Pytania na egzamin ustny

Matematyka 2, semestr letni 2010/2011

Uwaga! Pytania oznaczone ✓ uznane zostały przeze mnie za trudne i przeznaczone są dla osób chcących otrzymać stopień 5+. W ostatecznej wersji zadań konkretne przykłady rachunkowe mogą ulec zmianie. Proponowany zestaw pytań może ulec zmianie po konsultacjach z prowadzącymi ćwiczenia.

Pytanie 1. Dla jakiego $q \in \mathbb{R}$ szereg geometryczny $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ jest zbieżny? Odpowiedź proszę uzasadnić. Proszę także podać wzór na sumę tego szeregu.

Pytanie 2. Dlaczego nie jest możliwe, aby zbieżny był szereg liczbowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jeśli

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0?$$

Pytanie 3. Proszę sformułować pierwsze kryterium porównawcze zbieżności szeregów liczbowych. Z jakiego twierdzenia dotyczącego zbieżności ciągów liczbowych ono wynika?

Pytanie 4. Proszę sformułować kryteria Cauchy'ego i d'Alembert'a zbieżności szeregów liczbowych. Proszę podać przykłady zastosowania tych kryteriów.

Pytanie 5. Wyjaśnić, jak to jest możliwe, że

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \cdots = \log 2$$
$$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{6} + \cdots = \tfrac{3}{2}\log 2$$

skoro obie sumy różnią się jedynie kolejnością sumowania wyrazów? Przytoczyć odpowiednie twierdzenie.

Pytanie 6. Wyjaśnić pojęcia *zbieżność bezwzględna* i *zbieżność warunkowa.*

Pytanie 7. Sformułować kryteria Dirichleta, Abela i Leibniza dotyczące zbieżności szeregów o wyrazach dowolnych.

Pytanie 8. Co to jest promień zbieżności szeregu potęgowego? Jak go wyznaczamy? Proszę obliczyć promień zbieżności szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n}.$$

Pytanie 9. Zapisać za pomocą funkcji elementarnych wzór na funkcję f, której rozwinięciem w szereg w odcinku $]-1,1[$ jest
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$
Proszę uzasadnić rachunki przytaczając odpowiednie twierdzenia.

Pytanie 10. Wiadomo, że F jest odwzorowaniem liniowym na przestrzeni V o wartościach rzeczywistych, Wiadomo także, że $F(e_1)=2$, $F(e_2)=3$, $F(e_3)=-1$. Obliczyć wartość $F(v)$ jeśli $v=e_1-e_2+3e_3$. Rachunki uzasadnić odwołując się do definicji odwzorowania liniowego.

Pytanie 11. Co to są współrzędne wektora w bazie? Znaleźć współrzędne wektora $v\in\mathbb{R}^2$ w bazie e jeśli
$$v=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}\quad\text{oraz}\quad e=(e_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},e_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}).$$

Pytanie 12. W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^2$ dane są dwie bazy
$$e=(e_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},e_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}),\qquad f=(f_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},f_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix})$$
Wiadomo, że wektor v ma w bazie e współrzędne:
$$[v]^e=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$
Jak znaleźć jego współrzędne w bazie f?

Pytanie 13. Jak znaleźć macierz odwzorowania liniowego $F:V\to W$, jeśli w przestrzeniach V i W wybrane są bazy? Zapisać macierz obrotu o kąt $\frac{\pi}{3}$ w $\mathbb{R}^2$ używając w dziedzinie i w obrazie bazy kanonicznej.

Pytanie 14. Jak znaleźć macierz $[F]^g{}_h$ odwzorowania liniowego $F:V\to W$, jeśli mamy daną macierz $[F]^e{}_f$ (f,h oznaczają dwie bazy w V a e,g dwie bazy w W)? Zapisać i wyjaśnić odpowiedni wzór.

Pytanie 15. Wyjaśnić pojęcia *jądro*, *obraz* i *rząd* odwzorowania liniowego. Zapisać wzór wyrażający związek między wymiarami jądra i obrazu odwzorowania.

Pytanie 16. Co to jest *forma dwuliniowa* na przestrzeni wektorowej V? Co to jest *forma kwadratowa*. Jaki jest związek między powyższymi pojęciami?

Pytanie 17. Jak znaleźć macierz formy kwadratowej w danej bazie e? W jaki sposób następnie obliczyć wartość formy na wektorze posługując się jego współrzędnymi w bazie e?

Pytanie 18. Jak, znając bazy f i e w przestrzeni V oraz macierz formy dwuliniowej symetrycznej Q w bazie e, znaleźć jej macierz w bazie f? Proszę zapisać i wyjaśnić odpowiedni wzór.

Pytanie 19. Co to jest baza diagonalizująca formę dwuliniową symetryczną? Co to są współrzędne diagonalizujące? Proszę sformułować twierdzenie Lagrange'a dotyczące form kwadratowych a następnie stosując metodę Lagrange'a znaleźć współrzędne diagonalizujące formę Q określoną na $\mathbb{R}^3$ wzorem

$$Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + y^2 + yz.$$

Pytanie 20. Proszę sformułować twierdzenie Sylvestera o bezwładności form a następnie dowolną metodą znaleźć sygnaturę formy Q określonej na $\mathbb{R}^3$ wzorem

$$Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + y^2 + yz.$$

Pytanie 21. Proszę zapisać i wyjaśnić definicję wyznacznika macierzy kwadratowej $n \times n$.

