a punkty podziału  $P$  czarnymi kropkami to podział  $R$  drobniejszy niż  $P$  wygląda następująco:



Zbiór podziałów odcinka jest zbiorem skierowanym, w którym podział  $R$  jest późniejszy niż  $P$  ( $R \succ P$ ) jeśli  $R$  jest drobniejszy niż  $P$ .

Para podziałów  $(P, Q)$ , gdzie  $P$  jest podziałem odcinka  $I$  a  $Q$  podziałem odcinka  $J$  definiuje podział kostki  $D$  na małe kostki  $D_{ij} = I_i \times J_j$ :



Zbiór par podziałów definiujących podziały kostki też jest zbiorem skierowanym. Para  $(P', Q')$  jest późniejsza od pary  $(P, Q)$  jeśli  $P'$  jest drobniejszy od  $P$  i  $Q'$  jest drobniejszy od  $Q$ . Objętością (w wymiarze 2 raczej powierzchnią) kostki  $D_{ij}$  nazywamy iloczyn długości odcinków  $I_i$  i  $J_j$ :

$$|I_i| = x_{i+1} - x_i, \quad |J_j| = y_{j+1} - y_j, \quad |D_{ij}| = |I_i| \cdot |J_j|.$$

Dla funkcji  $f$  ograniczonej na  $D$  definiujemy liczby

$$M_{ij} = \sup_{D_{ij}} f, \quad m_{ij} = \inf_{D_{ij}} f$$

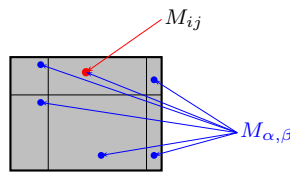
i sumy górną  $U$  i dolną  $L$ :

$$U(f; P, Q) = \sum_{i,j} |D_{ij}| M_{ij}, \quad L(f; P, Q) = \sum_{i,j} |D_{ij}| m_{ij}.$$

Zauważmy, że jeśli  $(P', Q')$  jest późniejszy niż  $(P, Q)$  to zachodzą nierówności

$$U(f; P, Q) \geq U(f; P', Q'), \quad \text{oraz} \quad L(f; P, Q) \leq L(f; P', Q').$$

Istotnie, jeśli kostka  $D_{ij}$  jest podzielona na mniejsze kostki  $B_{\alpha\beta}$ ,



to wartości  $M_{\alpha\beta}$  funkcji w punktach w których osiągane są suprema na  $B_{\alpha\beta}$  (niebieskie) są nie większe niż  $M_{ij}$  (supremum na dużej kostce  $D_{ij}$ , punkt czerwony). Podobnie wartości  $m_{\alpha\beta}$  funkcji w punktach w których osiągane są infima na  $B_{\alpha\beta}$  są nie mniejsze niż  $m_{ij}$ . Sumy górne są więc malejącym (względem relacji skierowania) ciągiem uogólnionym, zaś sumy dolne są rosnącym (względem relacji skierowania) ciągiem uogólnionym. Oba te ciągi są także ograniczone: Ciąg sum dolnych jest ograniczony z góry przez  $|D| \sup_D f$ , a ciąg sum górnych ograniczony z

dołu przez  $|D| \inf_D f$ . Oba ciągi są więc zbieżne. Odpowiednie granice nazywamy całką dolną i całką górną:

$$\lim_{\succ} L(f; \cdot, \cdot) = \int_{\underline{D}} f \quad \lim_{\succ} U(f; \cdot, \cdot) = \int_{\overline{D}} f.$$

Całka dolna i całka górna istnieją dla każdej funkcji ograniczonej  $f$ .

**Definicja 1.** Funkcja ograniczona  $f$  jest *całkowalna w sensie Riemanna* na  $D$  jeśli jej całka dolna na  $D$  jest równa całce górnej na  $D$ . Wspólną wartość tych całek nazywamy całką w sensie Riemanna z  $f$  na  $D$  i oznaczamy

$$\int_D f \quad \text{lub} \quad \int_D f(x, y) dx dy.$$

**Twierdzenie 1.** *Funkcja ciągła na  $D$  jest całkowalna w sensie Riemanna na  $D$ .*

**Dowód:** Funkcja ciągła  $f$  na zbiorze zwartym  $D$  jest jednostajnie ciągła. Spełnia więc warunek (zamienione kwantyfikatory w stosunku do zwykłej ciągłości w każdym punkcie  $D$ ):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D \quad d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) < \delta \Rightarrow |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon.$$

Jeśli więc ustalimy  $\varepsilon > 0$  i wybierzemy podział  $(P, Q)$  kostki  $D$  taki, żeby przekątna każdej z kostek  $D_{ij}$  była mniejsza od  $\delta$ , różnica  $M_{ij} - m_{ij}$  spełnia nierówność

$$M_{ij} - m_{ij} < \varepsilon$$

także na każdej z kostek  $D_{ij}$ . Możemy teraz oszacować różnicę między sumą dolną a sumą górną dla podziału  $(P, Q)$ :

$$U(f; P, Q) - L(f; P, Q) = \sum_{ij} |D_{ij}| M_{ij} - \sum_{ij} |D_{ij}| m_{ij} = \sum_{ij} |D_{ij}| (M_{ij} - m_{ij}) < \sum_{ij} |D_{ij}| \varepsilon = |D| \varepsilon.$$

Wybierając wystarczająco małe  $\varepsilon$  możemy różnicę między sumą górną a dolną uczynić dowolnie małą. Całki górna i dolna muszą być więc równe i, co za tym idzie,  $f$  jest całkowalna w sensie Riemanna na  $D$ .  $\square$

We wszystkich powyższych rozważaniach można zamienić  $\mathbb{R}^2$  na  $\mathbb{R}^n$  otrzymując poprawną teorię całki Riemanna na  $\mathbb{R}^n$ .

