Wykład 0.

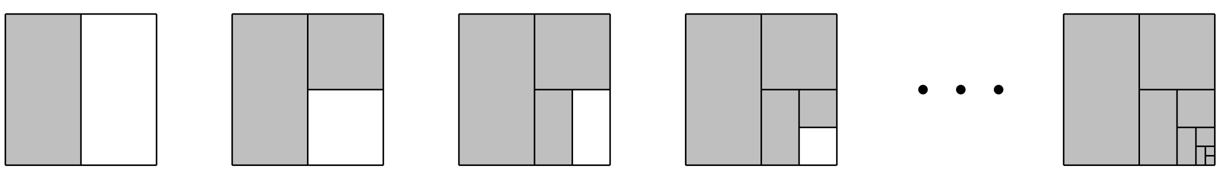
Matematyka 2, semestr letni 2010/2011

Program poprzedniego semestru kończy się badaniem szeregów liczbowych. W tak zwanych *dawnych czasach* ludziom sprawiało trudność zrozumienie, że suma nieskończonej liczby składników może być skończona. Zastanawiał się nad tym jeden z filozofów starożytnej Grecji: Zenon z Elei.

Paradoks Dychotomii: Sprinter ma do przebiegnięcia skończony dystans. Zanim jednak pokona całą odległość musi najpierw dobiec do 1/2 długości, ale zanim dobiegnie do 1/2 musi najpierw dobiec do 1/4, ale zanim dobiegnie do 1/4 musi najpierw dobiec do 1/8, i tak w nieskończoność. Wynika z tego, że biegacz ma do przebycia nieskończoną liczbę odcinków o skończonej długości. Ponieważ nie da się pokonać nieskończonej liczby odcinków w skończonym czasie, biegacz nigdy nie ukończy biegu. (*Wikipedia*)

Paradoks Żółwia i Achillesa: Achilles i żółw stają na linii startu wyścigu na dowolny, skończony dystans. Achilles potrafi biegać 2 razy szybciej od żółwia i dlatego na starcie pozwala oddalić się żółwiowi o 1/2 całego dystansu. Achilles, jako biegnący 2 razy szybciej od żółwia, dobiegnie do 1/2 dystansu w momencie, gdy żółw dobiegnie do 3/4 dystansu. W momencie gdy Achilles przebiegnie 3/4 dystansu, żółw znowu mu "ucieknie" pokonując 7/8 dystansu. Gdy Achilles dotrze w to miejsce, żółw znowu będzie od niego o 1/16 dystansu dalej, i tak dalej w nieskończoność. Wniosek: Achilles nigdy nie dogoni żółwia, mimo że biegnie od niego dwa razy szybciej, gdyż zawsze będzie dzieliła ich zmniejszająca się odległość. (*Wikipedia*)

Powyższe (tak zwane) paradoksy opierają się na założeniu, że suma nieskończonej liczby skończonych wielkości nie może być skończona. O tym, że założenie to nie jest prawdziwe można się przekonać przyglądając się następującemu obrazkowi (kwadrat ma pole równe 1):



$\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ $\quad$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ $\quad$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ $\quad$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$

W analizie matematycznej szeregiem liczbowym przyjęło się nazywać napis

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1}$$

Sens, jaki nadajemy takiemu napisowi jest następujący: Jeśli $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem liczbowym, to ciąg S_n taki, że

$$\begin{array}{l} S_1 = a_1 \\ S_2 = a_1 + a_2 \\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots \\ S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \end{array} .$$

nazywamy *sumą częściową* szeregu (1). Mówimy, że szereg (1) jest *zbieżny* jeśli ciąg (S_n) ma granicę. Granicę tę nazywamy *sumą szeregu.* O ciągu (a_n) mówimy, że jest to *ciąg wyrazów szeregu.* Widać więc, że tak naprawdę każdy ciąg liczbowy można zapisać jako szereg. To, że zajmujemy się nimi oddzielnie wynika z faktu, iż w wielu zagadnieniach fizycznych i matematycznych szeregi powstają w sposób naturalny. W takim przypadku zazwyczaj ciąg (a_n) jest w wygodniejszej postaci niż (S_n). O zbieżności szeregu (a więc ciągu (S_n)) chcielibyśmy wypowiadać się raczej w terminach ciągu (a_n), niż (S_n). Szereg, którego ilustrację widzimy na obrazku ma wyraz ogólny

$$a_n = \frac{1}{2^n} \quad \text{i sumę częściową} \quad S_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

W tym przypadku sumę częściową łatwo przestawić w powyższej „wygodnej postaci” przeprowadzając rachunek:

$$S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n} = \frac{2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+1}{2^n} = \frac{2^n-1}{2^n}.$$

W rachunku tym użyliśmy wzoru

$$\text{(2)} \qquad a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}) \quad \text{dla} \quad a = 2, b = 1.$$

Możemy więc napisać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n} = 1.$$

Zazwyczaj jednak sytuacja nie jest taka prosta. Musimy znaleźć sposoby jak poradzić sobie z szeregami bez znajomości wygodnego wzoru na sumę częściową. Pamiętając, że badanie zbieżności szeregów to tak naprawdę badanie zbieżności specyficznych ciągów, sprawdźmy, co dla szeregów wynika ze znanych twierdzeń i technik dotyczących ciągów.

Dla ciągów mamy do dyspozycji na przykład **warunek Cauchy'ego**: Ciąg liczbowy jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągiem Cauchy'ego, czyli spełnia warunek:

$$\text{(3)} \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n, m > N \ \ |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Warunek Cauchy'ego jest zazwyczaj bardzo trudny do sprawdzania. Dla szeregów ma jednak interesującą konsekwencję. Zapiszmy (3) dla (S_n):

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n, m > N \ \ |S_n - S_m| < \varepsilon.$$

Zakładając, że $n > m$ dostajemy

$$|S_n - S_m| = |a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{m+1}|$$

Szereg jest więc zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy powyższa suma jest dowolnie mała dla wystarczająco dużych m i n. W szczególności jeśli szereg jest zbieżny, to dowolnie mała powinna być ta suma także dla $n = m + 1$. Wtedy składa się ona z jednego tylko wyrazu:

$$|S_{m+1} - S_m| = |a_{m+1}|.$$

Dla zbieżnego szeregu możemy więc napisać:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall m > N \ \ |a_m| < \varepsilon,$$

co bardziej po ludzku oznacza, że ciąg (a_n) jest zbieżny do zera. Otrzymaliśmy w ten sposób *warunek konieczny zbieżności szeregu liczbowego.* Nie jest on wystarczający, tak jak pełny warunek Cauchyego, bo kwantyfikator ogólny „$\forall n, m > N$” zastąpiliśmy słabszą wypowiedzią

„$\forall n, m > N : n = m + 1$”, rozważamy więc tylko niektóre pary (n, m) a nie wszystkie. Znajomość tego warunku jest jednak użyteczna, gdyż może zaoszczędzić nam pracy. Sformułujmy warunek konieczny jeszcze raz:

Twierdzenie 1. *Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Innymi słowy, jeśli ciąg (a_n) nie ma granicy lub ma granicę różną od 0, szereg z całą pewnością jest rozbieżny.*

Badanie zbieżności jakiegokolwiek szeregu powinno zatem zacząć się od sprawdzenia warunku koniecznego. Może to zaoszczędzić badającemu poszukiwania skomplikowanych kryteriów zbieżności dla szeregu, który ewidentnie jest rozbieżny. Z drugiej strony sama zbieżność a_n do zera nie wystarcza. Znane są przykłady szeregów takich, że warunek konieczny jest spełniony a mimo to szereg jest rozbieżny. Najbardziej znany to szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, o którym wiadomo, że jest rozbieżny. Zbieżność (a_n) do zera musi być wystarczająco szybka.

