Tydzień nr 11 (30 maja - 5 czerwca), Całka wielu zmiennych - Matematyka II 2010/2011L

Wszelkie pytania oraz uwagi o błędach proszę kierować na przemek.majewski@gmail.com lub do pozostałych prowadzących, info na http://www.fuw.edu.pl/~pmaj/.

Zadania przypominające

Zadanie 1. Obliczyć całkę

$$\iint_P \frac{\mathrm{d}s}{(x+y)^2},$$

dla $P = [3,4] \times [1,2]$.

Zadanie 2. Obliczyć całkę

$$\iint_P \frac{y\mathrm{d}s}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

dla $P = [0,1] \times [0,1]$. W jakiej kolejności całkować?

Zadanie 3. Obliczyć całkę

$$\iint_O (x^2+y)\mathrm{d}s,$$

gdzie O jest obszarem ograniczonym dwiema parabolami: $y = x^2$ oraz $y^2 = x$.

Zadanie 4. Znaleźć pole elektryczne od nieskończonej, jednorodnie naładowanej płaszczyzny.

Zadanie 5. Znaleźć pole grawitacyjne na zewnątrz i wewnątrz jednorodnej bryły powstałej z wydrążenia kuli o promieniu R współśrodkową do niej kulą o promieniu r.

Zadanie 6. Dla bryły sztywnej udowodnić twierdzenie Steinera – moment bezwładności względem osi równoległej do osi przechodzącej przez środek masy i odległej od niej o d wynosi $I_d = I_0 + md^2$.

Zadanie 7. Znaleźć środek masy jednorodnej półkuli.

Zadanie 8. Znaleźć tensory momentu bezwładności jednorodnej: sfery, kuli oraz stożka.

Zadanie 9. Obliczyć całkę

$$\iiint_V \frac{\mathrm{d}V}{(1+x+y+z)^{\frac{3}{2}}},$$

gdzie V jest bryłą ograniczoną płaszczyznami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ oraz $x + y + z = 1$.

Zadania uzupełniające

$\heartsuit$**Zadanie 10.** Znaleźć masę i środek ciężkości kuli $\mathcal{K} = \{(x, y, z);\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2az\}$, jeżeli rozkład gęstości dany jest funkcją $\rho(x, y, z) = \frac{k^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

$\star$**Zadanie 11.** *(hipocykloida)* Hipocykloida to krzywa jaką zatacza punkt okręgu o promieniu r poruszającego się bez poślizgu wewnątrz okręgu o promieniu R. W ogólności hipocykloidę można wyrazić parametrycznie jako

$$\begin{aligned} x(t) &= (R-r)\cos t + r\cos\left(\tfrac{R-r}{r}\,t\right) \\ y(t) &= (R-r)\sin t - r\sin\left(\tfrac{R-r}{r}\,t\right). \end{aligned}$$

Zamknięte są krzywe o wymiernym stosunku promieni. Szczególnym przypadkiem jest *asteroida* gdy $R = 4r$. Sprawdzić, że punkty asteroidy spełniają równanie

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Znaleźć związek między a oraz r. Obliczyć pole ograniczone asteroidą o parametrze a.

$\star$**Zadanie 12.** *(bryła Vivianiego)* Bryła Vivianiego powstaje z przecięcia kuli o promieniu r walcem o promieniu $\frac{r}{2}$ odległym od środka sfery o $\frac{r}{2}$,

$$\mathcal{V} = \{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant r^2\} \cap \{x^2 + y^2 \leqslant rx\}.$$

Obliczyć objętość tej bryły.

$\star\star$**Zadanie 13.** Dwa identyczne, nieskończone walce przecinają się pod kątem ostrym φ. Obliczyć objętość ich części wspólnej.

Zadanie 14. Obliczyć objętość $n-$wymiarowego sympleksu $|T_n|$,

$$T_n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n :\ x_i \geqslant 0,\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant 1\}.$$

$\heartsuit$**Zadanie 15.** Obliczyć objętość $n-$wymiarowej kuli $|B_n|$.

Wskazówka: Jest to dobry moment by dowiedzieć się więcej o uogólnionych współrzędnych sferycznych, choć nie jest to konieczne. Można uzasadnić ich poprawność podczas rozstawiania granic. Prawdopodobnie znajdzie się w materiale wykładu.