**Przykład 1.** Wyznamy z definicji całkę z funkcji  $f(x, y) = x + y$  po kwadracie o wierzchołkach  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ . Funkcja  $f$  jest ciągła, wiadomo więc, że całka istnieje. Wystarczy, że wybierzemy jakikolwiek ciąg podziałów o malejącej do zera przekątnej kostek i obliczymy granicę sumy górnej lub dolnej przy przekątnej kostek dążącej do zera. (Uwaga: żeby być w pełni w zgodzie z wcześniejszymi rozważaniami teoretycznymi powinniśmy wziąć ciąg podziałów uporządkowany względem rozważanej przez nas relacji skierowania. Warunek zmniejszania się przekątnej kostek nie jest wystarczający. Z teorii całki z funkcji jednej zmiennej wiemy jednak, że można wprowadzić alternatywną relację skierowania związaną z wymiarem największej z kostek podziału. Dowodzi się, że obie relacje prowadzą do tego samego pojęcia całki.) Niech  $I = [0, 1]$ ,  $J = [0, 1]$ ,  $D = I \times J$ . Wprowadzamy w  $I$  i  $J$  podziały na  $n$  równych części, tzn

$$P_n = \left\{ \frac{i}{n} : i = 0, 1, \dots, n \right\}, \quad Q_n = \left\{ \frac{j}{n} : j = 0, 1, \dots, n \right\}.$$

Każda z kostek  $D_{ij}$  jest iloczynem kartezjańskim

$$D_{ij} = \left[ \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right] \times \left[ \frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right], \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Funkcja  $f$  przyjmuje na kostce  $D_{ij}$  największą wartość w punkcie  $(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$ :

$$M_{ij} = \frac{i+j}{n}.$$

Wyznaczamy sumę górną:

$$\begin{aligned} U(f; P_n, Q_n) &= \sum_{ij} |D_{ij}| M_{ij} = \sum_{ij} \frac{1}{n^2} \frac{i+j}{n} = \\ &= \frac{1}{n^3} \left( \sum_{ij} i + \sum_{ij} j \right) = \frac{1}{n^3} \left( \sum_{i=1}^n i \sum_{j=1}^n 1 + \sum_{j=1}^n j \sum_{i=1}^n 1 \right) = \\ &= 2 \frac{1}{n^3} n \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

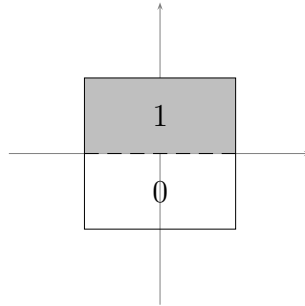
Zgodnie z definicją

$$\int_D (x+y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$



Zastanówmy się teraz jakie jeszcze funkcje, oprócz ciągłych, są całkowalne w sensie Riemanna?

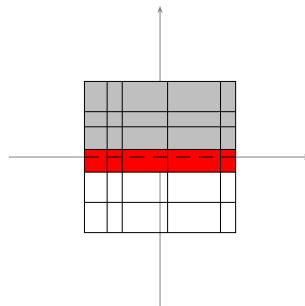
**Przykład 2.** Czy funkcja  $g$  przyjmująca wartość 1 w górnej półpłaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$  i na osi  $0x$  oraz wartość 0 w dolnej półpłaszczyźnie jest całkowalna na kwadracie o wierzchołkach  $(\pm 1, \pm 1)$ ?



Rozważamy różnicę między sumą górną a sumą dolną dla pewnego podziału  $(P, Q)$ .

$$U(g; P, Q) - L(g; P, Q) = \sum_{ij} |D_{ij}| (M_{ij} - m_{ij}).$$

Kostki, które zawarte są w całości w górnej lub w dolnej półpłaszczyźnie nie dają wkładu do różnicy, ponieważ w górnej półpłaszczyźnie  $M_{ij} = m_{ij} = 1$ , a w dolnej  $M_{ij} = m_{ij} = 0$ . Istotny wkład dają tylko kostki leżące „na granicy”. W takich kostkach  $M_{ij} = 1$ ,  $m_{ij} = 0$  i  $M_{ij} - m_{ij} = 1$ . Różnica między sumą górną a sumą dolną jest więc sumą powierzchni kostek leżących na granicy (zaznaczone na czerwono):



Im jednak drobniejszy podział, tym pasek zaznaczony na czerwono ma mniejszą powierzchnię. W granicy powierzchnia ta znika i całka górna okazuje się być równa całce dolnej dla funkcji  $g$ . Funkcja  $g$  jest całkowna w sensie Riemanna na  $D$ . ♣

Powyższy przykład pokazuje, że aby funkcja była całkowna w sensie Riemanna jej zbiór punktów nieciągłości nie może być za duży. Dokładniej rzecz biorąc musi się dać pokryć przeliczalną liczbą kostek, których suma powierzchni (objętości) może być dowolnie mała. Odpowiednia jest tu następująca definicja:

**Definicja 2.** Zbiór  $S \subset \mathbb{R}^n$  jest *zbiorem miary Lesbeque'a zero* w  $\mathbb{R}^n$  jeśli dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje ciąg kostek  $D_i$  taki, że

$$S \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} D_i$$

oraz

$$\sum_{i=1}^{\infty} |D_i| < \varepsilon.$$

Na płaszczyźnie zbiorami miary Lesbeque'a zero są np. przeliczalne zbiory punktów, obrazy krzywych ciągłych. Nie mają miary Lesbeque'a zero zbiory mające niepuste wnętrze, tzn zawierając jakąś kulę otwartą. Jeśli dwa zbiory są miary Lesbeque'a zero to także ich suma jest miary Lesbeque'a zero. Własność tę można rozszerzyć na przeliczalną rodzinę zbiorów miary Lesbeque'a zero. Jeśli  $A \subset S$  i  $S$  jest miary Lesbeque'a zero, to także  $A$  jest miary Lesbeque'a zero. Oto twierdzenie precyzujące zbiór funkcji całkownych w sensie Riemanna.

**Twierdzenie 2.** *Funkcja  $f$  jest całkowna w sensie Riemanna na kostce  $D$  wtedy i tylko wtedy gdy zbiór punktów nieciągłości funkcji  $f$  leżących w kostce  $D$  jest miary Lesbeque'a zero.*

Twierdzenie to pozostawiamy bez dowodu, traktując przykład (2) jako pewnego rodzaju uzasadnienie.

**Twierdzenie Fubniego: przejście do całki iterowanej.** Poszukujemy teraz praktycznego sposobu obliczania całki Riemanna na kostkach w  $\mathbb{R}^2$  (ostatecznie także w  $\mathbb{R}^n$ ). Przyjmijmy jak wcześniej  $D = I \times J$ , załóżmy dla ułatwienia że funkcja  $f$  jest ciągła, wybierzmy podział  $(P, Q)$  kostki  $D$  i zapiszmy sumę dolną

$$L(f; P, Q) = \sum_{ij} |I_i| |J_j| m_{ij} = \sum_i |I_i| \sum_j |J_j| m_{ij}$$

W odcinku  $I_i$  wybierzmy teraz punkt  $\xi_i \in I_i$  i wyznaczmy

$$\inf_{J_j} f(\xi_i, \cdot)$$

Ponieważ z definicji  $m_{ij} < \inf_{J_j} f(\xi_i, \cdot)$  spełniona jest nierówność