Kolejne twierdzenie znane dla ciągów to **twierdzenie o ciągach monotonicznych i ograniczonych** (że są zbieżne). Jeśli ciąg sum częściowych jest rosnący, to znaczy, że wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie. Jeśli ciąg (S_n) jest malejący, to wyrazy ciągu a_n są ujemne. Twierdzenie o ciągach monotonicznych i ograniczonych da się więc zastosować do szeregów, których wyrazy są stałego znaku. Skoncentrujmy się na szeregach o wyrazach dodatnich. Stosowna wersja twierdzenia o ciągach monotonicznych i ograniczonych mogłaby brzmieć:

Twierdzenie 2. *Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy jego ciąg sum częściowych jest ograniczony.*

W ten sposób można na przykład rozstrzygnąć o zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$:

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{k!} \leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} = 2 + [\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}}].$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest mniejsze niż 1 (patrz nasz pierwszy szereg), zatem

$$S_k \leqslant 2 + [\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}}] \leqslant 3.$$

Wiemy zatem, że szereg wykładniczy jest zbieżny, choć nie znamy jego sumy. (To znaczy znamy oczywiście, ale na razie jeszcze tego elegancko nie policzyliśmy).

Poszukiwanie górnego ograniczenia w postaci konkretnej liczby dla ciągu sum częściowych bywa zadaniem beznadziejnym. Jeśli jednak ma się już w głowie (albo w notatkach) stosowny zapas zbieżnych szeregów do porównań, można szukać tego ograniczenia wśród sum szeregów zbieżnych. Jeśli $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ jest zbieżny i c_n jest dodatnie, to suma R tego szeregu (czyli granica ciągu R_n sum częściowych) jest ograniczeniem górnym dla ciągu sum częściowych. Jeśli nasz badany szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest taki, że dla każdego n $a_n \leqslant c_n$ to także $S_n \leqslant R_n \leqslant R$. Tego R nie musimy nawet znać, wystarczy wiedzieć, że istnieje. W ten sposób otrzymaliśmy kryterium zbieżności szeregów zwane *pierwszym kryterium porównawczym*. A oto i samo twierdzenie:

Twierdzenie 3 (Pierwsze kryterium porównawcze)**.** *Niech (a_n) i (c_n) będą ciągami wyrazów dodatnich i takich, że dla prawie wszystkich n naturalnych zachodzi nierówność $a_n \leqslant c_n$. Wówczas jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ jest zbieżny to także $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Jeśli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny to także $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ jest rozbieżny*

Zwrot „dla prawie wszystkich” jest wygodnym skrótem od „dla wszystkich poza skończoną liczbą”. W przypadku tego twierdzenia chodzi o to, że skończona liczba początkowych wyrazów nie ma znaczenia dla zbieżności. Jeśli więc nierówność $a_n \leqslant c_n$ nie zachodzi dla początkowych

N wyrazów, ale dla $n > N$ zachodzi, to nadal możemy wnioskować o zbieżności $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ na podstawie zbieżności $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ albo o rozbieżności $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ na podstawie rozbieżności $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Kryterium porównawcze jest bardzo skuteczne, jeśli wiemy już dużo o różnych szeregach. Warto więc budować sobie taką bazę danych zawierającą różne przykłady. Jak dotąd mamy w niej tylko szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ i $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Pierwszy z tych przykładów, szczególny przypadek *szeregu geometrycznego*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

z ilorazem $q = \frac{1}{2}$. Przyjrzyjmy się ogólnemu przypadkowi. Wyrazy ciągu sum częściowych

$$Q_k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^k$$

można zapisać w wygodniejszej postaci używając wzoru (2) dla $a = 1$, $b = q$:

$$1 - q^{k+1} = (1-q)(1 + q + q^2 + \cdots + q^k) = (1-q)Q_k, \qquad Q_k = \frac{1 - q^{k+1}}{1-q}$$

Założyć trzeba oczywiście, że $q \neq 1$, ale to założenie nie ogranicza nas w ogóle, bo jeśli $q = 1$ to szereg jest ewidentnie rozbieżny. Ciąg (Q_k) ma skończoną granicę jedynie gdy $|q| < 1$. Wtedy

$$\lim_{k\to\infty} Q_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1 - q^{k+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

Wnioskujemy więc, że *szereg geometryczny jest zbieżny jedynie, gdy wartość bezwzględna ilorazu tego szeregu jest mniejsza od 1.* W pozostałych przypadkach szereg geometryczny jest rozbieżny. Kolejne rekordy bazy danych dodamy używając następującego twierdzenia

Twierdzenie 4 (Lemat o zagęszczaniu)**.** *Niech a_n będzie nierosnącym ciągiem wyrazów dodatnich wówczas szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest} \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}.$$

Na pierwszy rzut oka nie wiele pomaga... Spróbujmy jednak. Niech $a_n = \frac{1}{n^p}$, gdzie $p > 0$ jest dowolną liczbą rzeczywistą. Na pierwszy rzut oka nic nie wiadomo o szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

dla $p > 0$. Dla $p \leqslant 0$ nie spełnia warunku koniecznego, więc jest ewidentnie rozbieżny. Sprawdźmy jak wygląda ten drugi szereg z lematu:

$$(2^k)\frac{1}{(2^k)^p} = (2^k)\frac{1}{2^{kp}} = \frac{1}{2^{kp-k}} = \left(\frac{1}{2^{(p-1)}}\right)^k,$$

czyli jest szeregiem geometrycznym

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{(p-1)}}\right)^k,$$

o którym wiadomo, że jest zbieżny, gdy jego iloraz $q = \frac{1}{2^{(p-1)}}$ jest mniejszy od 1. Skoro tak, p musi być większe od 1. Mamy już do porównań całe mnóstwo szeregów zbieżnych i rozbieżnych w zależności od p. Na przykład dla $p = 1$ otrzymujemy rozbieżny szereg harmoniczny: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$, dla $p = 2$ zbieżny szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Przykład szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ pokazuje, że w problemie zbieżności szeregów chodzi tak naprawdę o to, jak szybko wyrazy szeregu dążą do zera. Obserwacja ta znajduje potwierdzenie w następującym twierdzeniu

Twierdzenie 5 (Drugie kryterium porównawcze)**.** *Niech (a_n) i (b_n) będą ciągami wyrazów dodatnich. Załóżmy, że istnieje granica*

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jest zbieżny i α jest skończone to $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ też jest zbieżny. Jeśli $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny i $\alpha > 0$ to $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ też jest rozbieżny.

