Pierwsze kolokwium przykładowe.

Matematyka 2, semestr letni 2010/2011

Zadanie 1. (a) Określić promień zbieżności szeregu potęgowego i obliczyć jego sumę:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

(b) Zbadać zbieżność szeregu liczbowego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\sqrt{n^2+n\sqrt{n}}-n)}.$$

Zadanie 2. Odwzorowanie $F:\mathbb{R}_2[\cdot]\to\mathbb{R}^3$ dane jest wzorem:

$$(Fv)=\begin{bmatrix} v'(-1) \\ v'(0) \\ v'(1) \end{bmatrix}.$$

Znaleźć jądro i obraz tego odwzorowania. Odpowiednie podprzestrzenie opisać podając przykłady ich baz.

Zadanie 3. Odwzorowanie $F\in L(\mathbb{R}_2[\cdot],\mathbb{R}_1[\cdot])$ odwzorowuje wielomiany $1+t$, $(1+t)^2$, $(1-t)^2$ odpowiednio na wielomiany t, $1+t$, $1-t$. Znaleźć macierz odwzorowania F w bazach $f=(f_1(t)=t-1,\ f_2(t)=t+1)$, $e=(e_1(t)=1,\ e_2(t)=t,\ e_3(t)=t^2)$.

Zadanie 4. Znaleźć sygnaturę i jakąś bazę diagonalizującą formę kwadratową, której macierz w bazie standardowej w $\mathbb{R}^3$ jest

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie 5. Dla jakich wartości $p\in\mathbb{C}$ macierz $A(p)$ jest odwracalna? Znaleźć $A(p)^{-1}$.

$$A(p)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & p \\ p^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$