$$L(f; P, Q) \leq \sum_i |I_i| \sum_j |J_j| \inf_{J_j} f(\xi_i, \cdot)$$

Wyrażenie

$$\sum_j |J_j| \inf_{J_j} f(\xi_i, \cdot)$$

jest sumą dolną dla funkcji  $J \ni y \mapsto f(\xi_i, y)$ , czyli

$$(1) \quad L(f; P, Q) \leq \sum_i |I_i| L(f(\xi_i, \cdot); Q).$$

Funkcja  $J \ni y \mapsto f(\xi_i, y)$  jest ciągła a więc całkowna. Istnieje więc funkcja

$$x \mapsto \int_J f(x, y) dy,$$

ponadto spełniona jest nierówność

$$L(f(\xi_i, \cdot); Q) \leq \int_J f(\xi_i, y) dy.$$

Nierówność (1) pociąga więc

$$(2) \quad L(f; P, Q) \leq \sum_i |I_i| \int_J f(\xi_i, y) dy$$

Wyrażenie  $\sum_i |I_i| \int_J f(\xi_i, y) dy$  nazywa się często sumą wypunktowaną dla funkcji  $x \mapsto \int_J f(x, y) dy$ . Ma podobną postać jak suma dolna i górna dla funkcji  $x \mapsto \int_J f(x, y) dy$ , jednak zamiast infimum bądź supremum funkcji na odpowiednim odcinku użyta jest wartość funkcji w jakimkolwiek punkcie należącym do odcinka  $I_i$ . Oczywiście suma wypunktowana jest zawsze większa od sumy dolnej i mniejsza od sumy górnej dla tej samej funkcji. Jeśli funkcja ta jest całkowna (w naszym przypadku jest nawet ciągła), to w granicy względem relacji skierowania suma wypunktowana dąży do całki.

Stosując podobne rozważania dla sumy górnej otrzymalibyśmy nierówność

$$(3) \quad \sum_i |I_i| \int_J f(\xi_i, y) dy \leq U(f; P, Q).$$

Nierówności (2) i (3) połączone razem przyjmują postać

$$(4) \quad L(f; P, Q) \leq \sum_i |I_i| \int_J f(\xi_i, y) dy \leq U(f; P, Q).$$

Funkcja  $f$  jest ciągła (a więc całkowna). W granicy względem relacji skierowania w zbiorze podziałów sumy  $L(f; P, Q)$  i  $U(f; P, Q)$  dążą do całki z  $f$  po  $D$ , zaś wyraz środkowy do całki iterowanej

$$\int_I dx \int_J f(x, y) dy.$$

Ostatecznie otrzymujemy równość

$$(5) \quad \int_D f(x, y) dx dy = \int_I dx \int_J f(x, y) dy.$$

Prawdziwość równości podobnej do (5) w nieco większej ogólności jest treścią twierdzenia Fubiniego:

**Twierdzenie 3** (Fubini). *Niech  $f$  będzie funkcją całkowną na kostce  $D = D_1 \times D_2$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D_1 \subset \mathbb{R}^m$ ,  $D_2 \subset \mathbb{R}^k$ ,  $n = m + k$ . Wówczas funkcje*

$$u(x) = \overline{\int}_{D_2} f(x, y) dy, \quad l(x) = \underline{\int}_{D_2} f(x, y) dy$$

są całkowne i

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_{D_1} u(x) dx = \int_{D_1} l(x) dx.$$

My prowadziliśmy rozważania dla funkcji ciągłej  $f$ , co pozwoliło nam uniknąć kłopotów wynikających ze konieczności używania całek dolnych i górnych na kostce  $D_2$ . Ciągłość  $f$  gwarantuje, że  $f$  jest całkowalna względem każdej ze zmiennych oddzielnie. Dla ogólnej funkcji całkowalnej tak nie musi być. Załóżmy, że dla ustalonego  $x \in D_1$  funkcja  $y \mapsto f(x, \cdot)$  ma dużo punktów nieciągłości. Punkty te są oczywiście także punktami nieciągłości dla  $f$ . Ponieważ zbiór  $\{x\} \times D_2$  jest miary zero w  $\mathbb{R}^n$  to wszelkie nieciągłości zawarte w tym zbiorze nie mają znaczenia dla całkowalności  $f$ . Może się jednak okazać, że zbiór punktów nieciągłości nie jest miary zero w  $\mathbb{R}^k$  i funkcja  $y \mapsto f(x, \cdot)$  może się okazać niecałkowalna, stąd konieczność używania w sformułowaniu twierdzenia całki górnej i dolnej. W praktycznych zastosowaniach fizycznych i geometrycznych nie będziemy się spotykać z tego rodzaju problemami.

Konsekwencją Twierdzenia Fubiniego jest też możliwość wyboru kolejności całkowania. Podobne rachunki, które doprowadziły nas do równości (5) można dokonać zamieniając rolami  $x$  i  $y$ . Mamy wtedy

$$(6) \quad \int_J dy \int_I f(x, y) dx = \int_D f(x, y) dx dy = \int_I dx \int_J f(x, y) dy.$$

Twierdzenie Fubiniego umożliwia praktyczne obliczanie całek. Oto kilka przykładów:

**Przykład 3.** Obliczyć, sprowadzając do całki iterowanej, całkę z przykładu (1). ♣

**Przykład 4.** Obliczyć całkę z funkcji

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

po prostokącie

$$D = \left[ \frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3} \right] \times [0, 1],$$

dokonując zamiany na całkę iterowaną na dwa sposoby. Czy są jakieś różnice między stopniem trudności rachunków w dwóch różnych kolejnościach? ♣

**Całkowanie po zbiorach innych niż kostki.** Niech  $A$  będzie podzbiorem w  $\mathbb{R}^n$ . Brzegiem zbioru  $A$  nazywamy zbiór punktów  $x \in \mathbb{R}^n$  spełniających warunek:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad K(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad \text{i} \quad K(x, \varepsilon) \cap A' \neq \emptyset.$$

Inaczej mówiąc punkt  $x$  jest punktem brzegowym podzbioru  $A$  jeśli w dowolnym otoczeniu tego punktu znajdują się zarówno punkty ze zbioru  $A$  jak i punkty z dopełnienia tego zbioru ( $A'$ ), czyli nie należące do  $A$ . Brzeg zbioru  $A$  oznaczamy symbolem  $\partial A$ . Wnętrzem zbioru  $A$  nazywamy te punkty należące do  $A$ , które należą do niego wraz z pewnym otoczeniem. Bardziej precyzyjnie:

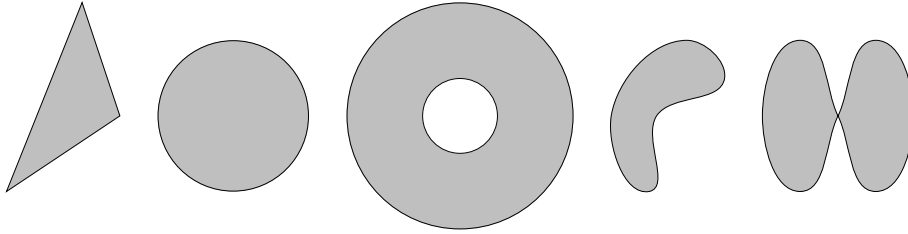
$$\text{Int}A = \{x \in A : \exists \varepsilon > 0 : K(x, \varepsilon) \subset A\}.$$

Funkcją charakterystyczną zbioru  $A$  nazywamy funkcję

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Powyższa funkcja jest nieciągła, a zbiór jej punktów nieciągłości to  $\partial A$ . Korzystając z twierdzenia Lebesgue'a możemy powiedzieć, że funkcja charakterystyczna zbioru  $A$  jest funkcją całkowalną jeśli zbiór jest ograniczony i jego brzeg jest zbiorem miary zero. Zbiory ograniczone,

których brzeg jest miary zero nazywamy mierzalnymi w sensie Jordana. Całkę z funkcji charakterystycznej zbioru mierzalnego po dowolnej kostce zawierającej ten zbiór nazywamy *miarą Jordana* zbioru. Zbiory mierzalne w sensie Jordana są dobrymi zbiorami, po których można całkować. Mierzalne w sensie Jordana są oczywiście kostki. Do całkowania używa się najczęściej zbiorów, których brzegiem jest obraz ciągłej krzywej zamkniętej. Zbiory te mogą wyglądać na przykład tak:



Całkę z funkcji  $f$  po zbiorze  $A$  definiujemy następująco

$$\int_A f = \int_D \chi_A f,$$

gdzie  $D$  jest dowolną kostką zawierającą zbiór  $A$ . Jeśli  $f$  jest całkowalna na  $D$  i  $A$  jest mierzalny w sensie Jordana, to także  $\chi_A f$  jest całkowalna. Zbiór punktów nieciągłości jest zawarty w sumie zbiorów  $\partial A$  i zbioru punktów nieciągłości  $f$  w  $D$ . Oba zbiory są miary Lesbeque'a zero, zatem ich suma i dowolny podzbiór tej sumy także są miary Lesbeque'a zero.

Zamiana całki Riemanna na całkę iterowaną dla zbioru  $A$  musi uwzględniać kształt zbioru  $A$ . Najlepiej omówić to na przykładzie.

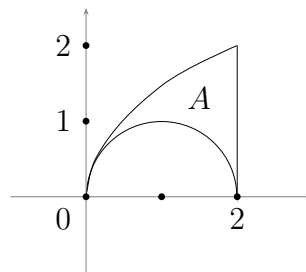
**Przykład 5.** Zamienić całkę z funkcji  $f$  po zbiorze

$$A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, y^2 \leq 2x, (x-1)^2 + y^2 \geq 1, y \geq 0\}$$

na całkę iterowaną na dwa sposoby. Zbiór  $A$  jest ograniczony krzywymi

$$y^2 = 2x, \quad y^2 + (x-1)^2 = 1 \quad x = 2$$

i wygląda następująco

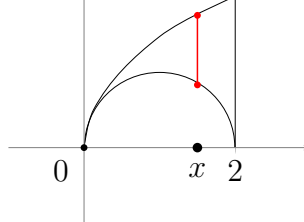


Jeśli całkować mamy najpierw po  $y$  a potem po  $x$  (co jest tutaj naturalną kolejnością) czyli

$$\int dx \int dy f$$

musimy dla ustalonego  $x$  wyznaczyć granice całkowania względem  $y$ :





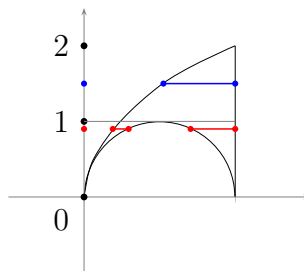
Dolna granica to  $y = \sqrt{2x - x^2}$  zaś górna to  $y = \sqrt{2x}$ . Zmienna  $x$  przebiega odcinek  $[0, 2]$

$$\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} dy f$$

Jeśli np.  $f(x, y) = y$  mamy

$$\begin{aligned} \int_A y dx dy &= \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} y dy = \int_0^2 dx \left( \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (2x - (2x - x^2)) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{6} x^3 \Big|_0^2 = \frac{8}{6} \end{aligned}$$

Całkowanie w drugiej kolejności jest bardziej skomplikowane. Będziemy musieli podzielić całość na dwie części, bo dla  $y \in [0, 1]$  obszar całkowania względem  $x$  składa się z dwóch odcinków:



Naszą całość możemy teraz zapisać następująco:

$$\int_A f = \int_0^1 dy \left( \int_{\frac{1}{2}y^2}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^2 f(x, y) dx \right) + \int_1^2 dy \int_{\frac{1}{2}y^2}^2 f(x, y) dx.$$

Rachunki teraz są nieco bardziej skomplikowane (dla wybranej funkcji  $f(x, y) = y$ ), ale wykonując je starannie uzyskamy ten sam wynik. ♣

**Zadanie 1.** Do samodzielnego rozwiązywania proponuję państwu następujące przykłady: Zamienić kolejność całkowania w całkach

$$\int_{-2}^6 dx \int_{-\sqrt{12+4x-x^2}}^{\sqrt{12+4x-x^2}} f(x, y) dy, \quad \int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy, \quad \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx.$$



**Zadanie 2.** Udowodnić tożsamość

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz = \int_0^1 dz \left( \int_0^x dy \int_{z-y}^{1-y} f(x, y, z) dx + \int_z^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y, z) dx \right)$$



Wskazówka: W zadaniu (2) należy rozpoznać całość iterowaną po lewej stronie równości jako całość po pewnym obszarze w  $\mathbb{R}^3$ . Opisać ten obszar a następnie pokazać, że wyrażenie po prawej stronie wynika z zamiany kolejności całkowania.