Powyższe sformułowanie nie jest najogólniejsze z możliwych. Założenie istnienia granicy ilorazu ciągów jest zbyt mocne. Tak naprawdę do dowodu zbieżności wystarczy, aby ciąg $\frac{a_n}{b_n}$ był ograniczony z góry, natomiast dla dowodu rozbieżności, aby prawie wszystkie wyrazy tego ciągu były ograniczone przez liczbę dodatnią. W zadaniach najczęściej jednak spotyka się przykłady w których istnieje granica.

Przykład 1. Zbadajmy zbieżność

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+\sqrt{n}}{1+n^2}.$$

Licznik jest rzędu $\frac{1}{2}$ a mianownik rzędu 2, zatem (a_n) dąży do zera mniej więcej tak jak $\frac{1}{\sqrt{n}^3}$. Spodziewamy się więc, że szereg będzie zbieżny. Można użyć pierwszego kryterium porównawczego argumentując, że

$$a_n = \frac{2+\sqrt{n}}{1+n^2} \leqslant \frac{2+\sqrt{n}}{n^2} = \frac{2}{n^2} + \frac{1}{\sqrt{n}^3},$$

a szereg, którego wyrazem ogólnym jest $\frac{2}{n^2} + \frac{1}{\sqrt{n}^3}$ jest zbieżny. (Korzystamy dodatkowo z tego, że suma szeregów zbieżnych jest zbieżna.) Można też użyć drugiego kryterium porównawczego dla $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}^3}$, wtedy

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{2+\sqrt{n}}{1+n^2}}{\frac{1}{\sqrt{n}^3}} = \frac{(2+\sqrt{n})\sqrt{n}^3}{1+n^2} = \frac{(\sqrt{n}^3+n^2)}{1+n^2} = \frac{(\frac{1}{\sqrt{n}}+1)}{\frac{1}{n^2}+1} \longrightarrow 1 = \alpha$$

Szereg zadany przez ciąg b_n jest zbieżny, granica ilorazu istnieje i jest skończona, zatem na mocy drugiego kryterium porównawczego szereg jest zbieżny. ♣

Do klasycznego podstawowego zestawu kryteriów wypada dołączyć jeszcze kryterium Cauchy'ego i kryterium d'Alemberta. Oto pierwsze z nich:

Twierdzenie 6 (Kryterium Cauchy'ego)**.** *Niech a_n będzie ciągiem o wyrazach dodatnich. Oznaczmy*

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n},$$

jeśli granica istnieje. Gdy $\alpha < 1$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jeśli $\alpha > 1$ szereg jest rozbieżny, natomiast jeśli $n = 1$ kryterium nie daje odpowiedzi.

Dowód: Uzasadnienie powyższego twierdzenia jest dość łatwe, ale pouczające, dlatego przytoczymy je tutaj. Zajmijmy się najpierw przypadkiem, gdy $\alpha < 1$. Z definicji granicy dla ciągu $(\sqrt[n]{a_n})$ wynika, że istnieje liczba β taka, że

$$\alpha < \beta < 1$$

spełniająca dodatkowo warunek

$$\sqrt[n]{a_n} < \beta$$

dla prawie wszystkich n. Istotnie, jeśli α jest granicą $(\sqrt[n]{a_n})$, to znaczy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje N takie, że dla $n > N$

$$|\sqrt[n]{a_n} - \alpha| < \varepsilon.$$

Weźmy dowolną liczbę β spełniającą $\alpha < \beta < 1$ i wybierzmy $\varepsilon = \beta - \alpha$. Wyznaczmy dla niego odpowiednie N. Mamy zatem:

$$|\sqrt[n]{a_n} - \alpha| < \beta - \alpha.$$

Inaczej mówiąc dla wszystkich n poza początkowymi wyrazy ciągu $\sqrt[n]{a_n}$ są oddalone od α nie więcej niż odległość od α do β. Wszystkie te wyrazy są więc mniejsze od β:

$$\forall n > N \quad \sqrt[n]{a_n} < \beta.$$

Podnoszenie do n-tej potęgi zachowuje nierówność (obie stony są dodatnie), zatem

$$a_n < \beta^n.$$

Na mocy pierwszego kryterium porównawczego z szeregiem geometrycznym o ilorazie $\beta < 1$ wnioskujemy że $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Gdy $\alpha > 1$ to oznacza, że nieskończenie wiele wyrazów ciągu $(\sqrt[n]{a_n})$ jest większych od 1, a to także znaczy, że nieskończenie wiele wyrazów ciągu (a_n) jest większych od 1. Nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregów.

Gdy $\alpha = 1$ kryterium nie daje odpowiedzi. Wystarczy spojrzeć na dwa przykłady: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ i $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Pierwszy jest rozbieżny a drugi zbieżny i w obu przypadkach

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}.$$

□

Kryterium Cauchy'ego sprowadza się więc do pierwszego kryterium porównawczego. Dobór szeregu do porównania jest jednak dość szczególny, wygodnie jest więc mieć sformułowane kryterium, a nie za każdym razem konstruować stosowny szereg geometryczny od nowa.

Przykład 2. Kryterium Cauchy'ego zastosujemy do paskudnie wyglądającego szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Wyraz ogólny nie wygląda zachęcająco, ale próbujemy pozbyć się n-tych potęg wyznaczając $\sqrt[n]{a_n}$:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^{n+1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2}}}} = \frac{\sqrt[n]{n^{n+1}}}{\sqrt[n]{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2}}}} = \frac{n^{\frac{n+1}{n}}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2n}}} =$$

$$\frac{n^{(1+\frac{1}{n})}}{(2n^2+n+1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}} = \frac{n\sqrt[n]{n}\,\sqrt[2n]{2n^2+n+1}}{\sqrt{2n^2+n+1}}$$

Przegrupowując nieco czynniki otrzymujemy

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{\sqrt{2n^2+n+1}}\sqrt[n]{n}\,\sqrt[2n]{2n^2+n+1}.$$

Wiadomo, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \text{podobnie} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2n^2+n+1} = 1.$$

Pozostały ułamek ma granicę $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ostatecznie więc

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

i na mocy kryterium Cauchy'ego badany przez nas szereg jest zbieżny. ♣

Ostatnim z klasycznych kryteriów zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich jest kryterium d'Alemberta. Przebieg dowodu wskazuje, że także to kryterium opiera się na porównaniu badanego szeregu z odpowiednio dobranym szeregiem geometrycznym. Tym razem jednak nie będziemy przytaczać dowodu:

Twierdzenie 7 (Kryterium d'Alemberta)**.** *Niech a_n będzie ciągiem o wyrazach dodatnich. Oznaczmy*

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

jeśli granica istnieje. Gdy $\alpha < 1$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jeśli $\alpha > 1$ szereg jest rozbieżny, natomiast jeśli $n = 1$ kryterium nie daje odpowiedzi.

