

Dodatkowe zadania z równań różniczkowych

Zadanie 1 (Zespolone wartości własne). Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

z warunkiem początkowym

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Równanie charakterystyczne $-\lambda(\lambda^2 + 9) = 0$

Zadanie 2 (zespolone wartości własne, uzmiennianie stałych). Znaleźć rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Równanie charakterystyczne $\lambda^2 + 1 = 0$

Zadanie 3 (Zespolone wartości własne z niezerową częścią rzeczywistą). Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

z warunkiem początkowym

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Równanie charakterystyczne $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = (\lambda - (1 + 2i))(\lambda - (1 - 2i)) = 0$.

Zadanie 4 (Równania liniowe, uzmiennianie stałych). Znaleźć ogólne rozwiązanie równania

$$\dot{x} = x \operatorname{tg} t + \cos t \quad \dot{x} - \frac{x}{1-t^2} - 1 - t = 0 \quad \dot{x} + \frac{2x}{t} = t^3$$

Zadanie 5 (Drugi rząd, uzmiennianie stałych). Znaleźć ogólne rozwiązanie równania

$$\ddot{x} + x = \operatorname{tg} t \quad \ddot{x} - 2\dot{x} + x = \frac{e^t}{t} \quad \ddot{x} - 2x = 4t^2 e^{t^2}$$