Najskuteczniejszej techniki całkowania dostarcza twierdzenie o zamianie zmiennych. Dla jasności sformułowania twierdzenia zdefiniujemy pojęcie dziedziny skończonej. *Dziedziną skończoną* nazywamy zwarty zbiór, który ma niepuste wnętrze i którego brzeg jest lokalnie wykresem ciągłego odwzorowania. Dziedziny skończone są mierzalne w sensie Jordana. Dodatkowo obraz dziedziny skończonej względem dyfeomorfizmu klasy  $\mathcal{C}^1$  też jest dziedziną skończoną. Wszystkie zbiory po których dotychczas całkowaliśmy są właśnie takie. Twierdzenie o zamianie zmiennych pozostawimy bez dowodu:

**Twierdzenie 4.** *Niech  $\mathcal{O}$  i  $\mathcal{U}$  będą obszarami otwartymi w  $\mathbb{R}^n$  a  $\Psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{O}$  będzie dyfeomorfizmem klasy  $\mathcal{C}^1$ . Niech także zbiór  $K$  będzie dziedziną skończoną. Dla dowolnej ciągłej funkcji  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  zachodzi wzór*

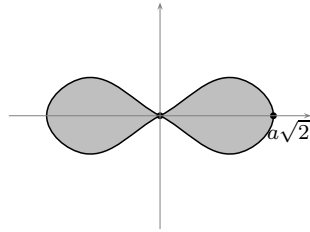
$$\int_K f = \int_{\Psi^{-1}(K)} f \circ \Psi |\det(\Psi')|.$$

Twierdzenie o zamianie zmiennych zilustrujemy dwoma przykładami:

**Przykład 6.** Obliczyć powierzchnię ograniczoną lemniskatą Bernoulli'ego, czyli krzywą o równaniu

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

Obszar ograniczony lemniskatą Bernoulli'ego wygląda mniej więcej tak:



Niech  $S$  oznacza prawą część tego obszaru, tzn dla  $x > 0$ . Pole powierzchni obszaru płaskiego obliczamy całkując we współrzędnych kartezjańskich funkcję równą 1 po tym obszarze. Ze względu na symetrię całkować będziemy po  $S$  i mnożyć wynik przez 2:

$$P = 2 \int_S 1 dx dy.$$

We współrzędnych kartezjańskich można wyznaczyć równanie fragmentu krzywej  $x \mapsto y(x)$  leżącej w pierwszej ćwiartce:

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{a^4 + 16a^2x^2} - 2x^2 - 2a^2)}$$

Po zamianie na całkę iterowaną otrzymamy

$$P = 2 \int_S 1 dx dy = \int_0^{a\sqrt{2}} dx \int_{-y(x)}^{y(x)} dy = 2 \int_0^{a\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{a^4 + 16a^2x^2} - 2x^2 - 2a^2)} dx.$$

Obliczanie tej całki jest niezwykle kłopotliwe. Mnie w każdym razie się nie udało (jak na razie). Zamiast tego proponuję przejść do współrzędnych biegunowych danych, jak zwykle, równaniami

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

Odwzorowanie, które występuje w twierdzeniu to

$$\Phi : ]0, \infty[ \times ]-\pi, \pi[ \ni (r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : y = 0, x < 0\}$$

W stosunku do standardowych współrzędnych biegunowych zmieniałam dziedzinę  $\varphi$ , tak, aby prawa połówka lemniskaty znalazła się w obrazie odwzorowania. W tych współrzędnych lemniskata opisana jest wzorem

$$r^4 = 2a^2(r^2 \cos \varphi - r^2 \sin \varphi).$$

Skracamy przez  $r^2$  i stosujemy odpowiednią tożsamość trygonometryczną:

$$r^2 = 2a^2 \cos(2\varphi), \quad r = a\sqrt{2 \cos(2\varphi)}$$

Prawa część lemniskaty odpowiada kątowi z przedziału  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ . Potrzebujemy jeszcze wyznacznik  $\det \Phi'$ .

$$\Phi' = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$\det \Phi' = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$$

Zmienna  $r$  przyjmuje tylko wartości dodatnie, więc nie musimy dopisywać wartości bezwzględnej do wyznacznika. W ten sposób zamiast  $dx dy$  do całki wstawiamy  $r dr d\varphi$ .

$$P = 2 \int_S 1 dx dy = 2 \int_{\Phi^{-1}(S)} r dr d\varphi$$

i zamieniamy całkę na iterowaną:

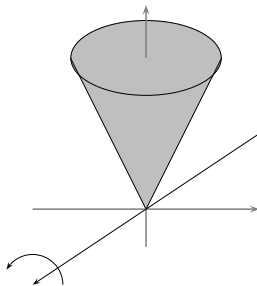
$$P = 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2a^2 \cos(2\varphi)}} r dr = 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^{\sqrt{2a^2 \cos(2\varphi)}} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2a^2 \cos(2\varphi) d\varphi = 2a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\varphi) d\varphi = 2a^2 \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2.$$



**Przykład 7.** Znaleźć moment bezwładności jednorodnego stożka

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\}$$

o masie  $M$  względem osi  $0x$ .



Moment bezwładności punktu materialnego o masie  $m$  w ruchu obrotowym względem osi  $\ell$  jest równy  $md^2$ , gdzie  $d$  jest odległością punktu od osi obrotu. Moment bezwładności bryły sztywnej obliczamy całkując funkcję  $p \mapsto f(p) = \rho(p)d^2(p)$  po objętości bryły. W powyższym wzorze  $p$  oznacza punkt bryły sztywnej,  $\rho(p)$  gęstość masy w punkcie  $p$ , a  $d(p)$  odległość punktu

$p$  bryły od osi obrotu. Stożek, którego moment bezwładności mamy obliczyć jest jednorodny, zatem jego gęstość jest stała, tzn nie zależy od punktu. Oznaczmy tę gęstość  $\rho$ . Stożek obraca się względem osi  $0x$ , zatem odległość punktu  $p = (x, y, z)$  od tej osi jest równa

$$d(x) = \sqrt{y^2 + z^2}.$$

Jeśli stożek oznaczmy  $S$ , do obliczenia mamy następującą całkę:

$$I = \rho \int_S (y^2 + z^2) dx dy dz.$$

Powyższą całkę zamieniamy na iterowaną:

$$I = \rho \int_S (y^2 + z^2) dx dy dz = \rho \int_0^1 dz \int_{-z}^z dy \int_{-\sqrt{z^2 - y^2}}^{\sqrt{z^2 - y^2}} (y^2 + z^2) dx = \rho \int_0^1 dz \int_{-z}^z dy (y^2 + z^2) 2\sqrt{z^2 - y^2}$$

Doszliśmy do dość zniechęcającej postaci. W tym momencie należałoby zastosować podstawienie trygonometryczne  $y = z \sin t$ , żeby jakoś pozbyć się pierwiastka. Rachując cierpliwie uzyskalibyśmy zapewne poprawny wynik. Wygodniej jednak będzie od razu przejść do współrzędnych walcowych  $(r, \varphi, \zeta)$ :