Przykład 3. Kryterium d'Alemberta dobrze pasuje do szeregów z wyrazami zawierającymi silnię. Rozważmy na przykład

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{3n}{n} 7^{-n}.$$

Wyznaczamy odpowiedni iloraz:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\binom{3n+3}{n+1} 7^{-(n+1)}}{\binom{3n}{n} 7^{-n}} = \frac{\frac{(3n+3)!}{(n+1)!(2n+2)!} 7^{-n} 7^{-1}}{\frac{(3n)!}{n!(2n)!} 7^{-n}} =$$

$$\frac{(3n+3)!}{(3n!)} \frac{(2n!)}{(2n+2)!} \frac{n}{(n+1)!} 7^{-1} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(2n+2)(2n+1)} 7^{-1}$$

i jego granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(2n+2)(2n+1)} 7^{-1} = \frac{27}{28} < 1$$

Na mocy kryterium d'Alemberta badany szereg jest zbieżny. ♣

Do tej pory badaliśmy niemal wyłącznie szeregi o wyrazach dodatnich. Całkiem ogólny był tylko warunek konieczny zbieżności szeregów. Jest jednak całe mnóstwo szeregów, których wyrazy nie są jednego znaku (wszystkie dodatnie, albo wszystkie ujemne). Zauważmy jednak, że inaczej traktować trzeba tylko te szeregi, których nieskończenie wiele wyrazów jest dodatnich i jednocześnie nieskończenie wiele jest ujemnych. Jeśli tylko skończona liczba wyrazów ma inny znak niż pozostałe nie wpływa to na sposób badania zbieżności tego szeregu i na wynik tego badania (choć oczywiście ma znaczenie dla wartości sumy).

Przykład 4. Standardowym przykładem szeregu mającego wyrazy różnych znaków jest szereg anharmoniczny:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

Niech (A_n) będzie ciągiem sum częściowych tego szeregu. Rozważmy dwa podciągi - parzysty (A_{2n}) i nieparzysty (A_{2n+1}). Najpierw przyglądamy się ciągowi parzystemu (grupujemy wyrazy):

$$A_{2n} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\cdots+\frac{1}{2n(2n-1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k(2k-1)}.$$

Wyrazy ciągu A_{2n} są sumami częściowymi pewnego szeregu o wyrazach dodatnich. W szczególnoći oznacza to, że ciąg (A_{2n}) jest rosnący. Teraz badamy podciąg wyrazów nieparzystych (także grupujemy wyrazy):

$$A_{2n+1} = 1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)=$$
$$1-\frac{1}{6}-\frac{1}{20}-\frac{1}{42}-\cdots-\frac{1}{2n(2n+1)}=1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k(2k+1)}$$

Ciąg wyrazów nieparzystych (A_{2n+1}) jest malejący. Różnica między odpowiednimi wyrazami podciągów parzystego i nieparzystego jest następująca:

$$A_{2n+1}-A_{2n}=\frac{1}{2n+1}.$$

Z powyższej równości wyciągamy dwa wnioski: Po pierwsze

$$A_{2n+1}-A_{2n}\geqslant 0 \quad \text{czyli} \quad A_{2n+1}\geqslant A_{2n}.$$

Nieparzysty ciąg maleje a parzysty rośnie. Pierwszy wyraz nieparzystego jest więc ograniczeniem górnym dla całego ciągu parzystego a pierwszy wyraz parzystego ograniczeniem dolnym dla całego ciągu nieparzytego. Wynika z tego, że oba ciągi są monotoniczne i ograniczone, a więc zbieżne. Ponadto różnica między odpowiednimi wyrazami (A_{2n}) i (A_{2n+1}) dąży do zera, zatem granica obu podciągów jest jednakowa. Ciągi parzysty i nieparzysty wspólnie wyczerpują cały ciąg (A_n), zatem (A_n) też jest zbieżny do wspólnej granicy podciągów. W ten sposób pokazaliśmy, że szereg anharmoniczny jest zbieżny. Z teorii szeregów potęgowych dowiedzieć się można, że suma tego szeregu jest równa $\log 2$. ♣

Sposób w jaki dowodziliśmy zbieżności szeregu anharmonicznego można zastosować do dowolnego szeregu naprzemiennego postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$$

który powstał z dodatniego ciągu (a_n) monotonicznego (malejącego) z granicą równą zero. Twierdzenie dotyczące takich ciągów znane jest jako *kryterium Leibniza*:

Twierdzenie 8 (Kryterium Leibniza)**.** *Jeśli* (a_n) *jest dodatnim ciągiem malejącym i* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *jest zbieżny.*

Przykład 5. Powyższe twierdzenie możemy zastosować do szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n^2\pi}{n+1}\right),$$

najpierw jednak musimy pokazać, że jest to szereg naprzemienny. Zajmijmy się funkcją pod sinusem

$$\frac{n^2\pi}{n+1} = \frac{n(n+1)-n}{n+1}\pi = \frac{n(n+1)-(n+1)+1}{n+1}\pi = (n-1)\pi + \frac{1}{n+1}\pi.$$

Aplikujemy sinus do wyniku i korzystamy ze wzoru na sinus sumy kątów:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin\left((n-1)\pi + \frac{1}{n+1}\pi\right) = \sin((n-1)\pi)\cos\left(\frac{1}{n+1}\pi\right) + \cos((n-1)\pi)\sin\left(\frac{1}{n+1}\pi\right) = 0 + (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n+1}\pi\right)$$

Dla wszystkich $n > 1$ wartość $\frac{1}{n+1}\pi$ mieści się w przedziale $]0, \frac{\pi}{2}[$ a zatem tam, gdzie sinus jest funkcją rosnącą. Ciąg

$$n \mapsto \sin\left(\frac{1}{n+1}\pi\right)$$

jest więc malejący, podobnie jak ciąg

$$n \mapsto \frac{1}{n+1}\pi.$$

Z ciągłości funkcji sinus wynika za to, że

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n+1}\pi\right) = 0$$

Ciąg wyrazów badanego przez nas szeregu spełnia więc założenia kryterium Leibniza. ♣

Szereg anharmoniczny jest także przykładem szeregu, który nazywamy zbieżnym warunkowo. Zbieżność warunkową przeciwstawiamy zbieżności bezwzględnej. Oto stosowne definicje:

Definicja 1. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy *zbieżnym bezwzględnie* jeśli zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, ale $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest rozbieżny, to szereg nazywamy *zbieżnym warunkowo.*