Pytanie 22. Wyznacznik macierzy $n \times n$ można łatwo policzyć sprowadzając najpierw tę macierz do postaci górnotrójkątnej. Wyjaśnij z jakich własności wyznacznika korzystamy przeprowadzając taki rachunek.

Pytanie 23. ✓ Uzasadnij fakt, że *macierz jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jej wyznacznik jest różny od zera.*

Pytanie 24. Co to jest *znak permutacji*? Wyjaśnij używając przykładów.

Pytanie 25. Co to jest *rozwinięcie Laplace'a względem wiersza lub kolumny macierzy*?

Pytanie 26. Zapisz *wyznacznikowy wzór* na macierz odwrotną i wyjaśnij jego związek z *wzorami Cramera.*

Pytanie 27. Podaj definicje Cauchy'ego i Heinego *ciągłości* funkcji określonej na $\mathbb{R}^n$. Czy funkcja f na $\mathbb{R}^2$ określona poza $(0, 0)$ wzorem

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

i przyjmująca w $(0, 0)$ wartość 0 jest ciągła w punkcie $(0, 0)$?

Pytanie 28. Co to znaczy, że funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest *różniczkowalna* w punkcie (x_0, y_0)?

Pytanie 29. Wiadomo, że $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ jest różniczkowalna w punkcie (x_0, y_0, z_0). Jak wygląda $F'(x_0, y_0, z_0)$? Wyznaczyć $F'(1, 2, 3)$ dla

$$F(x, y, z) = (x^{yz}, xyz).$$

Pytanie 30. Zapisać i wyjaśnić wzór na różniczkowanie złożenia odwzorowań. Zastosować ten wzór do obliczenia pochodnej złożenia $F \circ G$ w punkcie $(1, 2)$ jeśli

$$G : \mathbb{R}^2(x, y) \longmapsto x^2 y \in \mathbb{R},$$

oraz

$$F : \mathbb{R} \ni t \longmapsto (\sin(t), \cos(t)) \in \mathbb{R}^2.$$

Pytanie 31. ✓ Wyjaśnij pojęcie *gradientu funkcji.*

Pytanie 32. Co to jest *punkt krytyczny* funkcji różniczkowalnej n-zmiennych? Podaj warunek dostateczny, aby punkt krytyczny był minimum lub maksimum funkcji. Skąd się te warunki biorą?

Pytanie 33. Sformułuj twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym. Korzystając z tego twierdzenia znajdź pochodną Φ^{-1} w punkcie $(1, 1)$ jeśli

$$\Phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Pytanie 34. Sformułuj twierdzenie o funkcji uwikłanej. Sprawdź, że równanie

$$x^2 + 3xy - y^2 = 9$$

zadaje w otoczeniu punktu $(2, 1)$ funkcję $x \longmapsto y(x)$. Oblicz pochodną funkcji y w tym punkcie.

Pytanie 35. Załóżmy, że równanie $F(x, y) = 0$ zadaje w sposób uwikłany funkcję $x \longmapsto y(x)$. Wyprowadź wzór na pierwszą i drugą pochodną y w zależności od pochodnych cząstkowych funkcji F pierwszego i drugiego rzędu.

Pytanie 36. Załóżmy, że równanie $F(x, y, z) = 0$ zadaje w sposób uwikłany funkcję $(x, y) \longmapsto z(x, y)$. Wyprowadź warunek na punkt krytyczny funkcji z. Znajdź także wzór na drugą pochodną z w punkcie krytycznym.

Pytanie 37. Niech f będzie funkcją różniczkowalną na $\mathbb{R}^3$. Niech także powierzchnia S w $\mathbb{R}^3$ dana będzie równaniem $G(x, y, z) = 0$. Zapisz i uzasadnij warunki na punkt krytyczny funkcji f obciętej do powierzchni S.

Pytanie 38. Niech f będzie funkcją różniczkowalną na $\mathbb{R}^3$. Niech także powierzchnia jednowymiarowa S w $\mathbb{R}^3$ dana będzie układem równań

$$\begin{cases} G_1(x, y, z) = 0 \\ G_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Zapisz i uzasadnij warunki na punkt krytyczny funkcji f obciętej do powierzchni S.

Pytanie 39. Punkt $(1, 1, -1)$ jest punktem krytycznym funkcji $f(x, y, z) = xyz$ na sferze o promieniu $\sqrt{3}$, któremu odpowiada wartość mnożnika Lagrange'a $\lambda = -\frac{1}{2}$. Zbadać charakter tego punktu krytycznego. Wyjaśnić przeprowadzane rachunki.

Pytanie 40. ✓ Zapisać wzór na drugą pochodną funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ obciętej do powierzchni S w punkcie krytycznym. Założyć, że powierzchnia zadana jest równaniem $G(x, y) = 0$. Wyjaśnić skąd bierze się ten wzór.

Pytanie 41. Jak znaleźć wektory styczne do dwuwymiarowej powierzchni w $\mathbb{R}^3$, jeśli powierzchnia zadana jest równaniem $G(x, y, z) = 0$? Jak znaleźć wektory styczne do jednowymiarowej powierzchni w $\mathbb{R}^3$, jeśli powierzchnia zadana jest równaniami $G_1(x, y, z) = 0$, $G_2(x, y, z) = 0$?