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad z = \zeta,$$

tzn użyć odwzorowania

$$\Psi^{-1}(S) = \{(r, \varphi, \zeta) : r \leq \zeta, 0 \leq \zeta \leq 1\}.$$

W tych zmiennych równanie powierzchni stożka  $x^2 + y^2 = z^2$  przyjmuje postać

$$r^2 = \zeta^2$$

co przy dodatkowym warunku  $0 \leq z \leq 1$  daje

$$\Psi^{-1}(S) = \{(r, \varphi, \zeta) : r \leq \zeta, 0 \leq \zeta \leq 1\}.$$

Funkcja do całkowania przyjmuje względnie prostą postać

$$z^2 + y^2 = \zeta^2 + r^2 \sin^2 \varphi$$

Odwzorowanie  $\Psi$  definiujące układ współrzędnych ma pochodną

$$\Psi' = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

której wyznacznik, podobnie jak dla współrzędnych biegunowych na płaszczyźnie jest równy

$$\det \Psi' = r$$

Zamieniając zmienne dostajemy całkę

$$I = \rho \int_S (\zeta^2 + r^2 \sin^2 \varphi) r dr d\varphi d\zeta,$$

którą zapisujemy w postaci na iterowanej

$$I = \rho \int_0^1 d\zeta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\zeta (\zeta^2 + r^2 \sin^2 \varphi) r dr$$

i obliczamy

$$\begin{aligned}
 I &= \rho \int_0^1 d\zeta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\zeta (\zeta^2 + r^2 \sin^2 \varphi) r dr = \rho \int_0^1 d\zeta \left( \frac{1}{2} \zeta^2 r^2 + \frac{1}{4} r^4 \sin^2 \varphi \right) \Big|_0^\zeta = \\
 &= \rho \int_0^1 d\zeta \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} \zeta^4 + \frac{1}{4} \zeta^4 \sin^2 \varphi \right) = \rho \int_0^1 \left( \pi \zeta^4 + \frac{\pi}{4} \zeta^4 \right) d\zeta = \rho \frac{5\pi}{4} \int_0^1 \zeta^4 d\zeta = \\
 &= \rho \frac{5\pi}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{\pi}{4} \rho
 \end{aligned}$$

W treści zadania pojawia się masa stożka  $M$  a nie jego gęstość. Wiadomo, że

$$M = \rho V$$

gdy gęstość jest stała. Objętość stożka możemy wyznaczyć całkując jedynekę po stożku lub posługując się szkolnym wzorem

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h,$$

w którym  $R$  jest promieniem podstawy a  $h$  wysokością stożka. W zadaniu  $R = 1$ ,  $h = 1$ , zatem

$$V = \frac{1}{3} \pi, \quad M = \frac{1}{3} \pi \rho, \quad \rho = \frac{3M}{\pi}.$$

Ostateczny wzór na moment bezwładności to

$$I = \frac{\pi}{4} \rho = \frac{\pi}{4} \frac{3M}{\pi} = \frac{3}{4} M.$$



Do samodzielnej nauki proponuję następujące zadania

**Zadanie 3.** Znaleźć moment bezwładności względem osi  $0z$  stożka

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\}$$

o gęstości  $\rho(x, y, z) = \rho_0 z^2$ .

Drugie zadanie jest nieco trudniejsze rachunkowo:

**Zadanie 4.** Znaleźć moment bezwładności jednorodnego stożka

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\}$$

względem osi zawierającej tworzącą tego stożka.

**Przykład 8.** Standardowym przykładem pożytecznego zastosowania twierdzenia o zamianie zmiennych jest rozwiązanie następującego problemu: Znaleźć

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Wiadomo, że funkcja pierwotna do  $x \mapsto e^{-x^2}$  nie wyraża się przez funkcje elementarne. Wiadomo także, że całka ta jest zbieżna, tzn ma skończoną wartość. Jak jednak ją policzyć? Można postąpić na przykład następująco:

$$I^2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy$$

Ostatnią całkę traktujemy jak całkę iterowaną otrzymaną z całki po  $\mathbb{R}^2$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

Dokonyjemy zamiany zmiennych na biegunowe:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-r^2} r dr d\varphi$$

i wracamy do postaci całki iterowanej, ale w nowych zmiennych

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-r^2} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr$$

Całkę

$$\int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr$$

można obliczyć dzięki dodatkowemu czynnikowi  $r$  pochodzącemu od zamiany zmiennych:

$$\int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = -\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

Wstawiamy wynik do całki iterowanej:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\varphi = \pi$$

Otrzymaliśmy

$$I^2 = \pi, \quad I = \sqrt{\pi}$$

czyli

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$



Wszystko byłoby dobrze, gdybyśmy nie dokonali tutaj przynajmniej dwóch nadużyć: Po pierwsze użyliśmy pojęcia całki Riemanna po obszarze nieograniczonym jakim jest  $\mathbb{R}^2$ , czyli tak zwanej *całki niewłaściwej*, której nawet nie zdefiniowaliśmy. Po drugie zastosowaliśmy twierdzenie o zamianie takiej całki na iterowaną nie mając pewności czy wolno. W dalszym ciągu musimy więc zwrócić uwagę na całki niewłaściwe i ich własności. Nie będziemy jednak zagłębiać się bardzo w kwestie teoretyczne. Wskażemy jedynie na pewne różnice w stosunku do całek niewłaściwych jednej zmiennej.

**Niewłaściwa całka Riemanna.** Całka niewłaściwa jest to całka po obszarze nieograniczonym z ograniczonej funkcji lub całka po obszarze ograniczonym, ale z funkcji nieograniczonej. Niech  $A$  będzie obszarem nieograniczonym w  $\mathbb{R}^n$ , którego brzeg (jeśli jest niepusty) jest lokalnie wykresem odwzorowania ciągłego. Takimi obszarami w  $\mathbb{R}^2$  są na przykład: całe  $\mathbb{R}^2$ , pierwsza ćwiartka układu współrzędnych, zewnątrz pewnego koła, wewnątrz kąta, pas pomiędzy równoległymi prostymi... Załóżmy także, że funkcja  $f$  określona na  $A$  jest lokalnie całkowalna, tzn. całkowalna na każdej dziedzinie skończonej zawartej w  $A$ . Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru  $A$  będących dziedzinami skończonymi jest wyposażony w relację zawierania, która czyni z tego zbioru zbiór skierowany. Zbiór  $K_2$  jest późniejszy niż  $K_1$  jeśli  $K_1 \subset K_2$ . Nie każde dwa zbiory są porównywalne, ale dowolne dwa zbiory  $K_1$  i  $K_2$  mają wspólny zbiór późniejszy, mianowicie