Korzystając z warunku Cauchy'ego zbieżności ciągów łatwo jest pokazać, że *szereg zbieżny bezwzględnie jest także zbieżny*. Istotnie: Jeśli szereg jest zbieżny bezwzględnie, to znaczy, że ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest ciągiem Cauchye'go. Biorąc więc wystarczająco duże m, n możemy zapewnić, że

$$\left|\sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=1}^{m} |a_k|\right| \leqslant \varepsilon$$

dla każdego wybranego wcześniej $\varepsilon > 0$. Różnica sum częściowych to suma pewnej liczby odpowiednio dalekich wyrazów:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=1}^{m} |a_k| = \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \geqslant 0,$$

gdy na przykład $n > m$. Wiadomo jednak, że wartość bezwzględna liczby rzeczywistej ma własność „wartość bezwzględna sumy jest mniejsza niż suma wartości bezwzględnych” możemy więc napisać prawdziwą nierówność:

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leqslant \varepsilon.$$

Okazuje się więc, że ciąg sum częściowych szeregu bez wartości bezwzględnych też jest ciągiem Cauchy'ego, a zatem także ciągiem zbieżnym.

Szeregi zbieżne warunkowo mają jedną zaskakującą własność, którą wyraża twierdzenie Riemanna:

Twierdzenie 9 (Riemann)**.** *Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny warunkowo, to dla każdej liczby $s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ istnieje bijekcja $\sigma_s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taka, że*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_s(n)} = s.$$

Zupełnie inaczej rzecz się ma z szeregami zbieżnymi bezwzględnie:

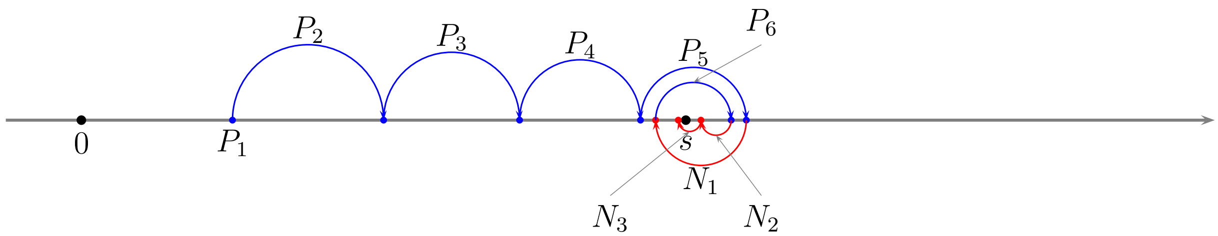
Twierdzenie 10. *Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie i jego suma jest równa s, to dla każdej bijekcji $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zachodzi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = s.$$

Nie będziemy prowadzić szczegółowego dowodu powyższych twierdzeń. Przedstawimy jedynie szkic dowodu twierdzenia Riemanna i wskażemy w którym punkcie sytuacja szeregów zbieżnych bezwzględnie różni się od szeregów zbieżnych warunkowo.

Szkic dowodu tw. Riemanna. Zauważmy, że szereg, który jest zbieżny warunkowo, a nie bezwzględnie musi mieć nieskończenie wiele wyrazów dodatnich i nieskończenie wiele ujemnych. Gdyby któryś ze zbiorów był skończony szereg musiałby być albo w ogóle rozbieżny, albo zbieżny bezwzględnie. Niech $N = \{a_n : \ a_n < 0\}$ i $P = \{a_n : \ a_n > 0\}$. Dodatkowo wiadomo, że szereg utworzony z wyrazów ze zbioru P jest rozbieżny, podobnie szereg utworzony z wyrazów ze zbioru N. Oba szeregi są szeregami wyrazów stałego znaku. W tym punkcie sytuacja szeregów zbieżnych warunkowo różni się od szeregów zbieżnych bezwzględnie. W przypadku szeregów zbieżnych bezwzględnie obie sumy są skończone. Wiemy ponadto, że nasz wyjściowy szereg spełnia warunek konieczny zbieżności szeregów. Jeśli więc uporządkujemy wyrazy ze zbioru P w kolejności malejącej a wyrazy ze zbioru N w kolejności rosnącej otrzymamy dwa ciągi (P_k) i (N_k), pierwszy malejący drugi rosnący, oba zbieżne do zera. Ustalmy teraz liczbę rzeczywistą s. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że jest ona dodatnia. Konstruujemy szereg zbieżny do s według następującego algorytmu: **(1)** dodajemy tyle kolejnych wyrazów ciągu P_k (zaczynając od pierwszego) aby przekroczyć s, **(2)** do poprzedniej sumy dodajemy tyle kolejnych (ujemnych) wyrazów ciągu (N_k) zaczynając od pierwszego aby suma była mniejsza od s, **(3)** do uzyskanego wyniku dodajemy tyle wyrazów ciągu (P_k) zaczynając w miejscu w którym skończyliśmy krok

(1), **(4)** w kroku czwartym znowu korzystamy z wyrazów ujemnych aż suma będzie mniejsza niż s, dalej powtarzamy kroki (3) i (4).



Zauważmy, że po każdych dwóch krokach znajdujemy się bliżej liczby s, ponieważ ciągi (P_k) i (N_k) są zbieżne do zera i monotoniczne. Gwarantuje to, że otrzymany szereg jest istotnie zbieżny do s. Przyporządkowanie starym numerom wyrazów ciągu ich nowego położenia jest szukaną bijekcją. Jeśli wyjściowa liczba s jest ujemna zacząć należy od ciągu (N_k). Sądzę, że potrafią państwo samodzielnie wymyśleć algorytm budowania szeregów rozbieżnych do $+\infty$ i do $-\infty$.

Wróćmy na jakiś czas do problemu badania zbieżności szeregów o wyrazach dowolnych. Jak na razie znamy tylko jedno kryterium dotyczące szeregów naprzemiennych, mianowicie kryterium Leibniza. Jego uogólnieniem jest następujące

Twierdzenie 11 (Kryterium Dirichleta)**.** *Niech $c_n = a_n b_n$ gdzie ciąg (a_n) jest dodatni, monotonicznie malejący i $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ natomiast ciąg (b_n) jest taki, że ciąg sum częściowych*

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

jest ograniczony, wtedy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

jest zbieżny.

Kryterium Leibniza uzyskujemy z powyższego biorąc $b_n = (-1)^n$. Wzmacniając nieco założenie dotyczące ciągu (b_n) a osłabiając to dotyczące (a_n) otrzymujemy kolejne

Twierdzenie 12 (Kryterium Abela)**.** *Niech $c_n = a_n b_n$ gdzie ciąg (a_n) jest monotoniczny i ograniczony natomiast ciąg (b_n) jest taki, że szereg*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

jest zbieżny, wówczas także szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

jest zbieżny.