$K_1 \cup K_2$ . Suma wszystkich tego typu podzbiorów zawartych w  $A$  jest równa  $A$ . Możemy teraz dla lokalnie całkowalnej funkcji  $f$  zdefiniować ciąg uogólniony

$$K \longmapsto \int_K f.$$

Granice powyższego ciągu uogólnionego, jeśli istnieje, nazywamy całką z  $f$  po  $A$  i oznaczamy

$$\int_A f$$

Podobnie jeśli  $A$  jest skończony a  $f$  nieograniczona, ale lokalnie całkowalna, możemy postąpić podobnie: rozważyć zbiór wszystkich dziedzin skończonych będących podzbiorem  $A$ , (na których całki istnieją – lokalna całkowalność) i badać istnienie granicy ciągu uogólnionego względem relacji skierowania. Oto kilka konsekwencji tej definicji:

- (1) Jeśli  $f$  jest funkcją nieujemną, wystarczy wybrać dowolny zwykły ciąg  $K_n$  podzbiorów  $A$  taki, że każdy z nich jest dziedziną skończoną,  $K_{n+1} \supset K_n$  i  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = A$  i sprawdzić czy istnieje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{K_n} f$$

Istnienie (lub nieistnienie) tej granicy jest równoznaczne z istnieniem (lub nieistnieniem) całki.

- (2) Jeśli  $f$  jest funkcją zmieniającą znak na  $A$ , to całka z  $f$  istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje całka z  $|f|$ . Inaczej więc niż w przypadku całki Riemanna funkcji jednej zmiennej, nie ma pojęcia warunkowej zbieżności całki. Wynika to z różnicy w definicji całki niewłaściwej Riemanna w przypadku jednej i wielu zmiennych. W przypadku jednej zmiennej całka niewłaściwa definiowana jest jako granica względem skierowanego zbioru przedziałów zawartych w obszarze całkowania. Nie dopuszcza się np. skończonych sum przedziałów. W całości wielu zmiennych nie ograniczamy tak bardzo zbioru  $K$ . Może on być niespójny, tzn składać się z kilku rozłącznych podzbiorów.
- (3) Twierdzenie Fubiniego nie obowiązuje w całej ogólności. Problemów nie ma dla funkcji ciągłych, jednak znane są (egzotyczne) przykłady w których istnieje całka po obszarze w  $\mathbb{R}^n$  natomiast nie można jej przedstawić w postaci całki iterowanej, nawet uwzględniając możliwość użycia pojęcia całki dolnej i górnej. Można oczywiście liczyć całki przy pomocy zamiany na całki iterowane, jednak trzeba sprawdzać zarówno istnienie całek iterowanych i całek po obszarze wielowymiarowym, zwłaszcza dla funkcji zmieniających znak.

Nie będziemy zajmować się formułowaniem twierdzeń dotyczących całkowalności w sensie niewłaściwym. Zamiast tego zaprezentuję państwu kilka przykładów ilustrujących możliwe trudności.

**Przykład 9.** Przykład ten pochodzi z podręcznika G.M. Fichtenholza (ust. 617, pkt. 24b). Niech  $D$  będzie pierwszą ćwiartką płaszczyzny  $\mathbb{R}^2$ , tzn  $D = [0, \infty[ \times [0, \infty[$ . Zbadajmy istnienie całki

$$\int_D \sin(x^2 + y^2) dx dy$$

Niech  $K_R$  oznacza ćwiartkę koła o promieniu  $R$  zawartą w  $D$ , tzn

$$K_R = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Całkę z funkcji  $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$  można obliczyć korzystając z współrzędnych biegunowych

$$\begin{aligned} \int_{K_R} \sin(x^2 + y^2) dx dy &= \int_{[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, R]} \sin(r^2) r dr d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \sin(r^2) r dr = \\ &= \frac{\pi}{2} \left( -\frac{1}{2} \cos(r^2) \right) \Big|_0^R = \frac{\pi}{4} (1 - \cos(R^2)). \end{aligned}$$

Granica

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} (1 - \cos(R^2))$$

nie istnieje. Rodzina zbiorów  $\{K_R, R > 0\}$  jest uporządkowana względem relacji skierowania, ponadto suma wszystkich elementów tego podciągu jest równa  $D$ . Nie istnienie granicy całek względem tej rodziny oznacza, że nie istnieje całka na  $D$ . Przyjrzyjmy się teraz całkom iterowanym

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \sin(x^2 + y^2) &= \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy (\sin(x^2) \cos(y^2) + \cos(x^2) \sin(y^2)) = \\ &= \int_0^\infty \cos(x^2) dx \int_0^\infty \sin(y^2) dy + \int_0^\infty \sin(x^2) dx \int_0^\infty \cos(y^2) dy = \\ &= 2 \int_0^\infty \cos(x^2) dx \int_0^\infty \sin(y^2) dy \end{aligned}$$

Całki  $\int_0^\infty \sin(x^2) dx$  i  $\int_0^\infty \cos(x^2) dx$  nazywane są całkami Fresnela. Oblicza się je metodą badania odpowiednich całek z parametrem. Okazuje się, że

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx = \int_0^\infty \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Tym samym nasza całka iterowana

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \sin(x^2 + y^2) = 2 \int_0^\infty \cos(x^2) dx \int_0^\infty \sin(y^2) dy = 2 \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

Z powodu symetrii funkcji podcałkowej ze względu na zamianę  $x$  i  $y$  całka iterowana w odwrotnej kolejności jest taka sama. Przykład ten pokazuje, że w przypadku funkcji zmieniającej znak, nie można z istnienia całek iterowanych wnioskować o istnieniu całki podwójnej. Takie twierdzenie zachodzi dla funkcji nieujemnych. ♣

**Przykład 10.** Wróćmy teraz na chwilę do przykładu (8). W przykładzie tym obliczaliśmy całkę z funkcji Gaussa korzystając z całki niewłaściwej po  $\mathbb{R}^2$ . Uzasadnimy teraz, że rachunki były poprawne. Zauważmy przede wszystkim, że funkcja  $(x, y) \mapsto e^{-(x^2+y^2)}$  jest nieujemna. Istnienie całki po  $\mathbb{R}^2$  wystarczy więc zbadać na jednym ciągu zbiorów wyczerpującym  $\mathbb{R}^2$ . Mogą to być na przykład koła  $K_n$  o środku w  $(0, 0)$  i promieniu  $n$  dla  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\int_{K_n} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{[0, 2\pi] \times [0, n]} e^{-r^2} r dr d\varphi = 2\pi \left( -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^n = \pi(1 - e^{-n^2})$$