Przykład 6. Zastosujmy kryterium Dirichleta do szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2n - \cos n}.$$

Oznaczamy

$$c_n = \frac{\sin n}{2n - \cos n}, \qquad a_n = \frac{1}{2n - \cos n}, \qquad b_n = \sin n$$

i sprawdzamy założenia twierdzenia. Ciąg (a_n) ma bez wątpienia wyrazy dodatnie. Badamy monotoniczność:

$$[2(n+1)-\cos(n+1)]-[2n-\cos(n)] = 2+\cos(n)-\cos(n+1).$$

Ponieważ $\cos(n) > -1$ i $\cos(n+1) < 1$ to

$$2+\cos(n)-\cos(n+1) > 0$$

i dalej

$$2(n+1)-\cos(n+1) > 2n-\cos(n), \qquad \frac{1}{2(n+1)-\cos(n+1)} < \frac{1}{2n-\cos(n)}.$$

Ciąg a_n jest więc monotonicznie malejący. Ponieważ cos jest funkcją ograniczoną to

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-\cos n} = 0.$$

Założenie dotyczące ciągu (a_n) jest spełnione. Kolej na ciąg (b_n):

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} \sin k$$

Sumę B_n można policzyć korzystając z rachunków na liczbach zespolonych.

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k = Im\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik}\right).$$

Suma $\sum_{k=1}^{n} e^{ik}$ jest sumą skończonego szeregu geometrycznego. Korzystamy, jak zwykle, ze wzoru (2):

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ik} = \sum_{k=0}^{n} e^{ik} - 1 = \frac{1-e^{i(n+1)}}{1-e^{i}} - 1 = \frac{e^{i(n+1)/2}\left(e^{-i(n+1)/2}-e^{i(n+1)/2}\right)}{e^{i\frac{1}{2}}\left(e^{-i\frac{1}{2}}-e^{i\frac{1}{2}}\right)} - 1 =$$
$$\frac{e^{i(n+1)/2}}{e^{i\frac{1}{2}}}\frac{\sin((n+1)/2)}{\sin(1/2)} - 1 = e^{in/2}\frac{\sin((n+1)/2)}{\sin(1/2)} - 1$$

B_n jest równe części urojonej powyższej sumy:

$$B_n = \frac{\sin(n/2)\sin((n+1)/2)}{\sin(1/2)}$$

Z własności funkcji sinus otrzymujemy

$$-\frac{1}{\sin(1/2)} \leqslant B_n \leqslant \frac{1}{\sin(1/2)}.$$

Założenie dotyczące ciągu (b_n) także jest spełnione. ♣

Do rozważenia pozostał nam jeszcze problem mnożenia szeregów. O ile dodawanie szeregów i mnożenie szeregu przez liczbę to operacje proste do zdefiniowania i zbadania, o tyle mnożenie szeregów przez siebie nastręcza pewne kłopoty. Można myśleć na trzy (co najmniej) sposoby:

(1) Mnożymy wyrazy szeregów, tzn. z szeregów o wyrazach (a_n) i (b_n) tworzymy szereg o wyrazach $c_n = a_n b_n$. Jest to sposób mało sensony, a w każdym razie takiej operacji nie nazywałabym raczej „mnożeniem szeregów”. W szczególności suma takiego iloczynu ma niewielki związek z iloczynem sum szeregów, które wchodzą jako czynniki.

(2) Patrzymy na szeregi jako na ciągi sum częściowych i mnożymy sumy częściowe tak jak mnożymy ciągi:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_n, \qquad B_n = \sum_{k=1}^{n} a_n, \qquad C_n = A_n B_n.$$

W takiej sytuacji

$$\begin{aligned}
&C_1 = A_1B_1 = a_1b_1\\
&C_2 = A_2B_2 = a_1b_1 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_2b_2\\
&C_3 = A_3B_3 = a_1b_1 + a_2b_1 + a_3b_1 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_3b_2 + a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3\\
&\vdots\\
&C_n = A_nB_n = \textstyle\sum_{i,j=1}^{n} a_ib_j
\end{aligned}$$

zatem wyrazy szeregu wyglądają następująco

$$\begin{aligned}
&c_1 = a_1b_1\\
&c_2 = a_2b_1 + a_1b_2 + a_2b_2\\
&c_3 = a_3b_1 + a_3b_2 + a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3\\
&\vdots\\
&C_n = A_nB_n = a_n \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k + b_n \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_nb_n
\end{aligned}$$

Teraz mamy pewność, że jeśli szeregi-czynniki są zbieżne to iloczyn też jest zbieżny (stosowne twierdzenia dla ciągów) do iloczynu sum czynników. Wydawałoby się, że sytuacja jest idealna, tym niemniej jest jeszcze jedna ważna koncepcja mnożenia szeregów:

(3) **Iloczyn Cauchy'ego**, który pochodzi od problemów związanych z szeregami potęgowymi. Załóżmy, że szeregi, które mnożymy mają szczególną postać:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} g_n x^n$$

gdzie (f_n) i (g_n) są pewnymi ciągami, a x jest zmienną (możemy myśleć, że rzeczywistą). Innymi słowy $a_n = f_n x^n$, $b_n = g_n x^n$. Mnożymy teraz (formalnie) nieskończone sumy grupując wyrazy przy kolejnych potęgach x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} g_n x^n = (f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \ldots)(g_1x + g_2x^2 + g_3x^3 + \ldots) =$$
$$(f_1g_1)x^2 + (f_1g_2 + f_2g_1)x^3 + (f_1g_3 + f_2g_2 + f_3g_1)x^4 + \ldots =$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} f_k g_{n-k} \right) x^n.$$

Patrząc na te formalne rachunki definiujemy

Definicja 2 (Iloczyn Cauchy'ego)**.** *Iloczynem Cauchy'ego szeregów* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *nazywamy szereg, którego wyraz ogólny ma postać*

$$c_1 = 0, \quad c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} \text{ dla } n > 1.$$

Pozostaje oczywiście otwarty problem zbieżności tego szeregu i związek tej zbieżności ze zbieżnością szeregów-czynników.

Zauważmy, że sumy nieskończona rozważana w (2) i w (3) mają ostatecznie takie same zbiory wyrazów, tzn są to sumy jednomianów postaci $a_k b_l$. Różnią się jednak one istotnie kolejnością dodawania, co ma znaczenie dla szeregów zbieżnych warunkowo. Nikogo więc nie zdziwi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 13. *Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny do sumy A, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny do sumy B to ich iloczyn Cauchy'ego jest zbieżny do sumy AB.*

Mamy dodatkowo także twierdzenie

Twierdzenie 14. *Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny do A, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny do B oraz ponadto ich iloczyn Cauchy'ego jest zbieżny do C, to $C = AB$.*

Jeśli oba szeregi są zbieżne jedynie warunkowo mogą powstawać problemy, co pokazuje następujący przykład:

Przykład 7. Niech $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n+1)}}$. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny warunkowo (kryterium Leibniza). Policzmy iloczyn w sensie Cauchy'ego

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Sumujemy od 0, dla uproszczenia wzoru na wyraz ogólny iloczynu, który ma postać

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

Przyjrzyjmy się pierwszym kilku wyrazom:

$$\begin{aligned}
&c_0 = 1\\
&c_1 = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \approx -1,41\\
&c_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{3}} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1,65\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Zatem, przynajmniej początkowo, wartości bezwzględne wyrazów szeregu nie maleją. Zbadajmy dokładniej wyraz ogólny:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{(k+1)}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{(n-k+1)}} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}.$$

Szacujemy $\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$:

$$(k+1)(n-k+1) = \left((\frac{n}{2}+1) - (\frac{n}{2}-k)\right) \left((\frac{n}{2}+1) + (\frac{n}{2}-k)\right) =$$

$$(\frac{n}{2}+1)^2 - (\frac{n}{2}-k)^2 \leqslant (\frac{n}{2}+1)^2,$$

zatem

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{(\frac{n}{2}+1)^2}} = \frac{1}{(\frac{n}{2}+1)}.$$

Wartość bezwzględna wyrazu ogólnego c_n jest zatem oszacowana z dołu poprzez

$$|c_n| \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(\frac{n}{2}+1)} = \frac{(n+1)}{(\frac{n}{2}+1)}.$$

Wiadomo, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{(\frac{n}{2}+1)} = 2 \neq 0.$$

Wyraz ogólny nie może więc być zbieżny do zera. Szereg będący iloczynem Cauchy'ego szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ przez siebie nie spełnia warunku koniecznego, a to znaczy, że jest rozbieżny. ♣

Przy rozważaniach dotyczących iloczynu szeregów pojawiły się wyrażenia postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Wygląda to całkiem jak szereg, ale wyraz ogólny nie jest liczbą, a funkcją jednej zmiennej. O x będziemy myśleć na razie, że jest to zmienna rzeczywista. Po podstawieniu pod x konkretnej wartości dostajemy „zwykły” szereg liczbowy. Zależność od x jest też szczególnego typu: taki szereg nazywamy *szeregiem potęgowym*. Jest to szczególny przykład szeregu funkcyjnego, czyli takiego, którego wyraz ogólny jest pewną funkcją zmiennej: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Podobnie jak w przypadku szeregów liczbowych, szereg funkcyjny to tak naprawdę ciąg sum częściowych tego szeregu:

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Własności tego ciągu mogą być różne dla różnych x: dla pewnych wartości zmiennej ciąg sum częściowych może być zbieżny, a dla innych nie. Zbiór tych x dla których szereg funkcyjny jest zbieżny nazywamy zazwyczaj *obszarem zbieżności* szeregu. Każdej wartości x z obszaru zmienności możemy przyporządkować wartość sumy szeregu obliczoną w tym punkcie. Otrzymujemy w ten sposób funkcję określoną na obszarze zbieżności, którą nazywamy *sumą szeregu funkcyjnego*. Pisząc

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

rozumiemy, że mamy do czynienia z taką właśnie sytuacją. Badanie zbieżności szeregów funkcyjnych w powyższym sensie nie różni się zasadniczo od badania zbieżności szeregów liczbowych. Po prostu, punkt po punkcie, sprawdzamy, czy suma istnieje i budujemy funkcję F. Mówimy wtedy, że badamy *zbieżność punktową* szeregu. Często jednak interesuje nas nie tylko samo istnienie sumy szeregu, ale także własności tej sumy jako funkcji zmiennej x. Na przykład ciągłość czy różniczkowalność. Okazuje się, że w ogólności sprawa jest skomplikowana.

Przykład 8. Rozważmy szereg funkcyjny

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \quad \text{gdzie} \quad u_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}.$$

Oto kilka kolejnych sum częściowych:

$$U_0(x) = x^2,$$

$$U_1(x) = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} = x^2\left(1 + \frac{1}{(1+x^2)}\right) = x^2\left(\frac{x^2+2}{(1+x^2)}\right),$$

$$U_2(x) = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} = x^2\left(\frac{x^4+3x^2+3}{(1+x^2)^2}\right),$$

$$\vdots$$

W tym przypadku można względnie łatwo policzyć ogólną postać sumy częściowej:

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^2}{(1+x^2)^k} = x^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(1+x^2)^k} = x^2 \frac{1 - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = (1+x^2)\left(1 - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\right).$$

Jeśli więc tylko $x \neq 0$ mamy

$$U(x) = \lim_{n\to\infty} U_n(x) = \lim_{n\to\infty} (1+x^2)\left(1 - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\right) = 1 + x^2.$$

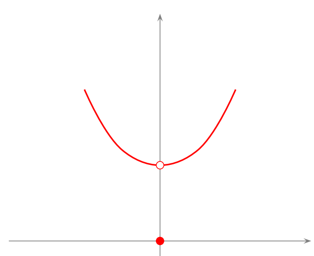
Jednak dla $x = 0$

$$U_n(0) = 0, \quad \text{zatem} \quad U(0) = \lim_{n\to\infty} U_n(0) = 0.$$

Ostatecznie funkcja U ma postać

$$U(x) = \begin{cases} (1+x^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

i wykres

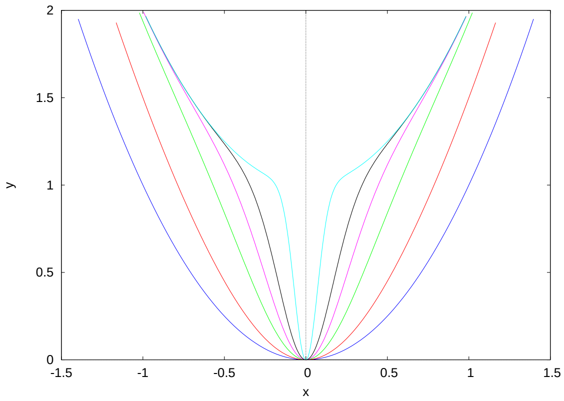


Każda z funkcji u_n a także każda z sum częściowych U_n jest funkcją ciągłą. Jednak nieskończona suma jest funkcją nieciągłą. To pokazuje, że w ogólności nie wolno nam zamieniać kolejności granic:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty} U_n(x) = 1 \neq 0 = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 0} U_n(x)$$

i nie wolno wnioskować o ciągłości funkcji granicznej na podstawie ciągłości wyrazów.

Zobaczmy jeszcze jak wyglądają sumy częściowe:



♣

Następny przykład dotyczy różniczkowalności. Jest to przykład z dziedziny ciągów funkcyjnych, nie szeregów.