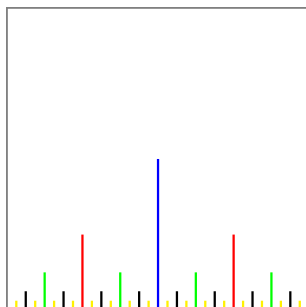
Granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(1 - e^{-n^2}) = \pi$$

istnieje, zatem funkcja jest całkowna na  $\mathbb{R}^2$ . Całki iterowane istnieją, co wiadomo z teorii całki z funkcji jednej zmiennej. W tej sytuacji równość całek iterowanych i całki po obszarze jest już zapewniona. ♣



**Przykład 11.** Kolejny przykład dotyczy funkcji nieograniczonej zdefiniowanej na ograniczonym zbiorze. Pochodzi on także z podręcznika G.M. Fichtenholza (ust. 617, pkt. 23). Niech  $D = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ . Zwróćmy uwagę, że zbiór  $D$  jest otwarty. Funkcja  $f$  jest określona na  $D$  i prawie wszędzie przyjmuje wartość zero. Wartości różne od zera funkcja  $f$  przyjmuje w punktach  $(x, y)$  takich, że  $x$  jest liczbą wymierną zapisaną w postaci nieskracalnego ułamka o mianowniku równym  $2^n$  a  $y$  spełnia nierówność  $y < \frac{1}{2^n}$ . Wartość funkcji w takim punkcie jest równa  $2^n$ . Oto stosowna ilustracja:



Na odcinku niebieskim, czyli dla  $x = \frac{1}{2}$ , funkcja przyjmuje wartość 2, na odcinkach czerwonych ( $x = \frac{1}{4}$  i  $x = \frac{3}{4}$ ) wartość 4, na odcinkach zielonych ( $x = \frac{2l+1}{8}$ ) wartość 8, na czarnych wartość 16, na żółtych 32 itd. Całka iterowana

$$\int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x, y)$$

istnieje. Istotnie, dla każdego ustalonego  $y$  funkcja przyjmuje wartość różną od zera jedynie dla skończonej liczby punktów. Jest więc całkowna w sensie Riemanna i wartość całki jest równa 0, tzn funkcja

$$y \longmapsto \int_0^1 dx f(x, y)$$

jest stała i równa zero. Całka iterowana zatem

$$\int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x, y) = 0.$$

Inaczej jest z całką liczoną w odwrotnej kolejności. Dla ustalonego  $x$  niewymiernego lub wymiernego z mianownikiem innym niż  $2^n$  funkcja  $y \mapsto f(x, y)$  jest stała i równa zero. Natomiast jeśli  $x = \frac{2l+1}{2^n}$  funkcja  $y \mapsto f(x, y)$  jest stała i równa  $2^n$ , zatem jej całka

$$\int_0^1 dy f(x, y) = \int_0^{\frac{1}{2^n}} 2^n dy = 1$$

Funkcja

$$x \longmapsto \int_0^1 dy f(x, y)$$

jest zatem funkcją podobną do funkcji Riemanna: przyjmuje wartość 1 dla  $x$  wymiernych z mianownikiem  $2^n$  i 0 w pozostałych przypadkach. Zbiór punktów nieciągłości tej funkcji jest całym odcinkiem  $[0, 1]$ , gdyż w dowolnym otoczeniu każdego punktu w którym funkcja przyjmuje wartość 1 są punkty w których przyjmuje wartość zero i odwrotnie. Funkcja  $x \longmapsto \int_0^1 dy f(x, y)$  jest więc niecałkowna w sensie Riemanna.

Całka z  $f$  po  $D$  jednak istnieje. Jeśli rozważymy rodzinę obszarów  $D_\varepsilon$ , gdzie

$$D_\varepsilon = [\varepsilon, 1 - \varepsilon] \times [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$$

spełniającą warunki  $D_{\varepsilon_1} \subset D_{\varepsilon_2}$  gdy  $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$  oraz  $\bigcup_{0 < \varepsilon < \frac{1}{2}} D_\varepsilon = D$  okaże się, że

$$\int_{D_\varepsilon} f(x, y) dx dy = 0,$$

gdyż w każdym ze zbiorów  $D_\varepsilon$  zbiór punktów nieciągłości funkcji  $f$  jest zbiorem miary zero - jest to skończona liczba odcinków. W tej sytuacji

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D_\varepsilon} f(x, y) dx dy = 0 = \int_D f(x, y) dx dy.$$

Znaleźliśmy więc nieograniczoną funkcję określoną na  $D$ , całkowalną na  $D$  i taką, że jedna z całek iterowanych nie istnieje. Łatwo też możemy skonstruować całkowalną funkcję taką, że żadna z całek iterowanych nie istnieje. Wystarczy wziąć

$$g(x, y) = f(x, y) + f(y, x).$$



**Dodatkowe zadania:** W ramach wykładu rozwiązane zostaną także (lub zaproponowane do samodzielnego rozwiązania) następujące zadania

**Zadanie 5.** Znaleźć środek masy jednorodnej półkuli  $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$ .



**Zadanie 6.** Znaleźć siłę przyciągania grawitacyjnego między jednorodną półkulą  $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$  o masie  $M$  i masą punktową  $m$  umieszczoną w punkcie  $(0, 0, -1)$  ♠

**Zadanie 7.** Wyprowadzić wzór wiążący momenty bezwładności bryły obliczone względem dwóch równoległych osi. ♠

**Zadanie 8.** Obliczyć objętość kuli o promieniu  $R$  w przestrzeni  $\mathbb{R}^4$ . ♠

**Wskazówka:** W powyższym zadaniu proponuję następującą strategię. W przestrzeni  $\mathbb{R}^4$  wprowadzamy współrzędne sferyczne dwuetapowo. Startujemy od współrzędnych kartezjańskich  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Potem pierwszą trójkę współrzędnych zamieniamy na sferyczne:

$$x_1 = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad x_2 = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad x_3 = \rho \cos \theta.$$

Element objętości wyznaczamy licząc wyznacznik  $3 \times 3$  (albo korzystamy ze zdobytej wcześniej wiedzy) i otrzymujemy  $\rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi dx_4$ . Równanie sfery wygląda teraz  $\rho^2 + x_4^2 = 1$ . Potem robimy następną zamianę zmiennych

$$\rho = r \sin \theta_1, \quad x_4 = r \cos \theta_1, \quad \theta_1 \in [0, \pi],$$

czyli w zasadzie liczymy wyznacznik  $2 \times 2$  i otrzymujemy element objętości

$$r^3 \sin^2 \theta_1 \sin \theta dr d\theta_1 d\theta d\varphi.$$

Dalej już tylko krok do objętości kuli  $n$ -wymiarowej.

**Zadanie 9.** Na podstawie rozwiązania poprzedniego zadania wyprowadzić wzór na objętość kuli o promieniu  $R$  w przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ . ♠