Przykład 9. Niech

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$$

będzie ciągiem funkcyjnym. Funkcja sinus jest ograniczona, zatem

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx) = 0.$$

Granicą ciągu funkcyjnego (f_n) jest więc funkcja stała (w szczególności różniczkowalna). Popatrzmy teraz na ciąg pochodnych:

$$f_n'(x) = \sqrt{n} \cos(nx).$$

Powyższy ciąg nie ma granicy dla większości wartości x, dla niektórych x jego granicą jest ∞. Ciąg pochodnych jest więc w ogóle niezbieżny, w szczególności nie jest zbieżny do pochodnej granicy ciągu (f_n). ♣

W obliczu powyższych przykładów szeregi potęgowe okazują się być naprawdę wyjątkowe. Zacznijmy od bezwzględnej zbieżności punktowej. Rozpatrujemy więc

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \text{a raczej} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|,$$

dla każdego x z osobna. Doświadczenie nabyte przy szeregach liczbowych wskazuje, że pomocne może być kryterium Cauchy'ego:

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}|x|$$

Załóżmy, że istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = A,$$

wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|x| = A|x|.$$

Według kryterium Cauchy'ego, gdy $A|x| < 1$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ jest zbieżny, gdy $A|x| = 1$ nie wiadomo, a gdy $A|x| > 1$ szereg jest rozbieżny. Warunek $A|x| < 1$ można zapisać

$$|x| < \frac{1}{A}.$$

Liczbę $R = \frac{1}{A}$ nazywamy *promieniem zbieżności szeregu*. Kryterium Cauchy'ego mówi nam, że dla x spełniających warunek $|x| < R$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny bezwzględnie. Dla $|x| > R$ bez wątpienia nie jest zbieżny, nawet warunkowo, gdyż nie spełnia warunku koniecznego zbieżności. Na granicy, czyli dla $x = R$ lub $x = -R$ bywa różnie.

Jest pewien problem z poprawnym sformułowaniem definicji promienia zbieżności. Weźmy na przykład szereg definiujący funkcję $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}. \tag{4}$$

Szereg ten zawiera jedynie parzyste potęgi x, to znaczy, że odpowiedni ciąg współczynnków jest postaci: $a_{2k} = 1$, $a_{2k+1} = 0$. Zatem granica ciągu $(\sqrt[n]{a_n})$ nie istnieje: ciąg ten zawiera dwa podciągi z różnymi granicami. Jest jednak jasne, że w tym przypadku $R = 1$. Okazuje się, że przy dowodzeniu kryterium Cauchy'ego wymaganie istnienia granicy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ mniejszej od 1 jest zbyt mocne. Wystarczy, aby prawie wszystkie wyrazy ciągu $(\sqrt[n]{|a_n|})$ były ograniczone z góry przez liczbę mniejszą od 1. Zazwyczaj formułuje się to używając pojęcia tzw *granicy górnej* (lim sup) ciągu. Granica górna jest to, najkrócej mówiąc, kres górny zbioru punktów skupienia ciągu. Pojęcie nie jest proste, dlatego nie wchodzi w zakres programu nauczania naszego przedmiotu. Ciąg współczynników szeregu potęgowego (4) ma dwa podciągi zbieżne do różnych granic 0 i 1. Podobnie ciąg $(\sqrt[n]{|a_n|})$. Zbiór punktów skupienia tego ciągu to $\{0, 1\}$, a więc jego kres górny $\frac{1}{R} = 1$. Zapiszmy formalną definicję:

Definicja 3. Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ będzie szeregiem potęgowym. Niech także

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Liczbę R nazywamy *promieniem zbieżności* szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Jeśli

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$$

promień zbieżności jest nieskończony.

A teraz stosowne twierdzenie, które pokazuje jak wyjątkowe są szeregi potęgowe:

Twierdzenie 15. *Niech R będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Szereg ten jest bezwzględnie zbieżny dla $x \in]-R, R[$. Ponadto funkcja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ będąca sumą tego szeregu jest ciągła i różniczkowalna w $x \in]-R, R[$. Zachodzi także równość*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

a powyższy szereg ma promień zbieżności równy R

Na mocy powyższego twierdzenia szeregi potęgowe definiują funkcje, które są ciągłe i różniczkowalne. Skoro pochodna jest też zadana szeregiem o tym samym promieniu zbieżności, to znaczy że pochodna także jest (w tym samym obszarze) ciągła i różniczkowalna. Indukcyjnie okazuje się, że funkcja zadana szeregiem potęgowym jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna (inaczej gładka). Powyższe twierdzenie daje szerokie możliwości sumowania rozmaitych szeregów potęgowych (zakładając, że w głowie mamy bazę danych szeregów opisujących znane funkcje elementarne). Szeregi te otrzymuje się np. stosując rozwinięcie Taylora i badając promień zbieżności otrzymanego szeregu. Obowiązuje Państwa następująca wiedza:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad R = \infty,$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad R = \infty,$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad R = \infty,$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad R = 1.$$

Przykład 10. Obliczmy sumę szeregu potęgowego

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Zacznijmy od promienia zbieżności:

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow 1.$$

Otrzymaliśmy $R = 1$. Łatwiej będzie dać sobie radę z pochodną:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Funkcja f ma więc pochodną

$$f'(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Szukamy funkcji pierwotnej

$$\int \frac{1}{1-x} \mathsf{d}x = -\log(1-x) + C$$

Stałą całkowania wyznaczamy z warunku $f(0) = 0$:

$$0 = -\log(1-0) + C = C.$$

Ostatecznie

$$f(x) = -\log(1-x).$$

Do tabelki znanych rozwinięć funkcji elementarnych należy dołączyć szereg, który łatwo otrzymać z powyższego zamieniając x na $-x$ i porządkując znaki:

(5) $$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \qquad R = 1.$$

♣

Powyższy szereg jest zbieżny dla $x \in]-1,1[$. Byłoby jednak fajnie, gdybyśmy do wzoru (5) mogli podstawić także wartość $x = 1$ na granicy obszaru zbieżności. Po prawej stronie otrzymujemy wtedy szereg anharmoniczny, co do którego wiadomo, że jest zbieżny warunkowo. Jego sumy jednak jeszcze nie obliczyliśmy. Dotychczasowe twierdzenia nie pozwalają jednak użyć wzoru (5) do stwierdzenia, że suma szeregu anharmonicznego jest równa $\log 2$ (a jest!). W tej sytuacji zastosować należy raczej następujący wniosek z twierdzenia Abela (pełnego twierdzenia nie przytaczamy, gdyż dotyczy szeregów zespolonych i jest zbyt ogólne jak na nasze potrzeby):

Twierdzenie 16 (Abel)**.** *Jeżeli szereg potęgowy jest zbieżny w punkcie będącym brzegiem obszaru zbieżności, tzn dla $x = R$ (lub $x = -R$), to funkcja zdefiniowana tym szeregiem jest ciągła prawostronie w punkcie $x = R$ (lub lewostonnie w punkcie $x = -R$).*

Korzystając z powyższego twierdzenia możemy wstawić $x = 1$ do wzoru (5) i uzyskać wymarzoną równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2.$$